Prírodovedecká fakulta Univerzity Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2004

František SUDZINA

Prírodovedecká fakulta Univerzity Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach
Ústav matematických vied

DEA s nepresnými dátami

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Košice 2004 **František SUDZINA**

Prírodovedecká fakulta Univerzity Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach
Ústav matematických vied

Zadanie diplomovej práce

Meno a priezvisko diplomanta: František Sudzina
Odbor: Matematika

Názov: DEA s nepresnými dátami

Cieľ: Zoznámiť sa s metódami vyhodnocovania efektívnosti ekonomických jednotiek v prípade nepresných údajov. Preskúmať vzťah medzi jednotlivými metódami a pokúsiť sa odvodiť ich vlastnosti.

Odporúčaná literatúra:

Cooper, W. W. - Park, K. S. - Yu, G.: IDEA and AR-IDEA: Models for dealing with imprecise data in DEA. Management Science, roč. 45, 1999, č. 45, s. 597-607.
Despotis, D. K. - Smirlis, Y. G.: Data envelopment analysis with imprecise data. European Journal Of Operational Research, roč. 26, 2002, č. 140, s. 24-37.

Vedúca diplomovej práce: doc. RNDr. Katarína Cechlárová, CSc.
Konzultant diplomovej práce:
Oponent diplomovej práce:
Dátum zadania diplomovej práce: 22. 11. 2002
Dátum odovzdania diplomovej práce: 23. 4. 2004
Dátum potvrdenia: 15. 1. 2003

prof. RNDr. Stanislav Jendroľ, DrSc.
riaditeľ ústavu

Vyhlásenie

Vyhlasujem, že som túto diplomovú prácu vypracoval samostatne, na základe vedomostí získaných štúdiom a s pomocou uvedenej literatúry.

František Sudzina

Poďakovanie

Rád by som poďakoval vedúcej diplomovej práce doc. RNDr. Kataríne Cechlárovej, CSc. za cenné pripomienky a za obetavosť počas tvorby diplomovej práce.

Obsah

Úvod

Ekonomická teória skúma okrem iných procesov aj transformáciu obmedzených zdrojov (práca, pôda, kapitál) na výrobky a služby. Výrobné zdroje predstavujú vstup do transformačného procesu a vyprodukovaný tovar a služby sú výstupom. Jednotlivé vstupy a výstupy je možné identifikovať a kvantifikovať u jednej ekonomickej jednotky (s rozličnou mierou presnosti) a pri viacerých druhoch vstupov a výstupov ich ponímať ako vektor vstupov a vektor výstupov. Kľúčovou otázkou zostáva určenie hranice produkčných možností, ktorá predstavuje maximum tovarov a služieb, ktoré sa môžu vyprodukovať pri daných výrobných zdrojoch. V súvislosti so závislosťou výstupov od vstupov hovoríme o výnosoch z rozsahu, tie môžu byť konštantné alebo variabilné. O konštantných výnosoch z rozsahu hovoríme, ak pri zvýšení vstupov sa proporcionálne zvýšia aj výstupy, bez ohľadu na to koľko už produkujeme. Častejšie sa v ekonomickej praxi stretávame so situáciou, keď pri zvyšovaní vstupov do istej úrovne rastú výstupy nadproporcionálne (rastúce výnosy z rozsahu) a potom podproporcionálne (klesajúce výnosy z rozsahu). Hovoríme o variabilných výnosoch z rozsahu.

Ak existuje finančné ohodnotenie všetkých vstupov (nákladov) a výstupov (výnosov), tak ekonomická efektívnosť predstavuje dosiahnutie definovaného cieľa vo finančnom vyjadrení pri najnižších nákladoch alebo dosiahnutie maximálneho prínosu pri daných nákladoch. Ekonomická efektívnosť je predmetom skúmania ekonomickej analýzy. Napriek tomu, že ekonomická analýza disponuje širokým a prepracovaným aparátom ukazovateľov rozličného druhu, existujú úlohy, ktoré takýmto spôsobom nie sú uspokojivo riešiteľné. Problémom totiž je predpoklad existencie trhových cien všetkých vstupov aj výstupov. V prípade, že neexistuje trhová cena čo i len jediného vstupu alebo výstupu, nie je možné uskutočniť potrebný výpočet.

Zakladateľom teórie technickej efektívnosti je (Koopmans, 1951). Ekonomická jednotka je definovaná ako efektívna, ak pre jej vstupno-výstupný vektor platí, že nie je technologicky možné zväčšiť žiaden výstup pri danom objeme vstupov a naopak nie je možné zmenšiť žiaden vstup pri súčasnom zachovaní objemu výstupov.

Debreau (1951) a neskôr Farrell (1957) odvodili vstupne orientované indexy technickej efektívnosti vyjadrené formou ekviproporcionálnej (radiálnej) redukcie všetkých vstupov pri danej úrovni výstupov. Tieto indexy boli neskôr inšpiráciou pre Charnesa a i. (1978), Bankera a i. (1984) a Färea a i. (1985, 1994), ktorí odvodili a neskôr rozvinuli analýzu obalu údajov (data envelopment analysis – DEA). Analýza obalu údajov je technika, ktorá na základe výpočtu konvexného obalu dát všetkých hodnotených ekonomických jednotiek (ktorého súčasťou je aj hranica produkčných možností) umožňuje vypočítať ich relatívnu efektívnosť. Táto technika sa stala veľmi populárnou pri výpočte technickej efektívnosti, pretože pomerne jednoduchým spôsobom umožňuje zohľadniť transformáciu viacerých vstupov na viacero výstupov. Nevyžaduje určenie ceny vstupov a výstupov, čo je výhodné pri neexistencii trhových cien[1] (najmä v prípade, keď nevieme oceniť vzájomné váhy vstupov a výstupov) ani iných parametrov. Pri tejto metóde nie je potrebné vopred definovať typ správania ekonomickej jednotky (maximalizácia zisku, resp. minimalizácia nákladov).

Pomocou produkčnej funkcie možno určiť hranicu množiny produkčných možností. V praxi však konkrétnu produkčnú funkciu nepoznáme, preto hľadáme spôsoby ako ju určiť. Existujú dva prístupy – parametrický a neparametrický. Parametrický prístup, často označovaný aj ako ekonometrický, je založený na tom, že sa predpokladá explicitné vyjadrenie produkčnej funkcie, ale nie sú známe parametre tohto vyjadrenia. Môže byť napríklad známe, že ide o Cobb-Douglesovu produkčnú funkciu, ale nie sú známe parametre tejto funkcie. Parametre sa určia z nazbieraných údajov napríklad pomocou regresie. Nedostatkom pri tomto postupe je, že pomocou regresie sa určí stred, lebo sa predpokladá, že chyba má normálne rozdelenie. Tento nedostatok rieši stochastic frontier regression (Aigner, Lovell, Schmidt, 1977), čo je klasická lineárna regresia, ale o chybe sa predpokladá, že má asymetrické (jednostranné) rozdelenie. Neparametrický prístup, zastúpený analýzou obalu

[1] Trhové ceny nesú dokonalú informáciu pre trh. Regulované, fiktívne alebo inak určené ceny vo všeobecnosti nenesú dokonalú informáciu. Stanovenie minimálnych alebo maximálnych cien obmedzuje procesy vzájomného prispôsobovania sa ponuky a dopytu, čím zabraňuje dosiahnutiu ekvilibria, teda môže viesť i k neefektívnej alokácii zdrojov. Regulované ceny vzhľadom na svoju nepružnosť prestávajú byť ukazovateľom vyjadrujúcim hodnotu hlavne pri porovnaní s ostatnými vstupmi a výstupmi a to najmä v prípadoch, keď sú tieto ocenené trhovými cenami.

údajov, nevyžaduje znalosť funkčnej formy, pretože efektívnosť je meraná relatívne k všetkým organizačným jednotkám.

Analýza obalu údajov spočíva v skúmaní pozorovaných dát a bola pôvodne navrhnutá pre využitie v neziskových organizáciach, kde síce bola snaha fungovať efektívne, ale pri absencii kvantifikácie niektorých vstupov a výstupov v peňažnom vyjadrení nebolo možné použiť ukazovatele ekonomickej analýzy.

Prakticky sa ukázalo, že vhodným uplatnením analýzy údajov je napr. hodnotenie investičných projektov (Cook, Roll, 1988), kde sú známe technické a technologické stránky procesov, ale kde existuje aj vysoká entropia týkajúca sa budúcich cien vstupov i výstupov. Pri tomto použití sa jedná prevažne o vylúčenie dominovaných alternatív. Manažér má následne zjednodušené rozhodovanie, pretože mu stačí posúdiť menší počet projektov.

Pomocou analýzy obalu údajov je možné rozhodovať aj o čisto technických záležitostiach, ako je napr. v automobilke Daimler Chrysler dimenzovanie vstupných kanálov za účelom optimalizácie prietoku a rotácie (Holzer, 1999), či porovnanie nástrojov na meranie prúdu vstupných kanálov u valcových hláv (Berrer, 2002). Analogicky slúži na vylúčenie dominovaných alternatív a umožňuje technikovi viac sa sústrediť na kvalitatívny výber.

Ďalším možným využitím je hodnotenie práce podriadených (Epstein, Henderson, 1989), kde sa využíva skutočnosť, že podriadení jedného manažéra majú podobnú pracovnú náplň a spĺňajú v istom zmysle predpoklad homogenity. V takomto prípade vstupy predstavujú mzdu a iné funkčné pôžitky zamestnancov. Výstupmi sú jednotlivé zložky činnosti zamestnanca.

V neposlednom rade sa analýza obalu údajov používa na hodnotenie efektívnosti podnikov v danom odvetví (podniky v jednom odvetví vykonávajú relatívne homogénnu činnosť), napr. bánk (Barr a i., 1993; Favero, Papi, 1995) alebo poisťovní (Brockett a i., 1998; Cummins, Zi a i., 1998) v rámci jedného štátu, pobočiek bánk v rámci jednej banky (Al-Faraj a i., 1993; Boufounou, 1995; Ševčovič, Halická, Brunovský, 2001), mliekární (Kacvinská, 2001), nemocníc (Dlouhý, 1999), všetkých katedier v rámci univerzity alebo katedier rovnakého zamerania medzi univerzitami (Johnes, Johnes, 1993; Sinuany-Stern a i., 1994; Annová, 1998). Je vhodným nástrojom na posúdenie vhodnosti organizačných zmien (Metters, Vargas, 1999). Dôvodom analýzy efektívnosti je zvyčajne snaha identifikovať neefektívne ekonomické jednotky s úmyslom ich zrušiť alebo vykonať zmeny v ich manažmente so zámerom, aby fungovali efektívne.

Na Slovensku sa aplikáciou a teoretickým výskumom analýzy obalu údajov zaoberajú Fandel (1998), Sojka (2001), Ševčovič, Halická, Brunovský (2001), Budinský, Dvořák a Grančai (2003).

Cieľom práce je prezentovať metódy vyhodnocovania efektívnosti ekonomických jednotiek pomocou analýzy obalu údajov v prípade nepresných údajov. Druhá kapitola je zameraná na intervalové údaje. V tretej kapitole sú uvedené postupy na riešenie problému v prípade chýbajúcich dát, ktoré sú ilustrované v štvrtej kapitole na hodnotenie technickej efektívnosti vybraných slovenských bánk.

1

Analýza obalu údajov

Majme n samostatne sa rozhodujúcich ekonomických jednotiek, pričom každá z nich spracuváva m vstupov a produkuje w výstupov; $\{x_{ij}\}$ je množstvo i-tého vstupu ($i = 1, \ldots, m$) jednotky j a $\{y_{rj}\}$ je množstvo r-tého výstupu ($r = 1, \ldots, w$) jednotky j. Dôležitým predpokladom pre analýzu obalu údajov je, že všetky ekonomické jednotky využívajú rovnakú, bližšie nešpecifikovanú, technológiu, ktorá definuje množinu produkčných možností.

Ekonomicky dobre interpretovateľným ukazovateľom na hodnotenie efektívnosti ekonomických jednotiek je porovnanie ich výkonnosti voči hranici[1] produkčných možností.

Množina prípustných produkčných možností je určená ako konvexná[2] množina $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M} = \left\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^w_+ \mid \text{zo vstupov } \boldsymbol{x} \text{ možno vyprodukovať výstupy } \boldsymbol{y}\right\}.$$

Produkčné možnosti vstupu $\boldsymbol{x}$ sú rezom konvexnej množiny $\mathbf{M}$, preto tvoria konvexnú množinu:

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{x}) = \left\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^w_+ \mid (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbf{M}\right\}.$$

Množinu $\mathbf{F}$ vytvoríme z hraničných bodov množiny $\mathbf{M}$ takých, že $\boldsymbol{x} > \mathbf{0}$ a $\boldsymbol{y} > \mathbf{0}$. Množina $\mathbf{F}$ nazývame hranicou množiny prípustných produkčných možností $\mathbf{M}$, resp. hranicou produkčných možností. Hranicou množiny $\mathbf{M}(\boldsymbol{x})$ je množina:

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbf{M}\,(\boldsymbol{x}) \mid \nexists \boldsymbol{y}' \in \mathbf{M}\,(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{y}' \geq \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}' \neq \boldsymbol{y}\}$$

Hranica $\mathbf{F}(\boldsymbol{x})$ množiny $\mathbf{M}(\boldsymbol{x})$ určuje množinu Paretovsky najlepších hodnôt produkcie.

[1] V práci budeme pod hranicou rozumieť $(m+w-1)$-rozmerný útvar v $(m+w)$-rozmernom priestore, ktorý zhora ohraničuje množinu prípustných kombinácií vstupov a výstupov, čiže Paretovsky najlepších hodnôt produkcie.

[2] Konvexnosť množiny prípustných produkčných možností predpokladáme, lebo s každými dvoma ekonomickými jednotkami tam patria aj všetky ich konvexné kombinácie.

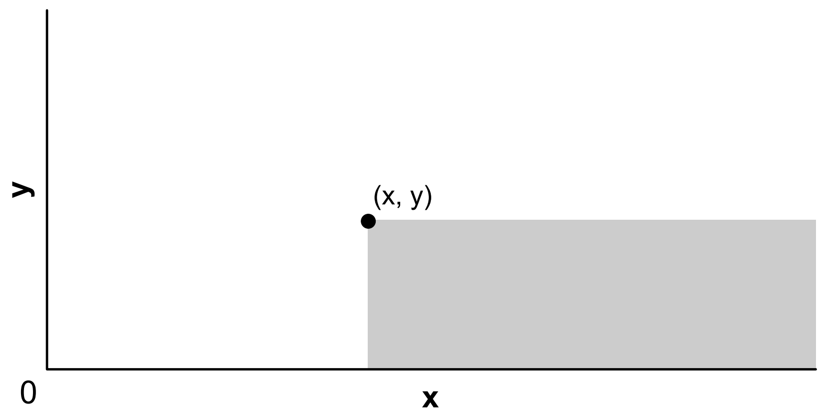
Kvôli analýze technickej efektívnosti je potrebné zostrojiť množinu $\mathbf{F}$. Lenže zozbierané dáta obsahujú len súbor n napozorovaných ekonomických jednotiek, tak sa musíme uspokojiť s aproximáciou množiny $\mathbf{F}$ pomocou aproximácie množiny $\mathbf{M}$, pretože nepoznáme ani množinu $\mathbf{M}$.

Množinu, ktorou budeme aproximovať množinu $\mathbf{M}$ označíme $\mathbf{M}_A$ (zrejme $\mathbf{M}_A \subseteq \mathbf{M}$). Bude to najmenšia konvexná množina, ktorá má tieto vlastnosti:

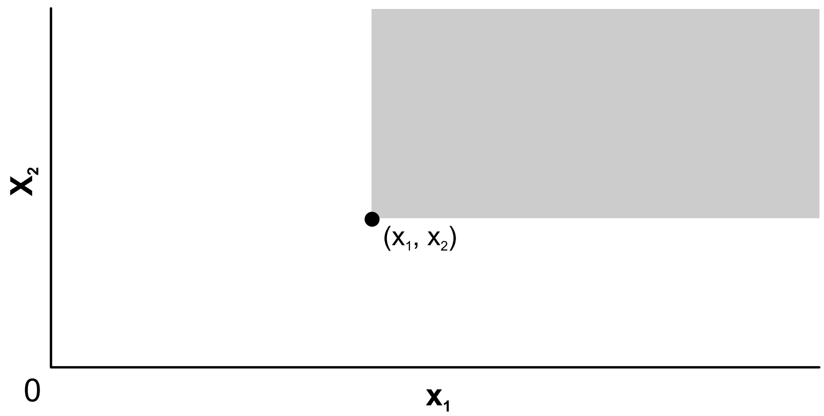
1. Bezplatná likvidácia Ak je možné vyrábať výstup $\boldsymbol{y}$ pri vstupe $\boldsymbol{x}$, potom je možné vyrábať aj menej pri vyššom vstupe.

$$\forall(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbf{M}_A \ \forall\alpha, \beta : \quad (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{\beta}) \in \mathbf{M}_A,$$

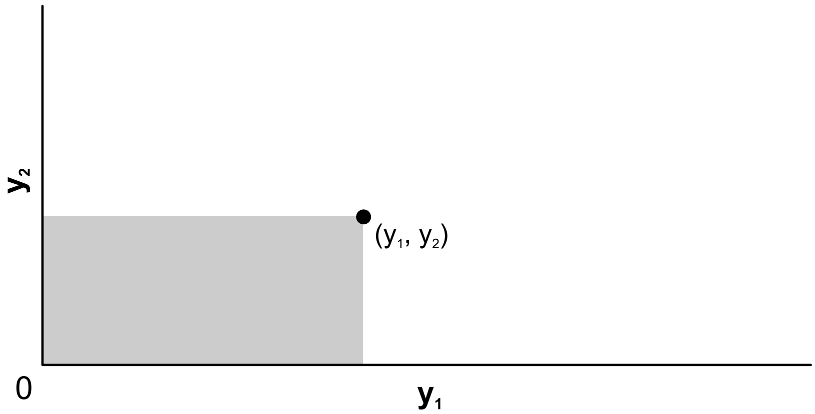
kde $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_w)$ a $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_w \geq 0$.



Obr. 1.1 Bezplatná likvidácia v modeli s 1 vstupom a 1 výstupom



Obr. 1.2 Bezplatná likvidácia v modeli s 2 vstupmi a jednotkovým výstupom

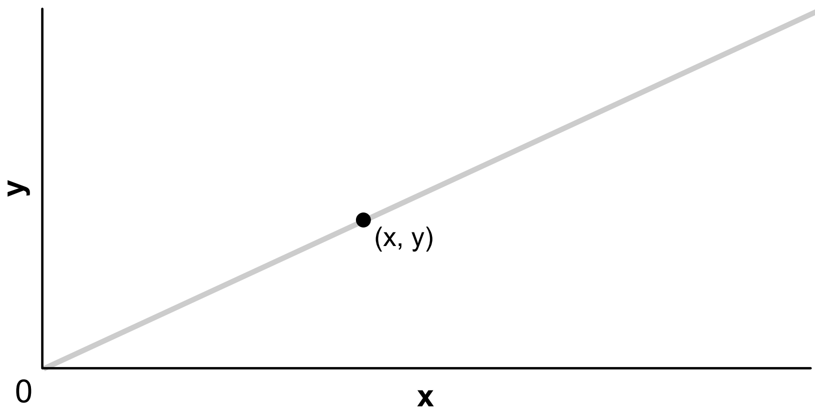


Obr. 1.3 Bezplatná likvidácia v modeli s 2 výstupmi a jednotkovým vstupom

2. Proporcionalita Ak pri veľkosti vstupu $\boldsymbol{x}$ je možné produkovať výstup $\boldsymbol{y}$, potom pri proporcionálne zmenenom vstupe $\boldsymbol{x'}$ bude možné vyrábať proporcionálne množstvo výstupu $\boldsymbol{y'}$.

$$\forall(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbf{M}_A \ \forall\lambda \geq 0 : \quad (\boldsymbol{x'}, \boldsymbol{y'}) = (\lambda\boldsymbol{x}, \lambda\boldsymbol{y}) \in \mathbf{M}_A$$

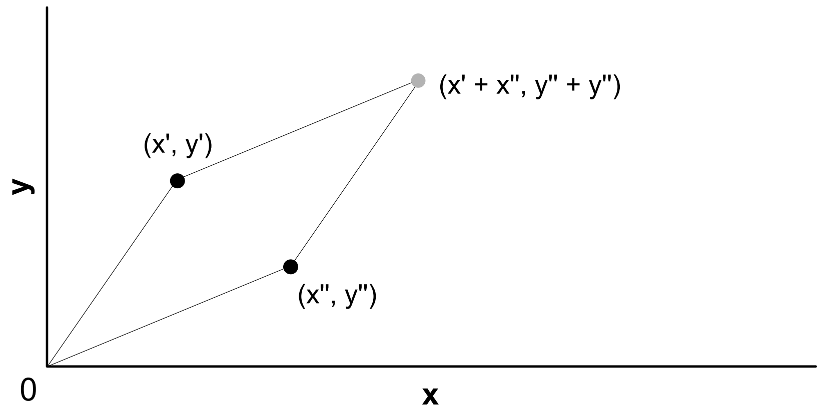
Táto podmienka je ekvivalentná s ekonomickým predpokladom konštantných výnosov z rozsahu.



Obr. 1.4 Proporcionalita v modeli s 1 vstupom a 1 výstupom

3. Aditivita Majme ekonomickú jednotku so vstupom $\boldsymbol{x'}$ a výstupom $\boldsymbol{y'}$ a inú ekonomickú jednotku so vstupom $\boldsymbol{x''}$ a výstupom $\boldsymbol{y''}$. Potom je možné zo vstupu $\boldsymbol{x'} + \boldsymbol{x''}$ vyrábať výstup $\boldsymbol{y'} + \boldsymbol{y''}$.

$$\forall(\boldsymbol{x'}, \boldsymbol{y'}) \in \mathbf{M}_A \ \forall(\boldsymbol{x''}, \boldsymbol{y''}) \in \mathbf{M}_A : \quad (\boldsymbol{x'} + \boldsymbol{x''}, \boldsymbol{y'} + \boldsymbol{y''}) \in \mathbf{M}_A$$



Obr. 1.5 Aditivita v modeli s 1 vstupom a 1 výstupom

Keďže požadujeme, aby všetky pozorované ekonomické jednotky ($j = 1, \ldots, n$) patrili do $\mathbf{M}_A$, hovoríme, že $\mathbf{M}_A$ je generovaná súborom ekonomických jednotiek so vstupno-výstupným vektorom $(\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{y}_j) = (x_{1j}, \ldots, x_{mj}, y_{1j}, \ldots, y_{sj})^\top$. Množina s vlastnosťami (1) až (3) tvorí konvexný polyédrický kužeľ, ktorý možno vyjadriť ako:

$$\mathbf{M}_{\mathrm{CRS}} = \left\{ (\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^w \;\middle|\; \begin{array}{ll} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j \leq x_i^* & i = 1, \ldots, m \\ \sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j \geq y_r^* & r = 1, \ldots, w \\ \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}_+^n & \end{array} \right\}$$

V prípade variabilných výnosov z rozsahu množina M_A je konvexná polyédrická množina:

$$\mathbf{M}_{\mathrm{VRS}} = \left\{ (\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^w \;\middle|\; \begin{array}{ll} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j \leq x_i^* & i = 1, \ldots, m \\ \sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j \geq y_r^* & r = 1, \ldots, w \\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 & \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}_+^n \end{array} \right\}$$

V tomto prístupe budeme za efektívnu ekonomickú jednotku považovať takú ekonomickú jednotku j, že:

$$\nexists\, (\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) \in \mathbf{M} : (\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) \neq (\boldsymbol{x_j}, \boldsymbol{y_j}) \wedge \boldsymbol{x_j} \geq \boldsymbol{x}^* \wedge \boldsymbol{y_j} \leq \boldsymbol{y}^*$$

kde $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\mathrm{CRS}}$ alebo $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\mathrm{VRS}}$. To znamená, že ekonomická jednotka j je efektívna, ak neexistuje lineárna kombinácia s $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$ (pre $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\mathrm{CRS}}$) alebo konvexná kombinácia (pre $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\mathrm{VRS}}$) iných ekonomických jednotiek r, $r \neq j$, ktorá by mala nižšie vstupy a zároveň vyššie výstupy.

Popísať hranicu produkčných možností, resp. navrhnúť funkciu, ktorá ju popíše, či už všeobecne alebo pre niektorú konkrétnu technológiu v určitom čase, je netriviálna úloha. Preto Charnes a i. (1978, s. 430) navrhli na hodnotenie efektívnosti (pôvodne) nasledujúci model, ktorý síce explicitne nepopisuje hranicu produkčných možností, ale umožňuje zistiť pomerovo vzdialenosť skúmanej ekonomickej jednotky od hranice produkčných možností, čo na hodnotenie efektívnosti postačuje.

Podľa Charnesa a i. (1978) majú byť všetky $\{y_{rj}\}_{\substack{r=1,\dots,w\\ j=1,\dots,n}}$ a $\{x_{ij}\}_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$ kladné. No nie vždy je možné danú požiadavku dodržať. Napríklad model hodnotiaci prácu bankových zamestnancov by mal obsahovať, kvôli robustnosti, údaje o všetkých zamestnancoch, čo robia za priehradkou. Lenže každý má v popise práce inú hlavnú činnosť, pričom robí aj ostatné, ale v menšej miere. Môže sa celkom ľahko stať, že jeden zamestnanec nebude v sledovanom období vykonávať niektorú, z jeho pohľadu vedľajšiu, činnosť vôbec. Podobne môže existovať model hodnotiaci efektívnosť poisťovní a nie každá poisťovňa sa musí venovať všetkým druhom poistenia.

(Färe, Grosskopf, 2002) ukázali, že minimálnymi požiadavkami na dáta sú:

1. aspoň jedna ekonomická jednotka spotrebuváva všetky vstupy a produkuje všetky výstupy,
2. každá ekonomická jednotka spotrebuváva aspoň jeden vstup a produkuje aspoň jeden výstup, to znamená, že pre každú ekonomickú jednotku sú všetky vstupy a výstupy nezáporné a aspoň jeden vstup a jeden výstup sú kladné.

Charnes a Cooper navrhli merať efektívnosť ako pomer $\frac{\text{vážený priemer výstupov}}{\text{vážený priemer vstupov}}$. Pri analýze obalu údajov si každá ekonomická jednotka volí váhy vstupov a výstupov tak, aby dosiahla čo najvyššiu efektívnosť. Zároveň je potrebné pridať ohraničenia, pretože inak by ekonomická jednotka pridelila ľubovoľne veľké váhy všetkým výstupom a ľubovoľne malé váhy všetkým vstupom, a tým činom dosiahla ľubovoľne veľkú efektívnosť, pretože aspoň jeden z vstup a aspoň jeden výstup sú kladné. Preto navrhli požadovať zvolenie takých váh, použitím ktorých u všetkých ekonomických jednotiek sa dosiahne efektívnosť nanajvýš 1.

Efektívnosťou jednotky j_0 sa nazýva hodnota h_{j_0} vypočítaná nasledovne:

$$\left.\begin{aligned} h_{j_0} &= \max_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} \frac{\sum\limits_{r=1}^{w} u_r \cdot y_{rj_0}}{\sum\limits_{i=1}^{m} v_i \cdot x_{ij_0}} \\ \frac{\sum\limits_{r=1}^{w} u_r \cdot y_{rj}}{\sum\limits_{i=1}^{m} v_i \cdot x_{ij}} &\le 1, \quad j = 1, \ldots, n \\ u_r, v_i &\ge 0, \quad r = 1, \ldots, w, \quad i = 1, \ldots, m \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

V rámci modelu (1) nadobúda efektívnosť h_{j_0} hodnoty z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Ekonomická jednotka j_0 je efektívna (leží na hranici produkčných možností) práve vtedy, ak $h_{j_0} = 1$. Čím je h_{j_0} bližšie k nule, tým menej účinne transformuje vstupy na výstupy. Ekonomickou interpretáciou h_{j_0} je pomer realizovaných výstupov ekonomickej jednotky j_0 k najväčšiemu množstvu výstupov (na $\mathbf{M}_A$) v rovnakej štruktúre, ktoré bolo možné vyprodukovať pri rovnakých vstupoch.

$\{x_{ij}\}$ a $\{y_{rj}\}$ sú konštanty. Váhy vstupov $\boldsymbol{v}^\top = (v_1, \ldots, v_m)$ a výstupov $\boldsymbol{u}^\top = (u_1, \ldots, u_s)$ nie sú vopred dané a získame ich až samotným výpočtom efektívnosti skúmanej ekonomickej jednotky j_0.

Majme optimálne riešenie $(\boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{v}^*)$ modelu (1), potom optimálnym bude aj $(\alpha \cdot \boldsymbol{u}^*, \alpha \cdot \boldsymbol{v}^*)$, $\alpha > 0$, t. j. optimálne riešenia tvoria otvorenú polpriamku začínajúcu v počiatku súradnicovej sústavy a prechádzajúcu nejakým optimálnym riešením (to vysvetľuje, prečo sa o miere efektívnosti h_j hovorí ako o radiálnej efektívnosti). To znamená, že množinu riešení modelu (1) môžeme rozdeliť do tried ekvivalencií. Potom si z každej triedy vyberieme jedno reprezentatívne riešenie $\boldsymbol{\nu}$ také, že

$$\sum_{i=1}^{m} \nu_i x_{ij_0} = 1 \tag{2}$$

Zároveň tak znormujeme menovateľa účelovej funkcie:

$$\frac{\sum\limits_{r=1}^{w} \mu_r y_{rj_0}}{\sum\limits_{i=1}^{m} \nu_i x_{ij_0}} \stackrel{(2)}{=} \frac{\sum\limits_{r=1}^{w} \mu_r y_{rj_0}}{1} = \sum_{r=1}^{w} \mu_r y_{rj_0}$$

Na druhé ohraničenie modelu (1) použijeme ekvivalentné úpravy (možno násobiť bez zmeny znamienka, lebo menovateľ je kladný):

$$\frac{\sum\limits_{r=1}^{w} \mu_r y_{rj}}{\sum\limits_{i=1}^{m} \nu_i x_{ij}} \le 1 \quad \Bigg| \cdot \sum_{i=1}^{m} \nu_i x_{ij}$$

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{w} \mu_r y_{rj} &\leq \sum_{i=1}^{m} \nu_i x_{ij} \quad \Big| - \sum_{i=1}^{m} \nu_i x_{ij} \\ \sum_{r=1}^{w} \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} \nu_i x_{ij} &\leq 0 \end{aligned}$$

Uvedenými úpravami možno previesť pôvodnú úlohu (model (1)) na úlohu lineárneho programovania:

$$\left.\begin{aligned} h_{j_0} &= \max_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu}} \sum_{r=1}^{w} \mu_r y_{rj_0} \\ \\ \sum_{i=1}^{m} \nu_i x_{ij_0} &= 1 \\ \sum_{r=1}^{w} \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} \nu_i x_{ij} &\leq 0, \quad j = 1, \ldots, n \\ \nu_i, \mu_r &\geq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad r = 1, \ldots, w \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Vykonanie analýzy obalu údajov vyžaduje riešiť n problémov, lebo j_0 postupne nadobúda hodnoty od 1 do n. Každé z optimálnych riešení $(\boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{v}_j)$, $j = 1, \ldots, n$, je normálovým vektorom nadroviny, ktorá prechádza začiatkom súradnicovej sústavy a definuje časť hranice množiny $\mathbf{M}_A$. Tie ekonomické jednotky, ktoré ležia na tejto hranici sa nazývajú efektívne. Množinu $\mathbf{M}_A$ získame ako prienik tých polpriestorov, ktoré sú určené nadrovinami získanými pri riešení uvažovaných n problémov.

Ak $h_{j_0} = 1$, tak ekonomická jednotka j_0 je efektívna. Inak je neefektívna a h_{j_0} je mierou jej efektívnosti.

Symetricky k predchádzajúcemu modelu možno zadefinovať úlohu pre výstupne orientovaný model, v ktorom sa efektívnosť merá ako pomer $\frac{\text{vážený priemer vstupov}}{\text{vážený priemer výstupov}}$. Každá ekonomická jednotka si volí váhy vstupov a výstupov tak, aby dosiahla čo najnižšiu hodnotu účelovej funkcie. Ohraničenia na váhy vstupov a výstupov sú nutné preto, lebo inak by si ekonomická jednotka priradením ľubovoľne veľkých váh všetkým výstupom a ľubovoľne malých váh všetkým vstupom zabezpečila ľubovoľne malú hodnotu účelovej funkcie. Preto Charnes a i. (1978) požadovali zvolenie takých váh, použitím ktorých u všetkých ekonomických jednotiek sa dosiahne hodnota účelovej funkcie aspoň 1:

$$g_{j_0} = \min_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} \frac{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij_0}}{\sum_{r=1}^{w} u_r y_{rj_0}}$$

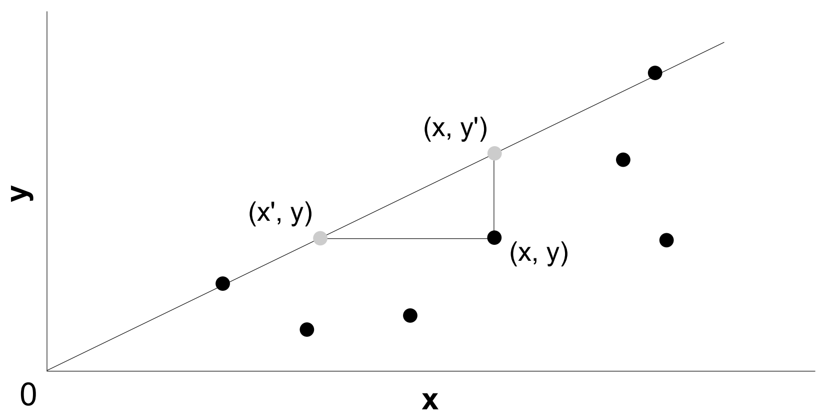
$$
\begin{aligned}
\frac{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}}{\sum_{r=1}^{w} u_r y_{rj}} &\geq 1, \quad j = 1, \ldots, n \\
u_r, v_i &\geq 0, \quad r = 1, \ldots, w; \quad i = 1, \ldots, m
\end{aligned}
$$

Po znormovaní výstupu dostaneme:

$$
\begin{aligned}
g_{j_0} &= \min_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu}} \sum_{i=1}^{m} \nu_i x_{ij_0} \\
\sum_{r=1}^{w} \mu_r y_{rj_0} &= 1 \\
\sum_{i=1}^{m} \nu_i x_{ij} - \sum_{r=1}^{w} \mu_r y_{rj} &\geq 0, \quad j = 1, \ldots, n \\
\mu_r, \nu_i &\geq 0, \quad r = 1, \ldots, w, \quad i = 1, \quad , m
\end{aligned}
$$

Ekonomickou interpretáciou g_{j_0} je pomer spotrebovaných vstupov ekonomickej jednotky j_0 k najmenšiemu množstvu vstupov (na $\mathbf{M}_A$) v rovnakej štruktúre, ktoré malo postačovať na produkciu rovnakých výstupov.

Ak $g_{j_0} = 1$, tak ekonomická jednotka j_0 je efektívna. Inak je neefektívna a $\frac{1}{g_{j_0}}$ je mierou jej efektívnosti. Dôvodom je, že miera efektívnosti sa intuitívne chápe ako hodnota z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, čomu zodpovedá pomer $\frac{\text{vážený priemer výstupov}}{\text{vážený priemer vstupov}}$. Neefektívne jednotky možno projektovať na hranicu produkčných možností. Pri vstupne orientovanom modeli ide o proporcionálne zväčšenie výstupov (projekcia neefektívnej ekonomickej jednotky (x, y) na (x, y')), pri výstupne orientovanom modeli ide o proporcionálne zníženie vstupov (projekcia neefektívnej ekonomickej jednotky (x, y) na (x', y)), ako je to ilustrované na obr. 1.



Obr. 1.6 Projekcia neefektívnej ekonomickej jednotky pri konštantných výnosoch z rozsahu

Veta 2 poskytne dôkaz, že $f_{j_0} = \frac{1}{g_{j_0}}$, čiže pri konštantných výnosoch z rozsahu miera efektívnosti nezávisí od orientácie modelu.

Flexibilita váh je silnou aj slabou stránkou tejto metódy. Silnou preto, lebo nie je potrebné využiť experta na stanovenie exaktných váh vopred, ako je to pri viackriteriálnom rozhodovaní. Slabou preto, lebo sa môže stať, že ekonomická jednotka dosiahne vysokú efektívnosť len kvôli vhodne zvoleným váham. Preto sa odporúča nežiadať iba nezápornosť koeficientov, ale pridať nearchimedovskú konštantu ε, $\varepsilon > 0$, aby sme zabezpečili, že na vyhodnotení efektívnosti danej ekonomickej jednotky sa prejavia všetky vstupy a výstupy, pričom ε je tak malé, že úloha je prípustná.

Teda zadanie našej úlohy lineárneho programovania pre vstupne orientovaný model sa zmení na:

$$
\begin{aligned}
h_{j_0} &= \max_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu}} \sum_{r=1}^{w} \mu_r y_{rj_0} \\
\sum_{i=1}^{m} \nu_i x_{ij_0} &= 1 \\
\sum_{r=1}^{w} \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} \nu_i x_{ij} &\leq 0, \quad j = 1, \ldots, n \\
\nu_i, \mu_r &\geq \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, m; \quad r = 1, \ldots, w
\end{aligned}
$$

Analogicky sa zmení aj úloha lineárneho programovania pre výstupne orientovaný model na:

$$
\begin{aligned}
g_{j_0} &= \min_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu}} \sum_{i=1}^{m} \nu_i x_{ij_0} \\
\sum_{r=1}^{w} \mu_r y_{rj_0} &= 1 \\
\sum_{i=1}^{m} \nu_i x_{ij} - \sum_{r=1}^{w} \mu_r y_{rj} &\geq 0 \quad j = 1, \ldots, n \\
\mu_r, \nu_i &\geq \varepsilon \quad r = 1, \ldots, w, \quad i = 1, \ldots, m
\end{aligned}
$$

Úloha ostáva prípustnou, pretože stále hľadáme takú nadrovinu, aby jeden z polpriestorov ňou určených obsahoval všetky body reprezentujúce vyhodnocované ekonomické jednotky a tých je konečne veľa.

Teraz už môžeme túto úlohu riešiť. Keďže vyhodnocovaných ekonomických jednotiek je v praxi zväčša viac ako vstupov a výstupov (odporúča sa, aby súčet počtu vstupov a výstupov neprekročil tretinu počtu vyhodnocovaných jednotiek

(Banker a i. (1989)); návod na zmenšenie počtu vstupov a výstupov ponúkajú (Jenkins, Anderson, 2003)), je výhodnejšie riešiť k nej duálnu úlohu. Vektor $\boldsymbol{s}^+$ vyjadruje nedostatok výstupov a vektor $\boldsymbol{s}^-$ prebytok vstupov. Z historických dôvodov sa v ďalšom texte bude považovať model (1), resp. model (3) za duálnu úlohu a nasledujúci model za primárnu úlohu.

Prvej podmienke modelu (1) bude zodpovedať skalárna premenná θ, n podmienkam pre ekonomické jednotky n-zložkový vektor $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, ohraničeniam $\boldsymbol{\mu}$ vektor $\boldsymbol{s}^+$, ohraničeniam znamienok $\boldsymbol{\nu}$ vektor $\boldsymbol{s}^-$.

Potom minimalizujeme účelovú funkciu:

$$f = \theta - \varepsilon \sum_{r=1}^{w} s_r^+ - \varepsilon \sum_{i=1}^{m} s_i^-$$

Pretože premenné $\boldsymbol{\mu}$ a $\boldsymbol{\nu}$ boli ohraničené, dostávame nasledujúce rovnosti:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j - s_r^+ &= y_{rj_0} \quad r = 1, \ldots, w \\ \theta x_{ij_0} - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j - s_i^- &= 0 \quad i = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

Keďže zložky vektorov $\boldsymbol{s}^+$, $\boldsymbol{s}^-$ a $\boldsymbol{\lambda}$ zodpovedajú nerovnostiam, budú pre ne platiť podmienky nezápornosti:

$$\begin{aligned} s_r^+ &\geq 0 \quad r = 1, \ldots, w \\ s_i^- &\geq 0 \quad i = 1, \ldots, m \\ \lambda_j &\geq 0 \quad j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Naopak, premenná θ zodpovedá rovnici, takže ostane neohraničená.

Týmto sme dostali primárnu úlohu lineárneho programovania s $(m + w)$ ohraničeniami a môžeme ju riešiť primárnou simplexovou metódou:

$$\begin{aligned} h_{j_0} &= \max_{\boldsymbol{s}^+, \boldsymbol{s}^-, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\theta}} \theta - \varepsilon \sum_{r=1}^{w} s_r^+ - \varepsilon \sum_{i=1}^{m} s_i^- \\ \sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j - s_r^+ &= y_{rj_0} \quad r = 1, \ldots, w \\ \theta x_{ij_0} - \sum_{i=1}^{n} x_{ij}\lambda_j - s_i^- &= 0 \quad i = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_r^+ &\geq 0 \quad r = 1, \dots, w \\ s_i^- &\geq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ \lambda_j &\geq 0 \quad j = 1, \dots, n \\ &\theta \text{ je neohraničená} \end{aligned}$$

Ekonomická jednotka je efektívna, ak sa hodnota účelovej funkcie rovná jednej. Z vety o komplementarite vyplýva, že všetky ohraničenia budú splnené ako rovnosti (aj duálna úloha má optimálne riešenie, duálne premenné $\boldsymbol{\mu}$ a $\boldsymbol{\nu}$ sú ostro väčšie ako $\mathbf{0}$) a teda jednotka bude ležať na hranici efektívnosti. Zároveň platí, že $\theta = 1$ a $\boldsymbol{s}^+ = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{s}^- = \mathbf{0}$.

Z teórie lineárneho programovania vyplýva, že hodnoty duálnych premenných sú identické s tieňovými cenami pôvodného modelu. V našom prípade rozoberáme vstupne orientovaný model. θ nám udáva, koľkokrát sa majú zmenšiť vstupy neefektívnej jednotky (identifikuje mieru neefektívnosti), aby sa priblížila k hranici efektívnosti (k nadrovine). No definitívnu projekciu na efektívnu množinu dosiahneme až pripočítaním doplnkových premenných $\boldsymbol{s}^+$ k výstupom a odpočítaním premenných $\boldsymbol{s}^-$ od vstupov (identifikujú zdroje neefektívnosti).

V inom pohľade na riešenie primárnej úlohy hodnoty premenných λ_j v optimálnom riešení sú koeficientmi pre fiktívnu jednotku zo vstupmi $\boldsymbol{x}'_j$ a výstupmi $\boldsymbol{y}'_j$, ktorá je projekciou našej skúmanej jednotky so vstupmi $\boldsymbol{x}_{j_0}$ a výstupmi $\boldsymbol{y}_{j_0}$ na efektívnu množinu:

$$\begin{aligned} y'_r &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot y_{rj}, \quad r = 1, \dots, w \\ x'_i &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot x_{ij}, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Neefektívnu jednotku je možné projektovať na hranicu produkčných možností ako lineárnu kombináciu efektívnych, ktoré nazývame jej referenčnými jednotkami.

Vzhľadom na to, že nie každá ekonomická jednotka musí nevyhnutne využívať všetky druhy vstupov a produkovať všetky druhy výstupov, predpokladajme ďalej len, že neexistuje také j, pre ktoré $\boldsymbol{x}_j = \mathbf{0}$ alebo $\boldsymbol{y}_j = \mathbf{0}$, t. j. každá ekonomická jednotka spotrebuje nejaký vstup a produkuje nejaký výstup. Teda platí:

$$(\forall j)(\exists i) x_{ij} > 0 \wedge (\forall j)(\exists k) y_{kj} > 0$$

Nasledujúca veta popisuje vzťah medzi optimálnymi riešeniami vstupne a výstupne orientovaných primárnych modelov. Veta 2 sa zaoberá duálnymi modelmi. Tieto vety formulovali a dokázali SEIFORD a THRALL (1990).

Veta 1 *Nech pre každé $j = 1, \ldots, n$ sú dané vektory $\boldsymbol{x}_j$, $\boldsymbol{y}_j$. Nech PI_0 je nasledovná úloha lineárneho programovania s premennými θ, $\boldsymbol{\lambda}$:*

$$\left.\begin{array}{rcll}
\min\limits_{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\lambda}} \theta & & & \\
\sum\limits_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j & \geq & y_{rj_0} \quad r = 1, \ldots, w & (4) \\
\theta x_{ij_0} - \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j & \geq & 0 \quad i = 1, \ldots, m & (5) \\
\theta \text{ voľná}, \lambda_j & \geq & 0 \quad j = 1, \ldots, n &
\end{array}\right\} (PI_0)$$

a PO_0 je úloha lineárneho programovania s premennými ϕ, $\boldsymbol{\chi}$:

$$\left.\begin{array}{rcl}
\max\limits_{\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\chi}} \phi & & \\
\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij}\chi_j & \leq & x_{ij_0} \quad i = 1, \ldots, m \\
\phi y_{rj_0} - \sum\limits_{j=1}^{n} y_{rj}\chi_j & \leq & 0 \quad r = 1, \ldots, w \\
\phi \text{ voľná}, \chi_j & \geq & 0 \quad j = 1, \ldots, n
\end{array}\right\} (PO_0)$$

Nech $(\theta^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ je optimálne riešenie úlohy PI_0. Potom

$$(\phi, \boldsymbol{\chi}) = \left(\frac{1}{\theta^*}, \frac{1}{\theta^*}\boldsymbol{\lambda}^*\right)$$

je optimálne riešenie úlohy PO_0 a zobrazenie $(\theta^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \rightarrow \left(\frac{1}{\theta^*}, \frac{1}{\theta^*}\boldsymbol{\lambda}^*\right)$ je vzájomne jednoznačné medzi optimálnymi riešeniami PI_0 a PO_0.

Dôkaz.

Nech pre prípustné riešenie PI_0 platí $\theta = 0$. Predpokladajme, že existuje $j : \lambda_j > 0$, zároveň z predchádzajúceho platí $\theta \boldsymbol{x}_{j_0} = \mathbf{0}$. Keďže vektor $\boldsymbol{x}_j$ má aspoň jednu kladnú zložku, neplatí $x_j\lambda_j \leq \theta x_{j_0}$, t. j. neplatí (5).

Preto ak $\theta = 0$, potom $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$ a teda platí $\left(\sum\limits_{j=1}^{n} y_{1j}\lambda_j, \ldots, \sum\limits_{j=1}^{n} y_{sj}\lambda_j\right) = \mathbf{0} \ngeq \boldsymbol{y_{j_0}}$ a teda neplatí nerovnosť (4). Keby pre prípustné riešenie platilo $\theta < 0$, tým skôr neplatí (5). Teda pre prípustné riešenie úlohy PI_0 platí $\theta > 0$.

Nech $(\theta, \boldsymbol{\lambda})$ je prípustné riešenie úlohy PI_0. Po predelení nerovností (4), (5) číslom θ dostaneme:

$$\frac{1}{\theta} \cdot \sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j \quad \geq \quad y_{rj_0} \cdot \frac{1}{\theta} \quad r = 1, \ldots, w$$

$$x_{ij_0} - \frac{1}{\theta} \cdot \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

Ak položíme $\phi = \frac{1}{\theta}$, $\boldsymbol{\chi} = \frac{1}{\theta} \cdot \boldsymbol{\lambda}$, dostaneme:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} y_{rj}\chi_j &\geq \phi y_{rj_0} &&\Big| - \sum_{j=1}^{n} y_{rj}\chi_j \\
x_{ij_0} - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\chi_j &\geq 0 &&\Big| + \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\chi_j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi y_{rj_0} - \sum_{j=1}^{n} y_{rj}\chi_j &\leq 0 \quad r = 1, \dots, w \\
\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\chi_j &\leq x_{ij_0} \quad i = 1, \dots, m
\end{aligned}$$

Teda $(\phi, \boldsymbol{\chi})$ je prípustné riešenie úlohy PO_0

Podobne sa dá ukázať, že ak $(\phi, \boldsymbol{\chi})$ je prípustné riešenie úlohy PO_0 spĺňajúce podmienku $\phi > 0$, potom $\left(\frac{1}{\phi}, \frac{1}{\phi} \cdot \boldsymbol{\chi}\right)$ je prípustné riešenie PI_0. Nech $(\theta^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$, $(\phi^*, \boldsymbol{\chi}^*)$ sú optimálne riešenia úloh PI_0 a PO_0, pričom $\phi^* \geq 1$, lebo $\phi = 1$, $\chi_0 = 1$, $\chi_j = 0$ inak, je prípustné riešenie PO_0.

$\left(\frac{1}{\theta^*}, \frac{1}{\theta^*} \cdot \boldsymbol{\lambda}^*\right)$ je prípustné riešenie úlohy PO_0, v ktorej maximalizujeme, odtiaľ

$$\phi^* \geq \frac{1}{\theta^*} \tag{6}$$

Podobne $\left(\frac{1}{\phi}^*, \frac{1}{\phi}^* \cdot \boldsymbol{\chi}^*\right)$ je prípustné riešenie úlohy PI_0, v ktorej minimalizujeme, preto platí

$$\theta^* \leq \frac{1}{\phi^*} \Rightarrow \frac{1}{\theta*} \geq \phi^* \tag{7}$$

Zo vzťahov (6), (7) máme $\phi^* = \frac{1}{\theta^*}$, teda optimálne riešenia úlohy PI_0 sú vzájomne jednoznačne zobrazené do optimálnych riešení úlohy PO_0.

$\square$

Veta 2 *Nech pre každé $j = 1, \dots, n$ sú dané vektory $\boldsymbol{x}_j$, $\boldsymbol{y}_j$. Nech DI_0 je nasledovná úloha lineárneho programovania s premennými $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\nu}$:*

$$
\left.\begin{array}{rcll}
\max\limits_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu}} z & = & \sum\limits_{r=1}^{w} \mu_r y_{rj_0} & \\
\sum\limits_{i=1}^{m} \nu_i x_{ij_0} & = & 1 & (8) \\
\sum\limits_{r=1}^{w} \mu_r y_{rj} - \sum\limits_{i=1}^{m} \nu_i x_{ij} & \leq & 0 \quad j = 1, \ldots, n & (9) \\
\mu_r, \nu_i & \geq & 0 \quad r = 1, \ldots, w & \\
 & & i = 1, \ldots, m &
\end{array}\right\} (DI_0)
$$

a DO_0 je úloha lineárneho programovania s premennými $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$:

$$
\left.\begin{array}{rcl}
\min\limits_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} q & = & \sum\limits_{i=1}^{m} v_i x_{ij_0} \\
\sum\limits_{r=1}^{w} u_r y_{rj_0} & = & 1 \\
-\sum\limits_{r=1}^{w} u_r y_{rj} + \sum\limits_{i=1}^{m} v_i x_{ij} & \geq & 0 \quad j = 1, \ldots n \\
u_r, v_i & \geq & 0 \quad r = 1, \ldots, w \\
 & & i = 1, \ldots, m
\end{array}\right\} (DO_0)
$$

Zobrazenie $(\boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{v}^*) \to \left(\frac{1}{z^*}\right)(\boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\nu}^*)$ je vzájomne jednoznačné medzi optimálnymi riešeniami úloh DI_0 a DO_0. Príslušné optimálne hodnoty z^*, q^* spĺňajú $z^* \cdot q^* = 1$.

Dôkaz.

Funkcii z v modeli (DI_0) zodpovedá funkcia θ v modeli (PI_0) z vety 1. Funkcii q v modeli (DO_0) zodpovedá funkcia ϕ v modeli (PO_0) z vety 1.

Nech $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu})$ je prípustné riešenie úlohy DI_0. Z vety 1 máme, že $z > 0$. Položme $\boldsymbol{u} = \frac{1}{z}\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{v} = \frac{1}{z}\boldsymbol{\nu}$. Predelením rovnice $z = \sum\limits_{r=1}^{w} \mu_r y_{rj_0}$ číslom z máme $1 = \frac{1}{z} \sum\limits_{r=1}^{w} \mu_r y_{rj_0} = \sum\limits_{r=1}^{w} \frac{1}{z}\mu_r y_{rj_0} = \sum\limits_{r=1}^{w} u_r y_{rj_0}$.

Predelením nerovnosti (9) číslom z máme $\frac{1}{z} \sum\limits_{r=1}^{w} \mu_r y_{rj} - \frac{1}{z} \sum\limits_{i=1}^{m} \nu_i x_{ij} \leq 0$ alebo ekvivalentne $-\sum\limits_{r=1}^{w} u_r y_{rj} + \sum\limits_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \geq 0$, teda $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ je prípustné riešenie úlohy DO_0.

Tiež je vidieť, že ak $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ je prípustné riešenie úlohy DO_0, tak $\left(\frac{1}{q} \cdot \boldsymbol{u}, \frac{1}{q} \cdot \boldsymbol{v}\right)$ je prípustné riešenie úlohy DI_0.

Nech teraz $(\boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\nu}^*)$ je optimálne riešenie DI_0.

Z vety 1 máme, že

$$z^* \cdot q^* = 1 \tag{10}$$

Ak položíme $\boldsymbol{u} = \frac{1}{z^*} \cdot \boldsymbol{\mu}^*$, $\boldsymbol{v} = \frac{1}{z^*} \cdot \boldsymbol{\nu}^*$, tak podľa dokázaného $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ je prípustné riešenie DO_0. Pre hodnotu účelovej funkcie platí: $q = \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij_0} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{z^*} \nu_i^* x_{ij_0} = \frac{1}{z^*} \sum_{i=1}^{m} \nu_i^* x_{ij_0} \overset{(9)}{=} \frac{1}{z^*} \cdot 1 \overset{(10)}{=} q^*$ teda $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ je optimálne riešenie DO_0. Platí aj obrátene, a teda zobrazenie $(\boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{v}^*) \rightarrow \left(\frac{1}{z^*}\right)(\boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\nu}^*)$ je vzájomne jednoznačné medzi optimálnymi riešeniami úloh DI_0 a DO_0.

$\square$

V praxi sa stáva, že ekonomické jednotky dosahujú optimálne výsledky z dôvodu ich „správnej" veľkosti. Ak je firma malá, ťažko sa dajú dosiahnuť nízke jednotkové náklady (firma má príliš malý priestor na rozpočítanie fixných nákladov). Keď sa firma rozrastá, znižujú sa jednotkové náklady. To je zdrojom zväčšujúcich sa výnosov. Dodatočné výstupy teda rastú rýchlejšie ako dodatočné vstupy. Nastať však môže aj opačná situácia, keď je firma príliš veľká a nastávajú problémy s riadením, čo neprimerane zvyšuje náklady.

Z hore uvedeného vyplýva, že firma sa môže na trhu správať efektívne vzhľadom k ostatným v rámci svojej veľkosti. Doteraz sme uvažovali o konštantných výnosoch z rozsahu, teraz sa pozrieme na variabilné výnosy z rozsahu.

Z predpokladov, o ktorých sme hovorili pri konštantných výnosoch, ostáva v platnosti iba bezplatná likvidácia.

Ďalej požadujeme konvexnosť prípustnej množiny, takže k primárnej úlohe PI_0 pridáme ohraničenie, ktoré zodpovedá ekonomickej požiadavke variabilných výnosov z rozsahu:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

Takto zmenšíme prípustnú množinu. Rovnako ako v prípade konštantných výnosov z rozsahu aj v tomto prípade bude množina $\mathbf{M}_{\mathrm{VRS}}$ tvorená prienikom polpriestorov. Rozdiel oproti množine $\mathbf{M}_{\mathrm{CRS}}$ je, že hranicu $\mathbf{M}_{\mathrm{VRS}}$ nemusia tvoriť len nadroviny prechádzajúce počiatkom súradnicovej sústavy. To znamená, že už nepožadujeme, aby každý efektívny podnik rovnako, v závislosti od veľkosti svojich výstupov, proporcionálne zmenšil svoje vstupy. Teraz bude závisieť od veľkosti výstupov, na ktorú časť hranice bude podnik projektovaný.

Riešime teda primárnu úlohu:

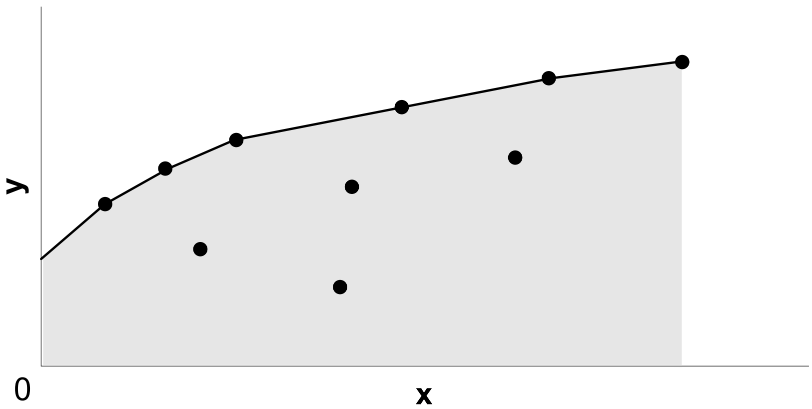
$$h_{j_0} = \min_{\boldsymbol{s}^+, \boldsymbol{s}^-, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\theta}} \theta - \varepsilon \sum_{r=1}^{w} s_r^+ - \varepsilon \sum_{i=1}^{m} s_i^-$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j - s_r^+ &= y_{rj_0} \quad r = 1,\dots,w \\
\theta x_{ij_0} - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j - s_i^- &= 0 \quad i = 1,\dots,m \\
\sum_{j=1}^{n} \lambda_j &= 1 \\
s_r^+ &\geq 0 \quad r = 1,\dots,w \\
s_i^- &\geq 0 \quad i = 1,\dots,m \\
\lambda_j &\geq 0 \quad j = 1,\dots,n \\
&\theta \text{ je neohraničená}
\end{aligned}
$$

Pričom duálna úloha sa zmení nasledovne:

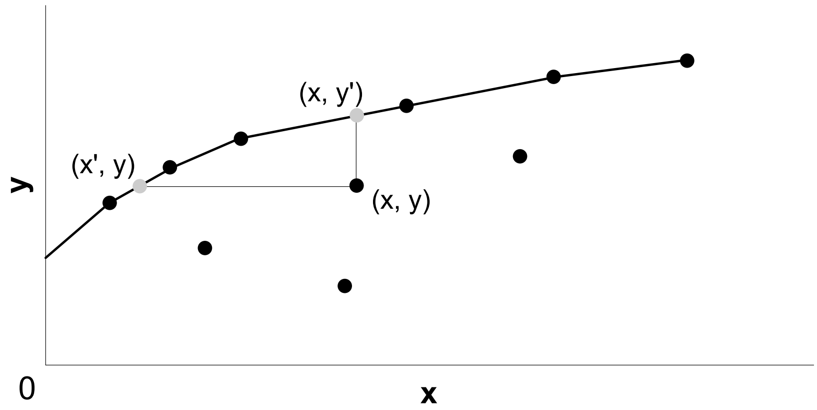
$$
\begin{aligned}
h_{j_0} &= \max_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu}} \mu_0 + \sum_{r=1}^{w} \mu_r y_{rj_0} \\
\sum_{i=1}^{m} \nu_i x_{ij_0} &= 1 \\
\mu_0 + \sum_{r=1}^{w} \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} \nu_i x_{ij} &\leq 0 \quad j = 1,\dots,n \\
\mu_r &\geq \varepsilon \quad i = 1,\dots,m \\
\nu_i &\geq \varepsilon \quad r = 1,\dots,w \\
&\mu_0 \text{ je neohraničená}
\end{aligned}
$$

Hľadáme teda hranicu produkčných možností, tak ako je to prezentované na obr. 1.7. Riešením úlohy zase získame tieňové ceny. Tie vyjadrujú relatívnu veľkosť vplyvu



Obr. 1.7 Množina produkčných možností v modeli s 1 vstupom a 1 výstupom pri variabilných výnosoch z rozsahu

jednotlivých ekonomických vstupov v výstupov na efektívnosť skúmanej ekonomickej jednotky. Pomocou tieňových cien môžeme urobiť projekcie neefektívnych jednotiek na hranicu produkčných možností. Pri vstupne orientovanom modeli ide o proporcionálne zväčšenie výstupov (projekcia neefektívnej ekonomickej jednotky (x, y) na $(x, y'))$, pri výstupne orientovanom modeli ide o proporcionálne zníženie vstupov (projekcia neefektívnej ekonomickej jednotky (x, y) na $(x', y))$, ako je to ilustrované na obr. 1.8.



Obr. 1.8 Projekcia neefektívnej ekonomickej jednotky pri variabilných výnosoch z rozsahu

Analýza obalu intervalových údajov

Model (1) je vhodný vtedy, ak vieme presne odmerať všetky sledované vstupy a výstupy pre každú skúmanú ekonomickú jednotku. Problémom však je, čo v prípade, že je možné merať len s určitou presnosťou (či už z technických príčin alebo pre finančnú náročnosť zberu úplne presných údajov). Táto problematika bola rozpracovaná v (Cooper, Park, Yu, 1999), kde sa zaoberajú modelom efektívnosti pri spojení presných a nepresných dát, avšak jeho riešenie je založené na pridaní „assurance regions“ a prevode na úlohu lineárneho programovania. Keďže takého „pomocné“ podmienky nemusí byť vždy možné získať, v práci rozoberáme vhodnejší prístup, ktorý ponúka Despotis, Smirlis (2002) v modeli (11). V modeli (13) prezentujeme alternatívny model kvôli uľahčeniu výpočtu. Následne veta 3, resp. 3' dokumentuje vzťah medzi riešeniami modelov (11) a (13) a veta 4 vzťah medzi riešeniami modelov (19) a (21).

Majme interval $\langle x_{ij}^L, x_{ij}^U \rangle$. Nech x_{ij} leží v tomto intervale pre každé i, j. Ďalej majme interval $\langle y_{rj}^L, y_{rj}^U \rangle$. Nech y_{rj} leží v tomto intervale pre každé r, j. Pri výpočte efektívnosti ekonomickej jednotky j_0 maximalizujeme účelovú funkciu aj výberom veľkosti vstupov a výstupov z príslušných intervalov. Potom h_{j_0}, t. j. efektívnosť ekonomickej jednotky j_0 vypočítame nasledovne:

$$\left.\begin{aligned}
h_{j_0} &= \max_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \max_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} \sum_{r=1}^{w} u_r y_{rj_0} \\
\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij_0} &= 1 \\
\sum_{r=1}^{w} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} &\le 0, \quad j = 1, \dots, n \\
x_{ij} &\in \left\langle x_{ij}^L, x_{ij}^U \right\rangle \\
y_{rj} &\in \left\langle y_{rj}^L, y_{rj}^U \right\rangle \\
u_r, v_i &\ge \varepsilon, \quad r = 1, \dots, w;\ i = 1, \dots, m
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Model (11) nie je lineárny ani konvexný, pretože účelová funkcia je skalárnym súčinom dvoch premenných $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{y}$ a ohraničenia obsahujú skalárne súčiny premenných $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{y}$. DESPOTIS, SMIRLIS (2002) navrhli vhodnú voľbu $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ z intervalov, ktorá je využitá v modeli (13). Takto na výpočet efektívnosti jednej ekonomickej jednotky postačuje vyriešiť jeden model, v ktorom sú $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ konštanty.

SMIRLIS a DESPOTIS navrhli kvôli linearizácii danej úlohy najprv použiť transformáciu x_{ij} a y_{rj}:

$$\begin{aligned}
x_{ij} &= x_{ij}^L + s_{ij}(x_{ij}^U - x_{ij}^L),\ i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n,\ 0 \leq s_{ij} \leq 1 \\
y_{rj} &= y_{rj}^L + t_{rj}(y_{rj}^U - y_{rj}^L),\ r = 1, \ldots, w;\ j = 1, \ldots, n,\ 0 \leq t_{rj} \leq 1
\end{aligned}$$

Pomocou týchto transformácií, sú premenné x_{ij} a y_{rj} z modelu (11) nahradené novými premennými s_{ij} a t_{rj}. Tie sú už normované, interval $\left\langle x_{ij}^L, x_{ij}^U \right\rangle$ resp. interval $\left\langle y_{rj}^L, y_{rj}^U \right\rangle$ zobrazujú na $\langle 0, 1 \rangle$. Model (11) zostal aj po transformácii nelineárny kvôli súčinu $v_i \cdot s_{ij}$ a $u_r \cdot t_{rj}$. Preto je vhodná transformácia $q_{ij} = v_i \cdot s_{ij}$ a $p_{rj} = u_r \cdot t_{rj}$. Po transformácii pre vážený súčet vstupov jednotky j_0 v modeli (11) platí:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} &= \sum_{i=1}^{m} v_i \left[x_{ij}^L + s_{ij} \left(x_{ij}^U - x_{ij}^L \right) \right] = \\
&= \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^L + v_i s_{ij} \left(x_{ij}^U - x_{ij}^L \right) = \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^L + q_{ij} \left(x_{ij}^U - x_{ij}^L \right)
\end{aligned}$$

kde $0 \leq q_{ij} \leq v_i$, pre každé i a j. Uvedená podmienka vyplýva zo vzťahu $s_{ij} = \frac{q_{ij}}{v_i}$, kde $v_i \geq \varepsilon$ a $0 \leq s_{ij} \leq 1$ pre každé i a j. Podobne vážený súčet výstupov jednotky j má tvar:

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{w} u_r y_{rj} &= \sum_{r=1}^{w} u_r \left[y_{rj}^L + t_{rj} \left(y_{rj}^U - y_{rj}^L \right) \right] = \\
&= \sum_{r=1}^{w} u_r y_{rj}^L + u_r t_{rj} \left(y_{rj}^U - y_{rj}^L \right) = \sum_{r=1}^{w} u_r y_{rj}^L + p_{rj} \left(y_{rj}^U - y_{rj}^L \right)
\end{aligned}$$

s $0 \leq p_{rj} \leq u_r$, pre každé r a j. Pomocou predchádzajúcej transformácie sme dostali lineárny model (12).

Nech platia hore uvedené predpoklady. Potom efektívnosťou jednotky j_0 sa nazýva hodnota h_{j_0} vypočítaná nasledovne:

$$\left.\begin{array}{rcl} h^*_{j_0} & = & \max\limits_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}} \max\limits_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} \left(\sum\limits_{r=1}^{w} u_r y^L_{rj_0} + p_{rj_0} \left(y^U_{rj_0} - y^L_{rj_0} \right) \right) \\ \sum\limits_{i=1}^{m} \left(v_i x^L_{ij_0} + q_{ij_0} \left(x^U_{ij_0} - x^L_{ij_0} \right) \right) & = & 1 \\ \multicolumn{3}{l}{\sum\limits_{r=1}^{w} \left(u_r y^L_{rj} + p_{rj} \left(y^U_{rj} - y^L_{rj} \right) \right) - \sum\limits_{i=1}^{m} \left(v_i x^L_{ij_0} + q_{ij_0} \left(x^U_{ij_0} - x^L_{ij_0} \right) \right) \leq 0,\ j = 1, \ldots, n} \\ p_{rj} - u_r & \leq & 0,\ r = 1, \ldots, w,\ j = 1, \ldots, n \\ q_{ij} - v_i & \leq & 0,\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n \\ u_r, v_i & \geq & \varepsilon,\ r = 1, \ldots, w;\ i = 1, \ldots, m \\ p_{rj}, q_{ij} & \geq & 0,\ r = 1, \ldots, w;\ i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n \end{array}\right\} \quad (12)$$

Model s presnými vstupno-výstupnými dátami sa dá odvodiť ako špeciálny prípad modelu (12). Ak horná a dolná hranica intervalu je rovnaká pre všetky vstupy a výstupy, tak každý interval má nulovú dĺžku. Preto druhý člen sumy vypadne spolu s premennými q_{ij} a p_{rj}. Teda môžeme vynechať podmienky $p_{rj} - u_r \leq 0$ a $q_{ij} - v_i \leq 0$ a model (12) sa zredukuje na model (11). Ak sa horná hranica a dolná hranica intervalu rovnajú len pre niektoré vstupy a výstupy, tak model (12) vie pracovať aj s mixom presných a intervalových hodnôt.

V modeli (12) si musí ekonomická jednotka j_0 určiť nielen váhy, ale aj výšku vstupov a výstupov z príslušných intervalov tak, aby to bolo pre ňu čo najvýhodnejšie. Výška vstupov a výstupov sa určí pomocou premenných q_{ij} a p_{rj}. Konkrétne $q_{ij} = 0$ ($p_{rj} = 0$) vtedy a len vtedy, ak úroveň vstupu i (výstupu r) pre ekonomickú jednotku j je rovná x^L_{ij} (y^L_{rj}). Podobne $q_{ij} = v_i$ ($p_{rj} = u_r$) vtedy a len vtedy, ak úroveň vstupu i (výstupu r) pre jednotku j je rovná x^U_{ij} (y^U_{rj}). Je to možné dokázať na základe vzťahu medzi modelmi (11) a (12).

Pri výpočte efektívnosti použitím modelu (13), ktorý navrhli Despotis a Smirlis (2002), sa výška vstupov a výstupov a im zodpovedajúcich váh nastaví tak, aby boli pre jednotku j_0 čo najvýhodnejšie. Čiže efektívnosť ($h^*_{j_0}$) získaná výpočtom pre jednotku j_0 pomocou modelu (12) nie je horšia (menšia) ako akékoľvek inak vypočítané skóre, ktoré sa dá získať použitím iných vstupov a výstupov pochádzajúcich z príslušných intervalov.

Vyššie uvedené transformácie nám umožňujú explicitne definovať horné a dolné ohraničenia možných skóre efektívnosti, ktoré môže dosianuť jednotka j_0 pri daných intervaloch vstupov a výstupov. Model (13) slúži na výpočet horného limitu a model (21) na výpočet dolného limitu daného intervalu.

Horný limit efektívnosti H_{j_0} je možné vypočítať nasledovne:

$$\left.\begin{array}{rcl} H_{j_0} & = & \max\limits_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} \sum\limits_{r=1}^{w} u_r y_{rj_0}^U \\ \sum\limits_{i=1}^{m} v_i x_{ij_0}^L & = & 1 \\ \sum\limits_{r=1}^{w} u_r y_{rj_0}^U - \sum\limits_{i=1}^{m} v_i x_{ij_0}^L & \leq & 0 \\ \sum\limits_{r=1}^{w} u_r y_{rj}^L - \sum\limits_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^U & \leq & 0, \quad j = 1, \ldots, j_0 - 1, j_0 + 1 \ldots, n \\ u_r, v_i & \geq & \varepsilon, \quad r = 1, \ldots, w;\ i = 1, \ldots, m \end{array}\right\} \quad (13)$$

Model (13) je modelom s presnými dátami, kde je výška vstupov a výstupov zvolená čo najvýhodnejšie pre jednotku j_0 a čo najnevýhodnejšie pre ostatné jednotky. pre hodnotenú jednotku sú zvolené vstupy na úrovni dolnej hranice intervalu a výstup na úrovni hornej hranice intervalu. Pre ostatné jednotky sú vstupy zvolené na úrovni hornej hranice intervalu a výstupy na úrovni dolnej hranice intervalu. Vo vete 3 ukážeme, že $H_{j_0} = h_{j_0}$.

Výhodou modelu (13) oproti modelu (11) je, že sa dá riešiť ako model s presnými dátami, na čo je k dispozícii výpočtový aparát.

Nasledujúcu vetu, ktorá slúži na prechod od modelu (12) k modelu (13), vyslovili a dokázali Despotis a Smirlis (2002):

Veta 3 *Ak $h_{j_0}^*$ a H_{j_0} sú efektívnosti jednotky j_0 získané pomocou modelov (12) a (13), potom platí $h_{j_0}^* = H_{j_0}$.*

Dôkaz.

Najprv si všimnime, že ak $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_s)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_m)$ je prípustným riešením modelu (13), tak rozšírené riešenie $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \mathbf{Q}, \mathbf{P})$, kde:

$$\mathbf{Q} = (q_{ij}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n), \mathbf{P} = (p_{rj}, r = 1, \ldots, w, j = 1, \ldots, n)$$

a

$$q_{ij} = \begin{cases} 0, & j = j_0 \\ v_i, & j \neq j_0 \end{cases}, p_{rj} = \begin{cases} 0, & j \neq j_0 \\ u_r, & j = j_0 \end{cases}$$

je prípustným riešením modelu (12) a $H_{j_0}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = h_{j_0}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \mathbf{Q}, \mathbf{P})$. Teda model (13) možno odvodiť priamo z modelu (12) použitím $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$.

Využitím údajov o vstupoch a výstupoch v modeli (13), ekonomická jednotka j_0 je v najlepšej možnej pozícii k ostatným ekonomickým jednotkám a teda $h_{j_0}^U$ je najvyšším možným efektívnostným skóre, ktoré môže ekonomická jednotka dosiahnúť. Čiže $h^*_{j_0} \leq h^U_{j_0}$. Nech sa teraz $\boldsymbol{u^0} = (u^0_1, \ldots, u^0_s)$, $\boldsymbol{v^0} = (v^0_1, \ldots, v^0_m)$ optimálnym riešením modelu (13) (inými slovami $H_{j_0}(\boldsymbol{u^0}, \boldsymbol{v^0}) = h^U_{j_0}$). Potom rozšírené riešenie $(\boldsymbol{u^0}, \boldsymbol{v^0}, \mathbf{Q}, \mathbf{P})$, kde, vyššie definované, $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{P}$ je prípustným riešením modelu (12) a preto $h_{j_0}(\boldsymbol{u^0}, \boldsymbol{v^0}, \mathbf{Q}, \mathbf{P}) = H_{j_0}(\boldsymbol{u^0}, \boldsymbol{v^0}) = h^U_{j_0} \leq h^*_{j_0}$. Teda $h^U_{j_0} = h^*_{j_0}$.

□

Prechádzajúci dôkaz nie je celkom formálne korektný, pretože autor sa nezaoberal prípadnými zmenami prípustnej množiny. K alternatívnemu dôkazu vety 3' budeme potrebovať ukázať, že efektívnosť h_{j_0} je v závislosti od x_{r_j} $(j \neq j_0)$ neklesajúca, od y_{i_j} $(j \neq j_0)$ nerastúca, od $x_{r_{j_0}}$ nerastúca, od $y_{i_{j_0}}$ neklesajúca, čo dokážeme v nasledujúcich lemách.

Majme úlohu lineárneho programovania:

$$
\begin{aligned}
h_{j_0} &= \max_{u,v} \sum_{r=1}^{w} y_{rj_0} u_r && (14)\\
\sum_{i=1}^{m} x_{ij_0} v_i &= 1 && (15)\\
\sum_{r=1}^{w} y_{rj} u_r - \sum_{i=1}^{m} x_{ij} v_i &\leq 0 \quad j = 1, \ldots, n && (16)\\
u_r &\geq 0 \quad r = 1, \ldots, w && (17)\\
v_i &\geq 0 \quad i = 1, \ldots, m && (18)
\end{aligned}
$$

Označme pre $j = 1, \ldots, n$

$$
\begin{aligned}
A_j = \Big\{(u, v) : &\sum_{r=1}^{w} y_{rj} u_r - \sum_{i=1}^{m} x_{ij} v_i \leq 0, u_r \geq 0,\ r = 1, \ldots, w,\\
&v_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, m\Big\}
\end{aligned}
$$

Nech $A_0 = \left\{(u, v) : \sum_{i=1}^{m} x_{ij_0} v_i = 1\right\}$.

Prípustnú množinu danú podmienkami (15)–(18) označme A. Zrejme $A = \bigcap_{k=0}^{n} A_k$.

Lema 1 *Pre každé $r_0 = 1, \ldots, w$ a každé $j = 1, \ldots, j_0 - 1, j_0 + 1, \ldots, n$ je h_{j_0} v modeli (14)–(18) nerastúce v závislosti od $y_{r_0 j}$.*

Dôkaz.

Fixujme r_0 a $j \neq j_0$ pevné. Predpokladajme, že máme hodnoty $y_{r_0 j}$ a $y'_{r_0 j}$ také, že $y'_{r_0 j} > y_{r_0 j}$.

Nech

$$
\begin{aligned}
A'_j \quad &= \quad \Big\{(u,v) : \sum_{\substack{r=1\\ r\neq r_0}}^{w} y_{rj}u_r + y'_{r_0j}u_{r_0} - \sum_{i=1}^{m} x_{ij}v_i \leq 0, u_r \geq 0,\ r = 1,\dots,w,\\
&\qquad v_i \geq 0,\ i = 1,\dots,m\Big\}
\end{aligned}
$$

Nech $A' = \bigcap\limits_{\substack{k=0\\ k\neq j}}^{n} A_k \cap A'_j$. V modeli (14)–(18) pre všetky $r = 1,\dots,w$, pre všetky $m = 1,\dots,m$, pre všetky $j = 1,\dots,n$ parametre sú x_{ij}, y_{rj} nezáporné a z definície modelu platí, že u_r, v_i sú tiež nezáporné.

$$
\begin{aligned}
&\left(y_{r_0j} < y'_{r_0j}\right) \Rightarrow \left(y_{r_0j}u_{r_0} \leq y'_{r_0j}u_{r_0}\right) \Rightarrow\\
&\left(\sum_{r=1}^{w} y_{rj}u_r - \sum_{i=1}^{m} x_{ij}v_i \leq \sum_{\substack{r=1\\ r\neq r_0}}^{w} y_{rj}u_r + y'_{r_0j}u_{r_0} - \sum_{i=1}^{m} x_{ij}v_i \leq 0\right), \text{ teda } \left(A_j \supseteq A'_j\right)
\end{aligned}
$$

Ďalej

$$
\left(\forall A_j \supseteq A'_j\right) \left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right) \supseteq \left(\bigcap_{\substack{k=0\\ k\neq j}}^{n} A_k \cap A'_j\right), \text{ teda } A \supseteq A'
$$

Prípustná množina sa pri zväčšení parametra y_{r_0j} nezväčšila ($A' \subseteq A$), účelová funkcia ostala nezmenená, $\max\limits_{A} \sum\limits_{r=1}^{w} y_{rj_0}u_r \geq \max\limits_{A'} \sum\limits_{r=1}^{w} y_{rj_0}u_r$, teda h_{j_0} je nerastúce v závislosti od $y_{r_0j}, r_0 = 1,\dots,w, j = 1,\dots,j_0-1,j_0+1,\dots,n$.

□

Lema 2 *Pre každé* $i_0 = 1,\dots,m$ *a každé* $j = 1,\dots,j_0-1,j_0+1,\dots,n$ *je* h_{j_0} *v modeli (14)–(18) neklesajúce v závislosti od* x_{i_0j}.

Dôkaz.

Fixujme i_0 a $j \neq j_0$ pevné. Predpokladajme, že máme hodnoty x_{i_0j} a x'_{i_0j} také, že $x'_{i_0j} > x_{i_0j}$. Nech

$$
\begin{aligned}
A'_j \quad &= \quad \Big\{(u,v) : \sum_{r=1}^{w} y_{rj}u_r - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{m} x_{ij}v_i - x'_{i_0j}v_{i_0} \leq 0, u_r \geq 0,\ r = 1,\dots,w,\\
&\qquad v_i \geq 0, i = 1,\dots,m\Big\}
\end{aligned}
$$

Nech $A' = \bigcap\limits_{\substack{k=0\\ k\neq j}}^{n} A_k \cap A'_j$. V modeli (14)–(18) pre všetky $r = 1,\dots,w$, pre všetky $m = 1,\dots,m$, pre všetky $j = 1,\dots,n$ parametre sú x_{ij}, y_{rj} nezáporné a z definície modelu platí, že u_r, v_i sú nezáporné.

$$\left(x_{i_0j} < x'_{i_0j}\right) \Rightarrow \left(x_{i_0j}v_{i_0} \leq x'_{i_0j}v_{i_0}\right) \Rightarrow$$
$$\left(\sum_{r=1}^{w} y_{rj}u_r - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq i_0}}^{m} x_{ij}v_i - x'_{i_0j}v_{i_0} \leq \sum_{r=1}^{w} y_{rj}u_r - \sum_{i=1}^{m} x_{ij}v_i \leq 0\right), \text{ teda } \left(A_j \subseteq A'_j\right)$$

Ďalej

$$(\forall A_j \subseteq A'_j) \left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right) \subseteq \left(\bigcap_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n} A_k \cap A'_j\right), \text{ teda } A \subseteq A'$$

Prípustná množina sa pri zväčšení parametra x_{i_0j} nezmenšila ($A' \supseteq A$), účelová funkcia ostala nezmenená, $\max_{A} \sum_{r=1}^{w} y_{rj_0}u_r \leq \max_{A'} \sum_{r=1}^{w} y_{rj_0}u_r$, teda h_{j_0} je neklesajúce v závislosti od $x_{i_0j}, i_0 = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, j_0 - 1, j_0 + 1, \ldots, n$.

□

Lema 3 *Pre každé $r_0 = 1, \ldots, w$ je h_{j_0} v modeli (14)–(18) neklesajúce v závislosti od $y_{r_0j_0}$.*

Dôkaz.
Ohraničenie $\sum_{r=1}^{w} y_{rj_0}u_r - \sum_{i=1}^{m} x_{ij_0}v_i \leq 0$ môže byť splnené v optimálnom riešení (14)–(18) ako rovnosť (prípad 1) alebo nerovnosť (prípad 2). Majme hodnoty $y_{r_0j_0}$, $y'_{r_0j_0}$ a $y''_{r_0j_0}$ také, že $y'_{r_0j_0} < y_{r_0j_0} < y''_{r_0j_0}$.

Nech

$$A'_{j_0} = \Big\{(u,v) : \sum_{\substack{r=1 \\ r\neq r_0}}^{w} y_{rj_0}u_r + y'_{r_0j_0}u_{r_0} - \sum_{i=1}^{m} x_{ij_0}v_i \leq 0, u_r \geq 0,\ r = 1, \ldots, w,$$
$$v_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, m\Big\}$$

Nech

$$A''_{j_0} = \Big\{(u,v) : \sum_{\substack{r=1 \\ r\neq r_0}}^{w} y_{rj_0}u_r + y''_{r_0j_0}u_{r_0} - \sum_{i=1}^{m} x_{ij_0}v_i \leq 0, u_r \geq 0,\ r = 1, \ldots, w,$$
$$v_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, m\Big\}$$

Nech $A' = \bigcap_{\substack{k=0 \\ k\neq j_0}}^{n} A_k \cap A'_{j_0}$ a $A'' = \bigcap_{\substack{k=0 \\ k\neq j_0}}^{n} A_k \cap A''_{j_0}$.

- Prípad 1: ohraničenie $\sum\limits_{r=1}^{w} y_{rj_0}u_r - \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij_0}v_i \leq 0$ je splnené v optimálnom riešení (14)–(18) ako rovnosť, čiže $\sum\limits_{r=1}^{w} y_{rj_0}u_r - \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij_0}v_i = 0$, teda $\sum\limits_{r=1}^{w} y_{rj_0}u_r = \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij_0}v_i$

  Z (15) máme, že $\sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij_0}v_i = 1$, po dosadení $\sum\limits_{r=1}^{w} y_{rj_0}u_r = \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij_0}v_i = 1$, teda h_{j_0} $= 1$

  V modeli (14)–(18) pre všetky $r = 1, \ldots, w$, pre všetky $m = 1, \ldots, m$, pre všetky $j = 1, \ldots, n$ parametre sú x_{ij}, y_{rj} nezáporné a z definície modelu platí, že u_r, v_i sú nezáporné.

  - Prípad 1a: $y'_{r_0j_0} < y_{r_0j_0}$ ($y_{r_0j_0}$ sa zmenšilo)

    Z podmienky (16) (pre $j = j_0$) v modeli (14)–(18) je zrejmé, že účelová funkcia je zhora ohraničená hodnotou 1. Z toho vyplýva, že pre všetky $y'_{r_0j_0} < y_{r_0j_0}$ je $h'_{j_0} \leq 1 = h_{j_0}$.

  - Prípad 1b: $y_{r_0j_0} < y''_{r_0j_0}$ ($y_{r_0j_0}$ sa zväčšilo)

    $$\left(y_{r_0j_0} < y''_{r_0j_0}\right) \Rightarrow \left(y_{r_0j_0}u_{r_0} \leq y''_{r_0j_0}u_{r_0}\right) \Rightarrow$$
    $$\left(\sum_{r=1}^{w} y_{rj_0}u_r - \sum_{i=1}^{m} x_{ij_0}v_i \leq \sum_{\substack{r=1\\r\neq r_0}}^{w} y_{rj_0}u_r + y''_{r_0j_0}u_{r_0} - \sum_{i=1}^{m} x_{ij_0}v_i \leq 0\right),$$
    teda $\left(A_{j_0} \supseteq A''_{j_0}\right)$

    Ďalej

    $$\left(\forall A_{j_0} \supseteq A''_{j_0}\right)\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right) \supseteq \left(\bigcap_{\substack{k=0\\k\neq j_0}}^{n} A_k \cap A''_{j_0}\right), \text{ teda } A \supseteq A''$$

    Prípustná množina sa pri zväčšení parametra $y_{r_0j_0}$ nezväčšila ($A'' \subseteq A$), ale obmedzenie $\sum\limits_{\substack{r=1\\r\neq r_0}}^{w} y_{rj_0}u_r + y''_{r_0j_0}u_{r_0} - \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij_0}v_i \leq 0$ je naďalej splnené ako rovnosť, teda $h_{j_0} = \sum\limits_{\substack{r=1\\r\neq r_0}}^{w} y_{rj_0}u_r + y''_{r_0j_0}u_{r_0} = \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij_0}v_i = 1$ pre $y''_{r_0j_0} \geq y_{r_0j_0}, r_0 = 1, \ldots, w$.

- Prípad 2: ak ohraničenie $\sum\limits_{r=1}^{w} y_{rj_0}u_r - \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij_0}v_i \leq 0$ nie je rovnosťou v optimálnom riešení (14)–(18), čiže $\sum\limits_{r=1}^{w} y_{rj_0}u_r - \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij_0}v_i < 0$, tak $\bigcap\limits_{\substack{k=0\\k\neq j_0}}^{n} A_k$ je vlastnou podmnožinou A_{j_0}. $A = \bigcap_{k=0}^{n} A_k \subset \bigcap_{\substack{k=0\\k\neq j_0}}^{n} A_k \subsetneq A_{j_0}$, čiže obmedzenie príslušné A_{j_0} je redundantné pri vymedzení A.

V modeli (14)–(18) pre všetky $r = 1, \ldots, w$, pre všetky $m = 1, \ldots, m$, pre všetky $j = 1, \ldots, n$ parametre sú x_{ij}, y_{rj} nezáporné a z definície modelu platí, že u_r, v_i sú nezáporné.

– Prípad 2a: $y'_{r_0 j_0} < y_{r_0 j_0}$ ($y_{r_0 j_0}$ sa zmenšilo)

$$\left(y'_{r_0 j_0} < y_{r_0 j_0}\right) \Rightarrow \left(y'_{r_0 j_0} u_{r_0} \leq y_{r_0 j_0} u_{r_0}\right) \Rightarrow$$
$$\left(\sum_{\substack{r=1\\r\neq r_0}}^{w} y_{rj_0} u_r + y'_{r_0 j_0} u_{r_0} - \sum_{i=1}^{m} x_{ij_0} v_i \leq \sum_{r=1}^{w} y_{rj_0} u_r - \sum_{i=1}^{m} x_{ij_0} v_i \leq 0\right),$$
$$\text{teda } \left(A'_{j_0} \supseteq A_{j_0}\right)$$

Pre $y'_{r_0 j_0} < y_{r_0 j_0}$ je $A'_{j_0} \supseteq A_{j_0}$. Keďže $A \subsetneq A_{j_0}$, tak $A \subsetneq A'_{j_0}$. Teda prípustná množina sa nemení, účelová funkcia pre $y'_{r_0 j_0} < y_{r_0 j_0}$ je $\sum_{\substack{r=1\\r\neq r_0}}^{w} y_{rj_0} u_r + y'_{r_0 j_0} u_{r_0} \leq \sum_{r=1}^{w} y_{rj_0} u_r$. Inými slovami pre $y'_{r_0 j_0} < y_{r_0 j_0}$ je $h'_{j_0} \leq h_{j_0}$.

– Prípad 2b: $y_{r_0 j_0} < y''_{r_0 j_0}$ ($y_{r_0 j_0}$ sa zväčšilo)

$$\left(y_{r_0 j_0} < y''_{r_0 j_0}\right) \Rightarrow \left(y_{r_0 j_0} u_{r_0} \leq y''_{r_0 j_0} u_{r_0}\right) \Rightarrow$$
$$\left(\sum_{r=1}^{w} y_{rj_0} u_r - \sum_{i=1}^{m} x_{ij_0} v_i \leq \sum_{\substack{r=1\\r\neq r_0}}^{w} y_{rj_0} u_r + y''_{r_0 j_0} u_{r_0} - \sum_{i=1}^{m} x_{ij_0} v_i \leq 0\right),$$
$$\text{teda } \left(A_{j_0} \supseteq A''_{j_0}\right)$$

Ďalej

$$\left(\forall A_{j_0} \supseteq A''_{j_0}\right) \left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right) \supseteq \left(\bigcap_{\substack{k=0\\k\neq j_0}}^{n} A_k \cap A''_{j_0}\right), \text{ teda } A \supseteq A''$$

Ak $A'' \subseteq A$ tak buď $A'' = A$ alebo $A'' \subsetneq A$.

Ak $A'' = A$, čiže prípustná množina ostala nezmenená, pre $y_{r_0 j_0} < y''_{r_0 j_0}$ je $\sum_{r=1}^{w} y_{rj_0} u_r \leq \sum_{\substack{r=1\\r\neq r_0}}^{w} y_{rj_0} u_r + y''_{r_0 j_0} u_{r_0}$. Inými slovami pre $y_{r_0 j_0} < y''_{r_0 j_0}$ je $h_{j_0} \leq h''_{j_0}$.

Ak $A'' \subsetneq A$ mohol nastať, len ak obmedzenie príslušné A''_{j_0} nie je redundantné pri vymedzení A'', čiže podmienka $\sum_{\substack{r=1\\r\neq r_0}}^{w} y_{rj_0} u_r + y''_{r_0 j_0} u_{r_0} - \sum_{i=1}^{m} x_{ij_0} v_i \leq 0$ je splnená ako rovnosť, preto $h''_{j0} = \sum\limits_{\substack{r=1 \\ r \neq r_0}}^{w} y_{rj0} u_r + y''_{r_0 j_0} u_{r0} = \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij0} v_i = 1$. Inými slovami pre $y_{r_0 j_0} < y''_{r_0 j_0}$ je $h_{j_0} \leq 1 = h''_{j0}$.

V prípade 1 i 2 je h_{j_0} neklesajúce ako funkcia $y_{r_0 j_0}, r_0 = 1, \dots, w$.

□

Lema 4 *Pre každé $i_0 = 1, \dots, m$ je h_{j_0} v modeli (14)–(18) nerastúce v závislosti od $x_{i_0 j_0}$.*

Dôkaz je analogický dôkazu lemy 3.

Veta 3' *Ak h_{j_0} a H_{j_0} sú efektívnosti jednotky j_0 získané pomocou modelov (11) a (13), potom platí $h_{j_0} = H_{j_0}$.*

Vo vete 3 autori ukázali ekvivalenciu modelov (12) a (13). My však vo vete 3' ukážeme ekvivalenciu modelov (11) a (13), pričom prechod medzi modelom (11) a (12) je zrejmý.

Dôkaz.

Pre každé x_{ij}, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ a pre každé y_{rj}, $r = 1, \dots, w$, $j = 1, \dots, n$ z modelu (11) je $x_{ij} \in \langle x^L_{ij}, x^U_{ij} \rangle$, $y_{rj} \in \langle y^L_{rj}, y^U_{rj} \rangle$. Na základe predchádzajúcich tvrdení ukážeme, že maximum funkcie h_{j_0} cez $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ môžeme hľadať v jednom bode $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

Keďže h_{j_0} je v závislosti od x_{r_j} $(j \neq j_0)$ neklesajúca (podľa lemy 2), vyberieme maximum z príslušného definičného oboru, teda vyberieme $(\forall j \neq j_0)$ $i = 1, \dots, m$, $x_{ij} = x^U_{ij}$. Efektívnosť h_{j_0} je ďalej v závislosti od y_{i_j} $(j \neq j_0)$ nerastúca (podľa lemy 1), čiže vyberieme $(\forall j \neq j_0)$ $r = 1, \dots, w$, $y_{rj} = y^L_{rj}$. Efektívnosť h_{j_0} je v závislosti od $x_{r_{j_0}}$ nerastúca (podľa lemy 4), čiže vyberieme $i = 1, \dots, m$, $x_{ij_0} = x^L_{ij_0}$. Efektívnosť h_{j_0} je v závislosti od $y_{i_{j_0}}$ neklesajúca (podľa lemy 3), teda vyberieme $r = 1, \dots, w$, $y_{rj_0} = y^U_{rj_0}$.

Z definičného oboru sa stačí zaoberať bodom $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) : (\forall j \neq j_0)\, i = 1, \dots, m$, $x_{ij} = x^U_{ij}$; $i = 1, \dots, m$, $x_{ij_0} = x^L_{ij_0}$; $(\forall j \neq j_0)$ $r = 1, \dots, w$, $y_{rj} = y^L_{rj}$; $r = 1, \dots, w$, $y_{rj_0} = y^U_{rj_0}$, čo nám umožňuje prejsť od modelu (11), ktorý nebol lineárny ani konvexný, lebo účelová funkcia bola skalárnym súčinom dvoch premenných $\boldsymbol{y}$ a $\boldsymbol{u}$ a ohraničenia obsahovali skalárne súčiny premenných $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{y}$, k modelu (13), ktorý je už lineárny.

□

Pri výpočte dolnej hranice efektívnosti ekonomickej jednotky j_0 minimalizujeme účelovú funkciu výberom veľkosti vstupov a výstupov z príslušných intervalov. Potom f_{j_0}, t. j. dolnú hranicu možnej efektívnosti ekonomickej jednotky j_0 vypočítame nasledovne:

$$\left.\begin{aligned}
f_{j_0} &= \min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \max_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} \sum_{r=1}^{w} u_r y_{rj_0} \\
\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij_0} &= 1 \\
\sum_{r=1}^{w} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} &\leq 0, \quad j = 1, \ldots, n \\
x_{ij} &\in \left\langle x_{ij}^L, x_{ij}^U \right\rangle \\
y_{rj} &\in \left\langle y_{rj}^L, y_{rj}^U \right\rangle \\
u_r, v_i &\geq \varepsilon, \quad r = 1, \ldots, w;\ i = 1, \ldots, m
\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Pomocou transformácií, ktoré boli použité na transformáciu modelu (11) a (12), dostaneme model (20).

$$\left.\begin{aligned}
f_{j_0}^* &= \max_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}} \min_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} \left(\sum_{r=1}^{w} u_r y_{rj_0}^L + p_{rj_0}\left(y_{rj_0}^U - y_{rj_0}^L\right)\right) \\
\sum_{i=1}^{m}\left(v_i x_{ij_0}^L + q_{ij_0}\left(x_{ij_0}^U - x_{ij_0}^L\right)\right) &= 1 \\
\sum_{r=1}^{w}\left(u_r y_{rj}^L + p_{rj}\left(y_{rj}^U - y_{rj}^L\right)\right) - \sum_{i=1}^{m}\left(v_i x_{ij_0}^L + q_{ij_0}\left(x_{ij_0}^U - x_{ij_0}^L\right)\right) &\leq 0,\ j = 1, \ldots, n \\
p_{rj} - u_r &\leq 0,\ r = 1, \ldots, w;\ j = 1, \ldots, n \\
q_{ij} - v_i &\leq 0,\ i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n \\
u_r, v_i &\geq \varepsilon,\ r = 1, \ldots, w;\ i = 1, \ldots, m \\
p_{rj}, q_{ij} &\geq 0,\ r = 1, \ldots, w;\ i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n
\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Model (21) je modelom s presnými dátami. Na rozdiel od modelu (20) sa pre skúmanú jednotku j_0 nastavia úrovne vstupov a výstupov čo najnepriaznivejšie a úrovne vstupov a výstupov ostatných jednotiek čo najpriaznivejšie. Pre jednotku j_0 sa zvolí výška vstupov na úrovni hornej hranice intervalu a výška výstupov na úrovni dolnej hranice intervalu. Pre ostatné sú zvolené vstupy na úrovni dolnej hranice intervalu a výstupy na úrovni hornej hranice intervalu. Tým činom sa jednotka j_0 ukáže v najhoršom možnom svetle v porovnaní s ostatnými jednotkami. Preto efektívnosť získaná z modelu (21) (označme ju F_{j_0}) slúži ako dolná hranica možných skóre efektívnosti. Čiže modely (13) a (21) slúžia na zostrojenie intervalu $\left\langle h_j^L, h_j^U \right\rangle$, v ktorom leží efektívnosť, ktorú by sme vypočítali, keby sme mali presné dáta.

$$\left.\begin{array}{rcl}
F_{j_0} & = & \max\limits_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} \sum\limits_{r=1}^{w} u_r y_{rj_0}^L \\
\sum\limits_{i=1}^{m} v_i x_{ij_0}^U & = & 1 \\
\sum\limits_{r=1}^{w} u_r y_{rj_0}^L - \sum\limits_{i=1}^{m} v_i x_{ij_0}^U & \leq & 0 \\
\sum\limits_{r=1}^{w} u_r y_{rj}^U - \sum\limits_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^L & \leq & 0, \quad j = 1, \ldots, j_0 - 1, j_0 + 1, \ldots n \\
u_r, v_i & \geq & \varepsilon, \quad r = 1, \ldots, w; \; i = 1, \ldots, m
\end{array}\right\} (21)$$

Veta 4 *Ak f_{j_0} a F_{j_0} sú efektívnosti jednotky j_0 získané z modelov (19) a (21), potom platí $f_{j_0} = F_{j_0}$.*

Dôkaz.

Pre každé x_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ a pre každé y_{rj}, $r = 1, \ldots, w$, $j = 1, \ldots, n$ z modelu (19) je $x_{ij} \in \langle x_{ij}^L, x_{ij}^U \rangle$, $y_{rj} \in \langle y_{rj}^L, y_{rj}^U \rangle$. Na základe skôr uvedených tvrdení môžeme minimum funkcie h_{j_0} cez $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ môžeme hľadať v jednom bode $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

Keďže h_{j_0} je v závislosti od x_{r_j} $(j \neq j_0)$ neklesajúca (podľa lemy 2), vyberieme minimum z príslušného definičného oboru, teda vyberieme $(\forall j \neq j_0)$ $i = 1, \ldots, m$, $x_{ij} = x_{ij}^L$. Efektívnosť h_{j_0} je ďalej v závislosti od y_{i_j} $(j \neq j_0)$ nerastúca (podľa lemy 1), čiže vyberieme $(\forall j \neq j_0)$ $r = 1, \ldots, w$, $y_{rj} = y_{rj}^U$. Efektívnosť h_{j_0} je v závislosti od $x_{r_{j_0}}$ nerastúca (podľa lemy 4), čiže vyberieme $i = 1, \ldots, m$, $x_{ij_0} = x_{ij_0}^U$. Efektívnosť h_{j_0} je v závislosti od $y_{i_{j_0}}$ neklesajúca (podľa lemy 3), teda vyberieme $r = 1, \ldots, w$, $y_{rj_0} = y_{rj_0}^L$.

Z definičného oboru sa stačí zaoberať bodom $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) : (\forall j \neq j_0)\, i = 1, \ldots, m$, $x_{ij} = x_{ij}^U$; $i = 1, \ldots, m$, $x_{ij_0} = x_{ij_0}^U$; $(\forall j \neq j_0)$ $r = 1, \ldots, w$, $y_{rj} = y_{rj}^L$; $r = 1, \ldots, w$, $y_{rj_0} = y_{rj_0}^L$, čo nám umožňuje prejsť od modelu (19), ktorý nebol lineárny, ani konvexný, lebo účelová funkcia bola skalárnym súčinom dvoch premenných $\boldsymbol{y}$ a $\boldsymbol{u}$ a ohraničenia obsahovali skalárne súčiny premenných $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{y}$, k modelu (21), ktorý je už lineárny.

$\square$

3 Analýza obalu neúplných údajov

V doteraz spomínaných modeloch sa stále predpokladalo, že všetky údaje o vstupoch a výstupoch sú (viac či menej presne) známe. V prípade, že niektorý údaj nie je dostupný, musí sa použiť zástupná (crisp) hodnota, aby sa stal model prípustným. Pri tomto zjednodušení sa stráca istá časť informácie.

Predpokladajme, že nie je známy r-tý výstup j_0-tej ekonomickej jednotky, čiže y_{rj_0} je chýbajúce. Základné prístupy na riešenie tohto zahŕňajú vynechanie j_0-tej ekonomickej jednotky alebo vynechanie r-tého výstupu z analýzy. Zamerajme sa ďalšie dve možnosti:

1. vynechanie r-tého výstupu pri výpočte efektívnosti j_0-tej ekonomickej jednotky (ale využitie všetkých výstupov, vrátane r-tého výstupu, pri výpočte efektívnosti všetkých ostatných ekonomických jednotiek),

2. priradenie $y_{rj_0} = 0$.

Prístupy 1 a 2 sú ekvivalentné v zmysle, že pre všetky ekonomické jednotky dávajú rovnaké hodnoty efektívnosti (Kuosmanen, 2002).

Nech $y_{rj_0} = 0$. Z predpokladu, že každá ekonomická jednotka vyprodukuje kladné množstvo aspoň jedného výstupu, bez ujmy na všeobecnosti nech je to i-tý výstup ($y_{ij_0} > 0$), hodnota $\sum\limits_{k=1}^{w} y_{kj_0} u_k$ sa zväčšuje pri presúvaní váhy z r-tého výstupu na i-tý výstup. Takže pre optimálne váhy výstupov bude stále platiť, že $u_r^* = 0$. Odtiaľ je zrejmé, že r-tý výstup neovplyvňuje efektívnosť, t.j. oba prístupy vylučujú r-tý výstup z výpočtu efektívnosti.

Predpokladajme, že nie je známy i-tý vstup j_0-tej ekonomickej jednotky, čiže x_{ij_0} je chýbajúce. Pri analýze možno vynechať j_0-tú ekonomickú jednotku alebo i-tý vstup. Zamerajme sa dve možnosti:

3. vynechanie i-tého vstupu pri výpočte efektívnosti j_0-tej ekonomickej jednotky (ale využitie všetkých vstupov, vrátane i-tého vstupu, pri výpočte efektívnosti všetkých ostatných ekonomických jednotiek),

4. priradenie $x_{ij_0} = M$, $M \gg \max_{i,j}\{x_{ij}\}$.

Prístupy 3 a 4 sú ekvivalentné v zmysle, že pre všetky ekonomické jednotky dávajú rovnaké hodnoty efektívnosti.

Nech $x_{ij_0} = M$. Keďže $M \geq \max_i\{x_{ij_0}\}$ a a hodnota $\sum_{k=1}^{m} x_{kj_0} v_k$ sa nezväčšuje pri presúvaní váhy z i-tého vstupu na r-tý vstup ($i \neq r$).

Takže pre optimálne váhy vstupov bude stále platiť, že $v_i^* = 0$. Odtiaľ je zrejmé, že i-tý vstup neovplyvňuje efektívnosť, t.j. oba prístupy vylučujú i-tý vstup z výpočtu efektívnosti.

Druhý a štvrtý z týchto prístupov sú výhodnejšie z toho pohľadu, že nevyžadujú zásah do už existujúceho softvéru na výpočet analýzy obalu údajov. Hoci v druhom prístupe predstavuje nula zástupnú hodnotu pre prázdnu hodnotu, má zároveň aj zmysluplnú interpretáciu.

Pri analýzach niektorých problémov nemusí byť prípustný práve popísaný postup, pri ktorom môže ekonomická jednotka skryť svoj slabý výkon v niektorej zložke priradením nenulových váh iba ostatným zložkám. Môže byť opodstatnená požiadavka, aby sa vo výpočte efektívnosti prejavili všetky dáta. V súčasnosti sa pri mnohých analýzach kladú dodatočné externé obmedzenia na flexibilitu váh. Ich prehľad sa nachádza napr. v (Allen a i., 1997). Keďže váhy vstupov hodnotenej ekonomickej jednotky pri vstupne orientovaných modeloch sú normované, aby $\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij_0} = 1$ a pre váhy výstupov pri výstupne orientovaných modeloch platí $\sum_{r=1}^{w} u_r y_{rj_0} = 1$, obmedzenie absolútnej úrovne váh vstupov a výstupov obvykle nemá zmysel. Štandardnou metódou modelovania týchto obmedzení je zavedenie podmienok v tvare podielu

$$a_{hi} \leq \frac{u_h}{u_i} \leq b_{hi}, \quad 0 < a_{hi} < b_{hi} < 1, \tag{22}$$

ktoré charakterizujú prípustný interval pre váhy h-tého výstupu vzhľadom na váhy i-tého výstupu.

Vyššie uvedené tvrdenie neplatí pri použití zástupných hodnôt 0 a M pre chýbajúce výstupy a vstupy pri zavedení takýchto obmedzení na váhy vstupov a výstupov. Nielenže dodatočné obmedzenia limitujú možnosť ekonomickej jednotky nebrať pri výpočte efektívnosti do úvahy niektoré („nepríjemné“) vstupy a výstupy, ale tiež priraďuje zástupným hodnotám chýbajúcich vstupov a výstupov kladné váhy.

K tomu, aby platilo aj pri zavedení obmedzení na váhy pri chýbajúcich hodnotách, je nutné upustiť od obmedzení pre chýbajúce hodnoty. Čiže

$$a_{hi} \leq \frac{u_h}{u_i} \leq b_{hi}, \quad \text{pre } h, i \notin \mathbf{D}, \tag{23}$$

kde $\mathbf{D}$ je množina indexov chýbajúcich výstupov. Je to síce možné uplatniť pri výpočte efektívnosti pre každú ekonomickú jednotku osobitne, ale pri väčšom počte chýbajúcich hodnôt to nemusí byť časovo efektívne. Rýchlejší postup popisuje veta 5 (Kuosmanen, 2002).

Veta 5 *Obmedzenia váh $a_{hi} \leq \frac{u_h}{u_i} \leq b_{hi}, \quad$ pre $h, i \notin \mathbf{D}$, kde $\mathbf{D}$ je množina indexov chýbajúcich výstupov je možné ekvivalentne modelovať ako dvojicu nerovností:*

$$\begin{array}{c} (u_h - a_{hi}u_i) \cdot (y_{ik} \cdot y_{hk}) \geq 0 \\ (u_h - b_{hi}u_i) \cdot (y_{ik} \cdot y_{hk}) \leq 0 \end{array} \tag{24}$$

Dôkaz.

Z pôvodnej podmienky $a_{hi} \leq \frac{u_h}{u_i} \leq b_{hi}, \quad 0 < a_{hi} < b_{hi} < 1$ dostávame nerovnosti $(u_h - a_{hi}u_i) \geq 0$ a $(u_h - b_{hi}u_i) \leq 0$. Tie prenásobíme súčinom $y_{ik} \cdot y_{hk}$, čo je možné považovať za exogénnu konštantu. Ak chýba h-tý alebo i-tý výstup, potom $y_{ik} \cdot y_{hk} = 0$ a teda podmienky

$$(u_h - a_{hi}u_i) \cdot (y_{ik} \cdot y_{hk}) \geq 0$$

$$(u_h - b_{hi}u_i) \cdot (y_{ik} \cdot y_{hk}) \leq 0$$

platia pre všetky u (špeciálne aj pre $u = 0$).

Ak $y_{ik} \cdot y_{hk} > 0$, tak podmienky (24) predstavujú rovnaké obmedzenie ako (22).

$\square$

Výsledky vety 5 nezávisia na orientácii modelu alebo type výnosov z rozsahu. Analogicky je možné dokázať podobnú vetu aj pre chýbajúce vstupy. Nech M je zástupná hodnota, $M \gg \max_{i,j}\{x_{ij}\}$. Podmienku typu

$$a_{hi} \leq \frac{v_h}{v_i} \leq b_{hi}, \quad \text{pre } h, i \notin \mathbf{D} \tag{25}$$

kde $\mathbf{D}$ je množina indexov chýbajúcich vstupov, je možné ekvivalentne modelovať ako dvojicu nerovností

$$\begin{array}{c} (v_h - a_{hi}v_i) \cdot (M - x_{jk}) \cdot (M - x_{hk}) \geq 0 \\ (v_h - b_{hi}v_i) \cdot (M - x_{jk}) \cdot (M - x_{hk}) \leq 0 \end{array} \tag{26}$$

Ak chýba h-tý alebo i-tý vstup, potom $y_{ik} \cdot y_{hk} = 0$ a teda obe nerovnosti platia pre všetky váhy v, čiže sa stanú redundantnými. Ak je známy h-tý aj i-tý vstup, tak (26) je ekvivalentné (25).

Alternatívnou možnosťou je reprezentovať neurčité údaje pomocou charakteristických funkcií fuzzy množín (Zadeh, 1978), (Zimmermann, 1996). Charakteristická funkcia prezentuje subjektívnu úroveň stupňa výskytu javu. Intuitívne, ak pozorovanie je neurčité, potom aj efektívnosť relevantnej jednotky je neurčitá. Naviac ak jednotka leží na hranici produkčných možností, potom efektívnosť jednotiek, pre ktoré vystupuje ako referenčná jednotka, je tiež neurčitá.

Pokiaľ chýba údaj o vstupe x_{ij} resp. výstupe y_{rj} niektorej jednotky, je možné ho reprezentovať fuzzy množinou $\overline{X}_{ij}$ resp. $\overline{Y}_{rj}$ s charakteristickou funkciou $\mu_{\overline{X}_{ij}}$ resp. $\mu_{\overline{Y}_{rj}}$. Chýbajúca hodnota sa dá získať konzultáciou s expertmi, ktorí určia najmenšiu, najväčšiu a najpravdepodobnejšiu hodnotu. Po nahradení všetkých chýbajúcich hodnôt takýmto spôsobom je možné použiť fuzzy analýzu obalu údajov, ktorú vytvoril Kao a Liu (1999). Podľa Zadehovho rozširujúceho princípu (Zadeh, 1978), (Zimmermann, 1996) sa dá charakteristická funkcia efektívnosti jednotky j_0 definovať ako

$$\mu_{\overline{h}_{j_0}}(z) = \sup_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \min\{\mu_{\overline{X}_{ij}}(x_{ij}), \mu_{\overline{Y}_{rj}}(y_{rj}), \forall i, j, k | h_{j_0}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\}$$

kde $h_{j_0}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ sa vypočíta podľa modelu (11).

Pri nedostupnosti experta resp. pri snahe vychádzať z experimentálne nameraných dát sa odporúča ako dolný odhad vziať stĺpcové minimum, čiže $x^L_{ij_0} = \min_j\{x_{ij}\}$ resp. $y^L_{rj_0} = \min_j\{y_{rj}\}$, ako horný odhad sa dá použiť stĺpcové maximum $x^U_{ij_0} = \max_j\{x_{ij}\}$ resp. $y^U_{rj_0} = \max_j\{y_{rj}\}$ a ako najpravdepodobnejšia hodnota stĺpcový medián, čiže $x^M_{ij_0} = \operatorname{median}_j\{x_{ij}\}$ resp. $y^M_{rj_0} = \operatorname{median}_j\{y_{rj}\}$. Potom α-rez korešpondujúcej charakteristickej funkcie je definovaný takto:

$$\begin{aligned}
\left\langle (x_{ij_0})^L_\alpha, (x_{ij_0})^U_\alpha \right\rangle &= \left\langle (x_{ij_0})^L_\alpha + (x^M_{ij_0} - x^L_{ij_0})\alpha, (x_{ij_0})^U_\alpha + (x^U_{ij_0} - x^L_{ij_M})\alpha \right\rangle \\
\left\langle (y_{rj_0})^L_\alpha, (y_{rj_0})^U_\alpha \right\rangle &= \left\langle (y_{rj_0})^L_\alpha + (y^M_{rj_0} - y^L_{rj_0})\alpha, (y_{rj_0})^U_\alpha + (y^U_{rj_0} - y^L_{rj_M})\alpha \right\rangle
\end{aligned}$$

Kao (1999, s. 174) formuloval nasledujúce modely. Pod dolným odhadom efektívnosti jednotky j_0 pri α-reze, $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$, budeme rozumieť hodnotu $(h_{j_0})^L_\alpha$

$$\left.\begin{aligned}
(h_{j_0})^L_\alpha &= \max_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} \frac{\sum\limits_{r=1}^{w} u_r \cdot (y_{rj_0})^L_\alpha}{v_0 + \sum\limits_{i=1}^{m} v_i \cdot (x_{ij_0})^U_\alpha} \\
\frac{\sum\limits_{r=1}^{w} u_r \cdot (y_{rj_0})^L_\alpha}{v_0 + \sum\limits_{i=1}^{m} v_i \cdot (x_{ij_0})^U_\alpha} &\le 1, \quad j = 1, \ldots, n \\
\frac{\sum\limits_{r=1}^{w} u_r \cdot (y_{rj})^U_\alpha}{v_0 + \sum\limits_{i=1}^{m} v_i \cdot (x_{ij})^L_\alpha} &\le 1, \quad j = 1, \ldots, j_0 - 1, j_0 + 1, \ldots n \\
u_r, v_i &\ge 0, \quad r = 1, \ldots, w; i = 1, \ldots, m,
\end{aligned}\right\} \quad (27)$$

kde $\langle (x_{ij})^L_\alpha, (x_{ij})^U_\alpha\rangle$ a $\langle (y_{rj})^L_\alpha, (y_{rj})^U_\alpha\rangle$ sú α-rezmi $\overline{X}_{ij}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, resp. $\overline{Y_{rj}}$, $r = 1, \ldots, w$, $j = 1, \ldots, n$.

Pod horným odhadom efektívnosti jednotky j_0 pri α-reze budeme rozumieť hodnotu $(h_{j_0})^U_\alpha$

$$\left.\begin{aligned}
(h_{j_0})^U_\alpha &= \max_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} \frac{\sum\limits_{r=1}^{w} u_r \cdot (y_{rj_0})^U_\alpha}{v_0 + \sum\limits_{i=1}^{m} v_i \cdot (x_{ij_0})^L_\alpha} \\
\frac{\sum\limits_{r=1}^{w} u_r \cdot (y_{rj_0})^U_\alpha}{v_0 + \sum\limits_{i=1}^{m} v_i \cdot (x_{ij_0})^L_\alpha} &\le 1, \quad j = 1, \ldots, n \\
\frac{\sum\limits_{r=1}^{w} u_r \cdot (y_{rj})^L_\alpha}{v_0 + \sum\limits_{i=1}^{m} v_i \cdot (x_{ij})^U_\alpha} &\le 1, \quad j = 1, \ldots, j_0 - 1, j_0 + 1, \ldots n \\
u_r, v_i &\ge 0, \quad r = 1, \ldots, w; i = 1, \ldots, m,
\end{aligned}\right\} \quad (28)$$

kde $\langle (x_{ij})^L_\alpha, (x_{ij})^U_\alpha\rangle$ a $\langle (y_{rj})^L_\alpha, (y_{rj})^U_\alpha\rangle$ sú α-rezmi $\overline{X}_{ij}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, resp. $\overline{Y_{rj}}$, $r = 1, \ldots, w$, $j = 1, \ldots, n$.

Charakteristická funkcia efektívnosti jednotky j_0, čiže $\mu_{\overline{h}_{j_0}}$ sa dá skonštruovať z intervalu $\langle (h_{j_0})^L_\alpha, (h_{j_0})^U_\alpha\rangle$ pri rozličných α-rezoch.

Je zrejmé, že pri tvorbe modelov (27) a (28) Kao (1999) použil rovnaké princípy ako Despotis a Smirlis (2002) v modeli (19) a (11). Korektnosť Kaovho prístupu vyplýva z liem 1 až 4.

4 Hodnotenie technickej efektívnosti vybraných slovenských bánk

Praktickým využitím analýzy obalu nepresných údajov môže byť analýza technickej efektívnosti bánk. Na ilustráciu sme použili slovenské banky. Údaje boli čerpané z výročných správ zverejnených na internete (zoznam informačných zdrojov sa nachádza v prílohe). Použili sa údaje z účtovníctva podľa opatrenia Ministerstva financií SR. Ak bola vo výročnej správe uvedená aj konsolidovaná účtovná závierka, použili sa údaje z nej. Ak nie, údaje z nekonsolidovanej účtovnej závierky.

Pre analýzu boli zvolené ako ekonomické vstupy vlastný kapitál, mzdy, platené úroky. Ako ekonomický výstup boli vybrané prijaté úroky. Ako je zrejmé z tab. 1, z daných zdrojov nebolo možné získať úplné údaje, ktoré by boli následne použité pri analýze obalu presných údajov. Presné údaje by bolo pravdepodobne možné získať z databázy BankScope firmy Bureau van Dijk, ale minimálna verzia tejto databázy stojí asi 7 000 EUR ročne. Preto boli na analýzu technickej efektívnosti použité modifikované metódy analýzy obalu údajov.

Prvou možnosťou je namiesto vstupov a výstupov použiť zástupnú (crisp) hodnotu (konkrétne číslo), ako to navrhuje Kuosmanen (2002), čo v nasledujúcich tabuľkách označíme ako crisp prístup. Chýbajúce vstupy sa nahradia číslom $M \gg \max_{i,j}\{x_{ij}\}$ a výstupy číslom 0. Pri výpočte bolo $M = 1\,000\,000$ mil. Sk.

Druhou možnosťou je za chýbajúce údaje použiť interval daný stĺpcovým maximom a minimom $\left\langle \min_j\{x_{i_0j}\}; \max_j\{x_{i_0j}\} \right\rangle$ resp. $\left\langle \min_j\{y_{r_0j}\}; \max_j\{y_{r_0j}\} \right\rangle$, ako to navrhuje Kao (2000), čo predstavuje fuzzy prístup pre $\alpha = 0$.

Efektívnosť jednotlivých bánk vypočítaná pomocou modelu (3), kde sme chýbajúce hodnoty dosadili pomocou prístupu navrhnutého v (Kuosmanen, 1999) a pomocou modelov (27) a (28) v MS Exceli sa nachádza v tab. 2.

Pre banky, ktorých objem výstupu nepoznáme, nebol uskutočnený výpočet, lebo

Tab. 1 Ekonomické vstupy a výstupy vybraných slovenských bánk (v mil. Sk)

Banka	*vstupy*			*výstupy*
	vlastný kapitál	*mzdy*	*platené úroky*	*prijaté úroky*
Banka Slovakia	800		161	221
Credit Lyonnais	628	34		
ČSOB	41 023	4448	19897	34936
ČSOB stavebná sporiteľňa	555	50	66	196
HVB bank	5 012	185	1369	2707
Komerční banka	556	51	300	434
OTP banka	1 044	263		
Poštová banka	1 660			
Prvá komunálna banka	1 369			
Prvá stavebná sporiteľňa	3 413	285	835	1951
Tatra banka	10 848		3691	4769
UniBanka	2 718			
Všeobecná úverová banka	16 333		6492	6545
VÚB Wüstenrot	1 287		227	637

pri crisp prístupe sa za chýbajúce výstupy dosadzuje nula. Avšak podmienkou každého modelu je, aby skúmaná ekonomická jednotka mala aspoň jeden kladný vstup a aspoň jeden kladný výstup.

Tab. 2 Technická efektívnosť bánk

Banka	*crisp prístup*	*fuzzy prístup*
Banka Slovakia	1,0000	$\langle 0,0050; 0,6520\rangle$
Credit Lyonnais		$\langle 0,0118; 1,0000\rangle$
ČSOB	1,0000	$\langle 0,0153; 1,0000\rangle$
ČSOB stavebná sporiteľňa	1,0000	$\langle 0,0063; 1,0000\rangle$
HVB bank	1,0000	$\langle 0,0141; 1,0000\rangle$
Komerční banka	0,9979	$\langle 0,0140; 0,9979\rangle$
OTP banka		$\langle 0,0034; 1,0000\rangle$
Poštová banka		$\langle 0,0021; 1,0000\rangle$
Prvá komunálna banka		$\langle 0,0026; 1,0000\rangle$
Prvá stavebná sporiteľňa	1,0000	$\langle 0,0103; 1,0000\rangle$
Tatra banka	0,6433	$\langle 0,0079; 1,0000\rangle$
UniBanka		$\langle 0,0013; 1,0000\rangle$
Všeobecná úverová banka	0,5344	$\langle 0,0072; 1,0000\rangle$
VÚB Wüstenrot	1,0000	$\langle 0,0089; 1,0000\rangle$

Inou možnosťou je využiť vzťahy medzi účtami a učtovnými triedami. Napr. mzdy sú súčasťou všeobecných prevádzkových nákladov, mzdy a sociálne náklady spolu dávajú náklady na zamestnancov, platené úroky a platené poplatky a provízie sú finančné náklady, prijaté úroky a prijaté poplatky a provízie sú finančné výnosy. Z týchto vzťahov s využitím presných údajov o ostatných bankách, je možné zostrojiť intervaly pre chýbajúce údaje, ktoré ich budú realistickejšie vystihovať.

Podiel miezd na všeobecných prevádzkových nákladoch bánk, o ktorých máme presné informácie, sa nachádza v tab. 3.

Tab. 3 Podiel miezd na všeobecných prevádzkových nákladoch

Banka	*všeobecné prevádzkové náklady (v mil. Sk)*	*z toho mzdy (v mil. Sk)*	*podiel miezd na všeobecných prevádz. nákladoch*
Credit Lyonnais	155,464	33,696	0,217
ČSOB	15 569,71	4 448,20	0,286
HVB bank	696,736	184,771	0,265
Komerční banka	174,218	51,43	0,295
OTP banka	863,402	263,1	0,305
Prvá stavebná sporiteľňa	932,346	284,936	0,306
Interval			⟨0,217; 0,306⟩

Na základe takto získaného intervalu je možné usúdiť, že mzdy predstavujú vo VÚB číslo z intervalu $\langle 885{,}435; 1248{,}471\rangle$.

Niektoré banky neuviedli priamo mzdy, ale náklady na zamestnancov. V tab. 4 sa nachádzajú podiely sociálnych nákladov ku mzdám.

Tab. 4 Podiel sociálnych nákladov na mzdách

Banka	*mzdy (v mil. Sk)*	*sociálne náklady (v mil. Sk)*	*sociálne náklady / mzdy*
Credit Lyonnais	33,696	5,973	0.177
ČSOB	4 448,20	1 643,79	0.370
ČSOB stavebná sporiteľňa	50,332	13,371	0,266
HVB bank	184,771	42,664	0,231
Komerční banka	51,43	13,709	0.267
OTP banka	263,1	82,516	0.314
Prvá stavebná sporiteľňa	284,936	57,151	0.201
Interval			⟨0,177; 0,370⟩

S použitím získaného intervalu z údajov v tab. 4 je možné zostrojiť intervaly pre veľkosť miezd v ostatných bankách. Tieto intervaly sa nachádzajú v tab. 5.

Tab. 5 Projekcia miezd (v mil. Sk)

Banka	*mzdy a sociálne náklady*	*mzdy - interval*
Banka Slovakia	42,223	⟨30,830; 35,865⟩
Poštová banka	217,831	⟨159,054; 185,032⟩
Prvá komunálna banka	228,278	⟨166,682; 193,906⟩
Tatra banka	1 280,45	⟨934,947; 1 087,648⟩
UniBanka	319,334	⟨233,169; 271,252⟩
VÚB Wüstenrot	98	⟨71,557; 83,244⟩

V niektorých bankách vykazujú finančný zisk v delení na prijaté úroky, prijaté poplatky a provízie, platené úroky a platené poplatky a provízie. Iné banky buď vykazujú len finančné náklady a finančné výnosy alebo používajú iné delenie, z ktorého je však možné spočítať finančné náklady a finančné výnosy.

Podiel úrokov a poplatkov a provízií sa líši medzi bankami zaoberajúci sa všeobecným bankovníctvom a stavebnými sporiteľňami. Preto nie sú do tab. 6 a 8 zahrnuté údaje o ČSOB stavebnej sporiteľni a Prvej stavebnej sporiteľni. V tab. 6 sa nachádzajú údaje o platených úrokoch, platených poplatkoch a províziach.

Tab. 6 Vzťah platených úrokov a platených poplatkov a provízií

Banka	*platené úroky (v mil. Sk)*	*platené poplatky a provízie (v mil. Sk)*	*platené úroky / finančné náklady*
Banka Slovakia	160,594	4,642	0,972
ČSOB	19 897,119	1 903,33	0,913
HVB bank	1 369,15	41,663	0,97
Komerční banka	300,35	5,486	0,982
Všeobecná úverová banka	6 491,59	241,122	0,964
Interval			⟨0,913; 0,982⟩

V tab. 7 sa nachádzajú intervaly pre platené úroky zostrojené s využitím intervalu získaného z tab. 6.

Tab. 7 Projekcia platených úrokov a platených poplatkov a provízií (v mil. Sk)

Banka	*platené úroky a platené poplatky a provízie*	*platené úroky – interval*
Credit Lyonnais	30 477,29	⟨27 816,409; 29 930,594⟩
OTP banka	1 158,11	⟨1 056,998; 1 137,335⟩
Poštová banka	1 208,70	⟨1 103,175; 1 187,022⟩
Prvá komunálna banka	1 046,14	⟨954,804; 1 027,374⟩
UniBanka	7 046,66	⟨6 431,438; 6 920,259⟩

Analogicky sa zostrojí interval pre prijaté úroky. Údaje sa nachádzajú v tab. 8.

Tab. 8 Vzťah prijatých úrokov a prijatých poplatkov a provízií

Banka	*prijaté úroky (v mil. Sk)*	*prijaté poplatky a provízie (v mil. Sk)*	*prijaté úroky / finančné výnosy*
Banka Slovakia	220,726	10,646	0,954
ČSOB	34 936,09	7 150,13	0,83
HVB bank	2 707,40	164,503	0,943
Komerční banka	434,037	40,434	0,915
Všeobecná úverová banka	6 545,28	1 768,25	0,787
Interval			⟨0,787; 0,954⟩

Intervaly, ktoré sa nachádzajú v tab. 9 sú zostrojené s pomocou intervalu získaného z tab. 8.

Tab. 9 Projekcia prijatých úrokov a prijatých poplatkov a provízií (v mil. Sk)

Banka	*prijaté úroky a prijaté poplatky a provízie*	*prijaté úroky – interval*
Credit Lyonnais	30 222,81	⟨23 794,553; 28 832,184⟩
OTP banka	1 917,51	⟨1 509.663; 1 829,279⟩
Poštová banka	2 284,38	⟨1 798,499; 2 179,265⟩
Prvá komunálna banka	2 302,51	⟨1 812,774; 2 196,563⟩
UniBanka	8 755,69	⟨6 893,390; 8 352,815⟩

Vypočítané intervaly sa zaradili do tab. 1 na miesta chýbajúcich údajov. V tab. 10 sa nachádzajú aj údaje o presnom súčte alebo rozdiele dvoch premenných, ktoré bolo možné presne získať z výročných správ.

Tab. 10 Ekonomické vstupy a výstupy vybraných slovenských bánk (v mil. Sk)

Banka	*vstupy*			*výstupy*
	vlastný kapitál	*mzdy*	*platené úroky*	*prijaté úroky*
Banka Slovakia	800	⟨31; 36⟩	161	221
Credit Lyonnais	628	34	⟨27816; 29931⟩	⟨23795; 28832⟩
ČSOB	41 023	4448	19897	34936
ČSOB stavebná sporiteľňa	555	50	66	196
HVB bank	5 012	185	1369	2707
Komerční banka	556	51	300	434
OTP banka	1 044	263	⟨1057; 1137⟩	⟨1510; 1829⟩
Poštová banka	1 660	⟨159; 185⟩	⟨1103; 1187⟩	⟨1798; 2179⟩
Prvá komunálna banka	1 369	⟨167; 194⟩	⟨955; 1027⟩	⟨1813; 2197⟩
Prvá stavebná sporiteľňa	3 413	285	835	1951
Tatra banka	10 848	⟨935; 1088⟩	3691	4769
UniBanka	2 718	⟨233; 271⟩	⟨6431; 6920⟩	⟨6893; 8353⟩
Všeobecná úverová banka	16 333	⟨885; 1248⟩	6492	6545
VÚB Wüstenrot	1 287	⟨72; 83⟩	227	637

V tab. 11 sa nachádza efektívnosť získaná pomocou analýzy obalu intervalových údajov uvedených v tab. 10.

Vypočítali sme technickú efektívnosť troma prístupmi. Pri crisp prístupe sa javia ako efektívne Banka Slovakia, ČSOB, ČSOB stavebná sporiteľňa, HVB bank, Prvá stavebná sporiteľňa a VÚB Wüstenrot. Hornú medzu intervalu efektívnosti rovnú jednej mali okrem Banky Slovakia a Komerčnej banky pri fuzzy prístupe všetky skúmané banky. Pri treťom prístupe sú efektívnymi bez vplyvu nepresnosti údajov Credit Lyonnais, ČSOB stavebná sporiteľňa a VÚB Wüstenrot. Hornú medzu efektívnosti rovnú jednej dosiahli HVB bank, OTP banka, Poštová banka, Prvá komunálna banka a UniBanka.

Výsledky týchto troch prístupov nie sú celkom konzistentné. Tieto modely sú

Tab. 11 Technická efektívnosť bánk

Banka	*crisp prístup*	*fuzzy prístup*	*dopočítanie intervalov*
Banka Slovakia	1,0000	$\langle 0,0050; 0,6520\rangle$	$\langle 0,5550; 0,6300\rangle$
Credit Lyonnais		$\langle 0,0118; 1,0000\rangle$	$\langle 1,0000; 1,0000\rangle$
ČSOB	1,0000	$\langle 0,0153; 1,0000\rangle$	$\langle 0,7391; 0,9051\rangle$
ČSOB stavebná sporiteľňa	1,0000	$\langle 0,0063; 1,0000\rangle$	$\langle 1,0000; 1,0000\rangle$
HVB bank	1,0000	$\langle 0,0141; 1,0000\rangle$	$\langle 0,9820; 1,0000\rangle$
Komerční banka	0,9979	$\langle 0,0140; 0,9979\rangle$	$\langle 0,6348; 0,8072\rangle$
OTP banka		$\langle 0,0034; 1,0000\rangle$	$\langle 0,7219; 1,0000\rangle$
Poštová banka		$\langle 0,0021; 1,0000\rangle$	$\langle 0,6998; 1,0000\rangle$
Prvá komunálna banka		$\langle 0,0026; 1,0000\rangle$	$\langle 0,9317; 1,0000\rangle$
Prvá stavebná sporiteľňa	1,0000	$\langle 0,0103; 1,0000\rangle$	$\langle 0,8929; 0,9630\rangle$
Tatra banka	0,6433	$\langle 0,0079; 1,0000\rangle$	$\langle 0,5209; 0,6016\rangle$
UniBanka		$\langle 0,0013; 1,0000\rangle$	$\langle 0,7584; 1,0000\rangle$
Všeobecná úverová banka	0,5344	$\langle 0,0072; 1,0000\rangle$	$\langle 0,4264; 0,5679\rangle$
VÚB Wüstenrot	1,0000	$\langle 0,0089; 1,0000\rangle$	$\langle 1,0000; 1,0000\rangle$

podpornými nástrojmi, ale neposkytujú jednoznačné závery. Nevýhodou crisp prístupu je, že nie je možné vypočítať efektívnosť ekonomických jednotiek, u ktorých nepoznáme žiadne vstupy alebo žiadne výstupy. Slabou stránkou fuzzy prístupu je stanovenie intervalov na základe stĺpcových miním a maxím, ak chýbajú údaje o tom istom vstupe alebo výstupe viacerým ekonomickým jednotkám. Projekciu intervalov možno uskutočniť iba pri dostupnosti dodatočných informácií o údajoch, u ktorých je funkčná závislosť s chýbajúcimi údajmi.

Záver

Analýza obalu údajov, ako spôsob merania technickej efektívnosti, bola navrhnutá v roku 1978 Charnesom, Cooperom a Rhodesom. Vyžadovala však presné údaje o všetkých ekonomických vstupoch a výstupoch všetkých skúmaných ekonomických jednotiek.

Cieľom práce bolo poskytnúť prehľad súčasného stavu rozpracovania analýzy obalu údajov s nepresnými dátami.

Jedným z druhov uvažovaných nepresných dát sú intervalové údaje. Sú to údaje, ktorých hodnota nie je presne známa, ale je známy interval, v ktorom sa príslušná hodnota nachádza. Všeobecný model, ktorý na analýzu obalu intervalových údajov navrhli Cooper, Park a Yu (1999), však vyžadoval stanovenie dodatočných podmienok na váhy všetkých vstupov a výstupov.

Despotis a Smirlis (2002) prezentovali analogický všeobecný model bez dodatočných podmienok na váhy vstupov a výstupov. Tento všeobecný model bol nelineárny. V práci sa podarilo dokázať vlastnosti efektívnosti v závislosti od výberu úrovne ekonomických vstupov a výstupov. Na základe týchto tvrdení bolo možné previesť túto nelineárnu úlohu na úlohu lineárneho programovania.

Druhým typom nepresných dát sú chýbajúce údaje. V teórii boli rozpracované prístupy využívajúce crisp (Kuosmanen, 2002) a fuzzy (Kao, 1999) zástupné hodnoty. Dokázané vlastnosti efektívnosti ukazujú korektnosť Kaovho prístupu.

Literatúra

[1] Aigner, D. - Lovell, C. A. K. - Schmidt, P.: Formulation and estimation of stochastic frontier production function models. *Journal of Econometrics*, 6, 1977, č. 1, s. 21-37.

[2] Allen, R. - Athanassopoulos, A. D. - Dyson, R. G. - Thanassoulis, E.: Weight restrictions and value judgements in DEA: Evolution, development and future directions. *Annals of Operations Research*, 73, 1997, s. 13–34.

[3] Al-Faraj, T. N. - Alidi, A. S. - Bu-Bshait, K. A.: Evaluation of Bank Branches by Means of Data Envelopment Analysis. *International Journal of Operations & Production Management*, 13, 1993, č. 9, s. 45–52.

[4] Annová, A.: *Metóda DEA a jej aplikácie*. Diplomová práca. Košice: Prírodovedecká fakulta Univerzity P. J. Šafárika, 1998.

[5] Banker, R. D. - Charnes, A. - Cooper, W. W.: Some models for estimating technical and scale inefficiency in data envelopment analysis. *Management Science*, 39, 1984, č. 10, s. 1265–1273.

[6] Banker, R. D., Charnes, A., Cooper, W. W., Swarts, J., Thomas, D. A.: An introduction to Data Envelopment Analysis with some of its models and their uses. *Research in Governmental and Nonprofit Accounting*, 5, 1989, s. 139.

[7] Barr, R. - Lawrence S. - Seiford M. - Siems, T. F.: An Envelopment-Analysis Approach to Measuring the Managerial Quality of Banks. *Annals Of Operations Research*, 45, 1993, s. 1–19.

[8] Berrer, H.: *Ranking und Effizienzanalyse (DEA) von Strömungsmessblättern für Einlassgeometrien bei Zylinderköpfen*. Diplomová práca. Wien: Technische Universität Wien, 2002.

[9] BOUFOUNOU, P. V.: Evaluating Bank Branch Location and Performance – a Case-Study. *European Journal Of Operational Research*, 87, 1995, č. 2, s. 389–402.

[10] BROCKETT, P. L. - COOPER, W. W. - GOLDEN, L. L. a i.: DEA evaluations of the efficiency of organizational forms and distribution systems in the US property and liability insurance industry. *International Journal of System Science*, 29, 1998, č. 11, s. 1235–1247.

[11] BUDINSKÝ, J. - DVOŘÁK, J. - GRANČAI, M.: Hodnotenie efektívnosti stredoeurópskych bánk. *Ekonomické rozhľady*, 32, 2003, č. 4, s. 467-480.

[12] CECHLÁROVÁ, K. - SEMANIŠIN, G.: *Lineárna optimalizácia.* Košice: Edičné stredisko Univerzity P. J. Šafárika v Košiciach, 1999.

[13] CHARNES, A. - COOPER, W. W.: An explicit general solution in linear fractional programming. *Naval Research Logistics Quarterly*, 20, 1973, č. 3. (neuvedené strany).

[14] CHARNES, A. - COOPER, W. W.: Programming with linear fractional functionals. *Naval Research Logistics Quarterly*, 9, 1962, č. 3-4, s. 181–185.

[15] CHARNES, A. - COOPER, W. W. - RHODES, E.: Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, 2, 1978, č. 6, s. 429–444.

[16] COOK, W. D. - ROLL, Y.: R & D Project Selection - Productivity Considerations. *R & D Management*, 18, 1988, č. 3, s. 251–256.

[17] COOPER, W. W. - PARK, K. S. - YU, G.: IDEA and AR-IDEA: Models for Dealing with Imprecise Data in DEA. *Management Science*, 45, 1999, č. 4, s. 597-607.

[18] CUMMINS, J. D. - ZI, H. M.: Comparison of frontier efficiency methods: An application to the US life insurance industry. *Journal of Productivity Analysis*, 10, 1998, č. 2, s. 131–152.

[19] DEBREAU, G.: The coefficient of resource utilization. *Econometrica*, 19, 1951, č. 3, s. 273–292.

[20] Despotis, D. K. - Smirlis, Y. S.: Data envelopment analysis with imprecise data. *European Journal of Operational Research*, 26, 2002, č. 140, s. 24–37.

[21] Dlouhý, M.: An Analysis of Medical Staff Productivity. In: *Mathematical Methods in Economics 1999*. Praha: Vysoká škola ekonomická, 1999, s. 73–78.

[22] Epstein, M. K. - Henderson, J. C.: Data Envelopment Analysis for Managerial Control and Diagnosis. *Decision Sciences*, 20, 1989, č. 1, s. 90–119.

[23] Fandel, P.: Data envelopment analysis and its application in agricultural production efficiency analysis. *Central European Journal for Operations Research and Economics*, 6, 1998, č. 3–4, s. 159–167.

[24] Farrell, M. J.: The measurement of productive efficiency. *Journal of the Royal Statistical Society*, Series A 120, 1957, s. 253–281.

[25] Färe, R. - Grosskopf, S.: Two perspectives on DEA: Unveiling the link between CCR and Shephard. *Journal of Productivity Analysis*, 17, 2002, č. 1–2, s. 41–47.

[26] Färe, R. - Grosskopf, S. - Lovell, C. A. K.: *The measurement of efficiency of production*. Dordrecht: Kluwer-Nijoff Publishing, 1985.

[27] Färe, R. - Grosskopf, S. - Lovell, C. A. K.: *Production Frontiers*. New York: Cambridge University Press, 1994.

[28] Favero, C. A. - Papi, L.: Technical Efficiency and Scale Efficiency in the Italian Banking Sector – a Nonparametric Approach. *Applied Economics*, 27, 1995, č. 4, s. 385–395.

[29] Halme, M. - Joro, T. - Matti, K.: Dealing with interval scale data in data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, 137, 2002, č. 1, s. 22-27.

[30] Holzer, I.: *Einsatz der Data Envelopment Analysis zur effizienteren Dimensionierung von Einlasskanalgeometrien, um Durchfluss- und Drallzahl zu optimieren*. Diplomová práca. Wien: Technische Universität Wien, 1999.

[31] Jenkins, L. - Anderson, M.: A multivariate statistical approach to reducing the number of variables in data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, 147, 2003, č. 1, s. 51-61.

[32] Johnes, G. - Johnes, J.: Measuring the Research Performance of UK Economics Departments – an Application of Data Envelopment Analysis. *Oxford Economic Papers-New Series* 45, 1993, č. 2, s. 332–347.

[33] Kacvinská, K.: *Ekonomická efektívnosť investičných projektov podniku.* Diplomová práca. Košice: Prírodovedecká fakulta Univerzity P. J. Šafárika, 2001.

[34] Kao, C.: Data envelopment analysis with missing data. In: Rupnik, V. a i.: *SOR '99. Proceedings of the 5th international symposium on Operational research in Slovenia.* Ljubljana: Slovenian Society Informatika, Section for Operational Research, 1999, s. 173–178.

[35] Kao, C. - Liu, S. T.: Fuzzy efficiency measures in data envelopment analysis. *Fuzzy sets and Systems*, 113, 2000, č. 3, s. 427–437.

[36] Kuosmanen, T.: *Modeling Blank Data Entries in Data Envelopment Analysis.* EconWPA working paper at WUSTL, no. 0210001 (Econometrics), 2002, `http://ideas.repec.org/p/wpa/wuwpem/0210001.html`.

[37] Koopmans, T. C.: An analysis of production as an efficient combination of activities. In: Koopmans, T. C.: *Activity Analysis of Production and Allocation.* New York: Wiley, 1951.

[38] Metters, R. - Vargas, V.: A comparison of production scheduling policies on costs, service level, and schedule changes. *Production Operations Management*, 8, 1999, č. 1, s. 76–91.

[39] Seiford, L. M. - Thrall, R. M.: Recent development in DEA. *Journal of Econometrics*, 46, 1990, č. 1–2, s. 7-38.

[40] Sinuany-Stern, Z., Mehrez, A. - Barboy, A.: Academic Departments and Efficiency Via DEA. *Computers and Operations Research*, 21, 1994, č. 5, s. 543–546.

[41] Sojka, J.: Dynamický variant DEA analýzy na hodnotenie prognóz. *Ekonomický časopis*, 49, 2001, č. 5, s. 960–969.

[42] Ševčovič, D. – Halická, M. – Brunovský, P.: DEA analysis for a large structured bank branch network. *Central European Journal of Operations Research*, 9, 2001, č. 4, s. 329–342.

[43] Thanassoulis, E. - Boussofiane, R. - Dyson, R. G.: Exploring output quality targets in the provision of perinatal care in England using data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, 80, 1995, č. 3, s. 588-607.

[44] Zadeh, L. A.: Fuzzy sets as a basis for a theory of probability. *Fuzzy Sets and Systems*, 1, 1978, č. 1, s. 3–28.

[45] Zimmermann, H. J.: *Fuzzy Set Theory and Its Application*, 3. vydanie, Boston: Kluwer-Nijhoff, 1996.