Úlohy k VC-dimenzii

(**Výpočtové učenie**)

1. Ukážte, že ak $X = \mathbb{R}$ a H je množina všetkých uzavretých intervalov, tak

$$\Pi_H(m) = 1 + m + \frac{1}{2}m(m-1)$$

2. Popíšte explicitne hypotézový priestor P_1 a ukážte, že $\mathrm{VCdim}(P_1) = 2$.

3. Ukážte, že ak H je hypotézový priestor reálneho perceptrónu P_2, tak

$$\Pi_H(4) = 14$$

4. Nech H má konečnú VC dimenziu. Pre $h \in H$ definujme $\bar{h}$:

$$\bar{h} = 1 \Leftrightarrow h(x) = 0, \qquad h : \qquad \to \{0,1\}$$

   a nech komplement H je priestor $\{\bar{h} : h \in H\}$. Dokážte, že majú oba priestory rovnakú VC dimenziu.

5. Dokážte

   - $\Phi(d, m) = \Phi(d, m-1) + \Phi(d-1, m-1), d \geq 1, m \geq 2$
   - $\Phi(d, m) \leq m^\alpha, m \geq \alpha \geq 1$

6. Monočlen je monotónny, ak neobsahuje žiadne negované literály. Dokážte, že priestor monotónnych monočlenov definovaných na $\{0,1\}^n$ má VC dimenziu práve n.

7. Hypotézový priestor H je *lineárne usporiadaný*, ak má aspoň 2 hypotézy a ak pre ľubovoľné dve $h, g \in H$ platí

   - buď $h(x) = 1 \Rightarrow g(x) = 1$
   - alebo $g(x) = 1 \Rightarrow h(x) = 1$.

   Dokážte, že ak H je lineárne usporiadaný, tak $\mathrm{VCdim}(H) = 1$.

8. Nech G_n je množina hypotéz z P_n, pre ktoré nulový vektor $\mathbf{o}$ je negatívny príklad. Predpokladajme, že vzorka $x = (x_1, \ldots, x_n)$ je rozbitá pomocou G_n. Prečo sa žiadne x_i nesmie rovnať $\mathbf{o}$? Dokážte, že vzorka $(x_1, \ldots, x_n, \mathbf{o})$ je rozbitá pomocou P_n. Dokážte, že $\mathrm{VCdim}(G_n) = n$.