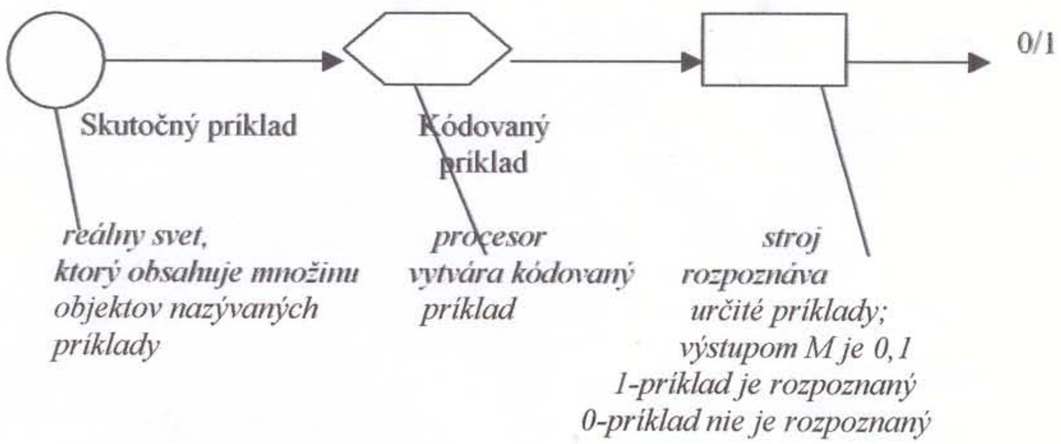
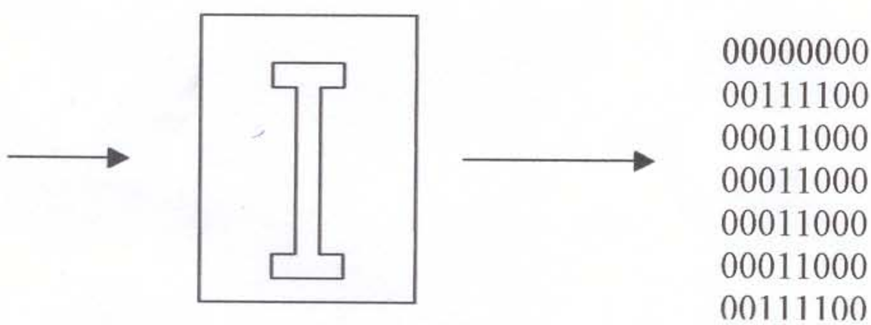
Úvod.

Je mnoho typov aktivít označovaných ako „učenie“. My budeme študovať matematický model takého procesu. Tento model sa zdá byť použiteľný, pretože zachytáva základ určitých aktivít, ktoré boli popísané predtým pomocou nepresných výrazov, a zároveň umožňuje vytvoriť netriviálne matematické tvrdenia, ktoré môžu byť dokázané.





Stroj M môže byť v jednom z mnohých stavov, napr. môže byť nastavený na rozpoznanie písmen I, ďalej A , atď.

Učiaci proces - uvažujeme, že obsahuje vykonanie zmien stavu stroja M na základe príkladov mu predkladaných tak, že dosiahne nejakú žiadanú klasifikáciu.

KONCEPTY

Sformalizujeme pojem koncept, ktorý môže byť popísaný ako množina príkladov.

Σ - abeceda na popis príkladov
Napr. $\Sigma = \{0,1\}$, $\Sigma = R$
Množiny Σ^n, Σ^* predstavujú ...

Definícia 1:
Nech $X \subseteq \Sigma^*$. **Koncept** v abecede Σ je funkcia c, $c: X \rightarrow \{0, 1\}$.

Množina X sa nazýva **priestor príkladov.** Prvok x, $x \in X$ sa nazýva **príklad.**
Ak pre $x \in X$ platí $c(x)=1$, tak x je **pozitívny príklad**, ak platí $c(x)=0$, tak x je **negatívny príklad**.

Zjednotenie množiny kladných a záporných príkladov je definičný obor funkcie c. Teda za predpokladu, že definičný obor je známy, c určuje a je určované množinou svojich pozitívnych príkladov.

Príklady konceptov:

---

1. **Koncept parity**

$\Sigma=\{0,1\}$

$p: \Sigma^* \to \{0,1\}$

$y = y_1 \ldots y_n$: $\quad p(y) = \begin{cases} 1, \text{ ak v y je nepárny počet jedničiek,} \\ 0, \text{ ak v y je párny počet jedničiek,} \end{cases}$

1011101 kladný príklad, 1000001 záporný príklad,

2. **Koncept palindromy**

$\Sigma=\{0, 1\}$

$p: \Sigma^* \to \{0, 1\}$

$y = y_1 \ldots y_n$

$$p(y)=\begin{cases} 1, \text{ ak } y_i = y_{n-i+1} \quad i=1,2..\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \\ 0, \text{ inak} \end{cases}$$

3. **Koncept n- rozmerná guľa**

$\Sigma=R \qquad u: \Sigma^n \to \{0,1\}$

$\mathbf{y} = y_1 \ldots y_n,$

$$u(\mathbf{y})=\begin{cases} 1, \text{ ak } y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 \le 1 \\ 0, \text{ inak} \end{cases}$$

Trénovanie a učenie

Sú dve množiny konceptov obsiahnutých v rámci učenia popísaného na obr. 1.1.
Prvá je množina konceptov odvodených z reálneho sveta, ktorá je predkladaná na rozpoznanie. Táto množina môže obsahovať koncepty ako „písmeno A“, „písmeno B“, ... , z ktorých každé môže byť zakódované. Každý koncept má svoje množiny kladných a záporných príkladov. Keď je množina konceptov určovaná týmto spôsobom, budeme pre ňu používať výraz **konceptový priestor.**
Iný typ množiny konceptov obsiahnutých v rámci učenia na obr. 1.1 je množina, ktorú stroj M je schopný rozpoznať.

Budeme predpokladať, že M sa môže preradiť do rôznych stavov a v danom stave bude klasifikovať niektoré vstupy ako kladné (výstup 1) a zvyšok ako záporné (výstup 0). Teda stav M určuje koncept, ktorý môžeme chápať ako **hypotézu.**
Množina všetkých konceptov, ktoré M určuje, bude nazývaná **hypotézový priestor.**

Cieľom učiaceho procesu je produkovať hypotézu, ktorá v nejakom zmysle zodpovedá konceptu z konceptového priestoru vzhľadom na vyššie uvedenú úvahu. Detaily kedy a ako toto môže byť urobené sú ústredným záujmom tejto prednášky.
Máme teda 2 množiny konceptov:
C – konceptový priestor,
H - hypotezový priestor,
a **p r o b l é m o m** je nájsť ku každému c, $c \in C$, nejaké h, $h \in H$, ktoré je dobrou aproximáciou pre c. V reálnych situáciách sú hypotézy tvorené na základe určitých informácií, ktoré neprinášajú explicitnú definíciu c. My budeme predpokladať, že táto informácia je poskytovaná postupnosťou kladných a záporných príkladov C.
Nemáme dostatok zdrojov na to, aby sme mohli vybudovať veľmi veľký stroj c nemáme dostatok času na to, aby bol vytvorený a spustený program, ktorý by určil, že $h = c$, alebo že h je tak blízko c, ako si prajeme. V praxi sú obmedzenia na zdroje a my sa musíme uspokojiť s hypotézou h, ktorá **„pravdepodobne“** reprezentuje c (aproximuje c) v nejakom definovanom zmysle.

Nech $X \subseteq \Sigma^*$ je príkladový priestor. $\Sigma = \{0,1\}$ alebo $\Sigma = R$.
Vzorka dĺžky m je postupnosť m príkladov, t.j. je to m – tica
$\bar{\mathbf{x}} = (\mathbf{x_1, x_2 \ldots, x_m}) \in \mathbf{X^m}$
Postupnosť môže obsahovať rovnaké hodnoty. Niekedy budeme predpokladať, že sú rôzne.
Tréningová vzorka S je množiny $(X\{0,1\})^m$, t.j.
$\mathbf{S = ((x_1,b_1), (x_2, b_2) \ldots, (x_m, b_m))}$

Budeme predpokladať, že nie sú žiadne sporné b_k, t.j. Ak $x_i = x_j$, => $b_i = b_j$
To teda znamená, že S je funkcia
$S(x_i) = b_i \quad (1 \le i \le m)$

Budeme hovoriť, že s je tréningová vzorka pre cieľový koncept t ak
$b_i = t(x_i)$, pre $1 \le i \le m$.

Príklady:

---

1. Tréningová vzorka pre koncept „ palindrom“ je
((0010,0),(1001001001,1),(111,1),(010101,0),(111101,0))
Cieľový koncept t :

$x = x^1 x^2 \ldots x^n$

$$t(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & x^1 = x^{n-i+1} \quad \text{pre } 1 \le i \le n \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

Uvažujme teraz o povahe učiaceho procesu, ktorý tu chceme študovať. Majme dané

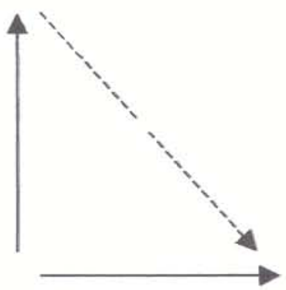
C – konceptový priestor a H – hypotetický priestor v abecede Σ. *Učiaci algoritmus pre (C,H)* , niekedy nazývaný *(C,H)-učiaci algoritmus* je procedúra, ktorá akceptuje tréningové vzorky pre funkcie v C a výstupy zodpovedajú hypotézam v H. Aby táto procedúra mohla byť považovaná za algoritmus, musí byť efektívna. Ak ignorujeme problém efektívnosti, tak **učiaci algoritmus pre (C,H)** je teda funkcia L, ktorá priradí ľubovoľnej trénujúcej vzorke s pre cieľový koncept $t \in C$ funkciu $h \in H$.

H =L (s)

L(s) – je definovaná na celom príkladovom priestore X, kde s - funkcia definovaná na $E \subseteq X$ (lebo zahŕňa len príklady vzorky ($x_1, \ldots, x_m$).

Hypotéza h je konzistentná s s alebo súhlasí s s, ak $h(x_i) = bi$, pre $1 \leq i \leq m$.

Vo všeobecnosti nerobíme predpoklady, že L (s) je konzistentná s s, ale keď táto podmienka platí pre všetky s, hovoríme že L je konzistentná. V tomto prípade je funkcia L(s) ako rozširujúca funkcia s, ako o tom hovorí diagram.



Vo všeobecnosti, nie každé rozšírenie trénujúcej vzorky bude validné zovšeobecnenie, pretože cieľový koncept je len parciálne definovaný príkladmi. Ďalej trénujúca vzorka môže byť nereprezentatívna, alebo zavádzajúca.

Príklad:

Kreslo :	(4 roky,	chvost,	sedací priestor,	zafarbenie,	žije)
	(1	1	1	0	0), 1
	(1	1	1	1	0), 1

Učenie pomocou konštrukcie

2 veľmi jednoduché a veľmi všeobecné algoritmy
nepraktické
V ďalšom budeme venovať pozornosť praktickejším algoritmom.

X príkladový priestor,
t cieľový koncept $X^+ \subseteq X$ množina kladných príkladov

určovaný množinou X^+

Algoritmus:

set $h(x) = 0$ *for all* x *in* X,
for $i := 1$ *to* m *do*
if $bi = 1$ *then set* $h(x_i) = 1$,
$L(s) = h$,

Niektoré otázky, týkajúce sa algoritmu:

1. Čo (ak X je nekonečné_)
2. Ako vhodne vyjadriť hypotetický priestor?

Ak dáme bokom otázku efektívnosti, vystúpia nasledujúce poznámky.
Zrejme, výstupná hypotéza L(s) je rovná cieľovému konceptu t <=> keď s obsahuje všetky kladné príklady pre t.
Pretože s je konečná postupnosť, to znamená, že len koncepty s konečným počtom kladných príkladov môžu byť naučené s úplným úspechom.

Napríklad,
Koncept „ parita" je definovaný nad celým $\{0,1\}^*$, teda algoritmus nemôže skonštruovať celú množinu kladných príkladov.

Koncept „parita" nad $\{0,1\}^*$ .....
...počet kladných prípadov je 2^{n-1}
=> |s| musíme voliť aspoň tak veľké.

Tento algoritmus má aj dobré vlastnosti:

1. **je konzistentný** t.j. Výstupná hypotéza L(s) klasifikuje všetky príklady vyskytujúce sa v s korektne.
2. Každý komponent trénujúcej vzorky sa vyskytuje práve 1x.Toto je veľmi silná vlastnosť .... on – line vlastnosť. V praxi to znamená, že príklady môžu byť prezentované učiacemu sa znovu, keď sa vyskytnú, bez nutnosti mať „pamäť", ktorá ich uloží pre ďalšie použitie.

Definícia: Hovoríme, že algoritmus je bezpamäťový on – line algoritmus, ak pre danú trénujúcu vzorku s produkuje postupnosť hypotéz h_0 h_1 ....h_m, takých, že h_{i+1} závisí len od h_i a priebežne spracovávanej vzorky (x_i, b_i).

Učenie očíslovaním

Nasledujúca metóda učenia určite nie je bezpamäťový on – line algoritmus.
Predpokladáme, že hypotetický priestor H je spočítateľný a má explicitné očíslovanie.

$H = \{h^{(1)}, h^{(2)}, \dots \quad \}$

Predpokladajme, že s je trénujúca vzorka pre cieľový koncept.
Metóda: Porovnať každú hypotézu spätne s každým komponentom v s spätne, odmietnuť hypotézu pri každej príležitosti, ak nesúhlasí s hodnotou príkladu. Po odmietnutí hypotézy je ďalšia vzorka testovaná tým istým spôsobom. Proces sa zastaví, keď je nájdená hypotéza, ktorá vyhovuje všetkým príkladom trénujúcej vzorky.

Algoritmus:

begin $r := 1, i := 1;$ *{r ... por. Číslo hypotézy}*
{i.... por. Číslo vzorky }

repeat
if $h^{(r)}(x_i) \neq b_i$
then begin $r := r+1; i := 1$ *end*
else $i := i+1;$
until $i = m+1;$
$L(s) := h^{(r)};$
end;

H môže byť konečná, môže sa stať, že sa vhodná hypotéza nenájde. Modifikáciu algoritmu vieme ľahko urobiť. V praxi sa musíme vyhnúť používaniu neprimeraných veľkých hypotetických priestorov. Počet všetkých hypotéz

$$h: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$$

je 2^{2^n}. Ak $n = 10$, $2^{2^n} = 2^{1024} = 4^{512} = 8^{256} = 16^{128}$

Poznámky indikujú, že aby sa táto metóda stala vhodnou metódou učenia, je potrebné urobiť určité obmedzenia na hypotézový priestor H a jeho vzťah k priestoru konceptov C.

„induktive bias“ predpojatosť.

Toto je predpoklad, že učiaci má nejakú vopred predstavenú ideu o tom, akú metódu klasifikácie učiteľ použiva, t.j. učiaci vie, alebo má nejaké indikácie o konceptovom priestore.

Najjednoduchší spôsob modelovať taký predpoklad je stanoviť H = C a v tomto prípade hovoríme o učiacom algoritme pre H , čo znamená (H,H). Väčšina všetkých algoritmov v ďalšom bude tohto typu.

Poznámky:
Je mnoho variantov procesov „ učenia s dozorom z príkladov“ , čo je hlavný predmet tejto knihy. Pomocné otázky (Angluin)

Úlohy:

1. Aký je počet kladných príkladov konceptu „palindrom“, keď príkladový priestor je $\{0,1\}^n$?
2. Nech w je nasledujúci koncept:

$$\{0,1\}^n \quad y \in \{0,1\}^n \quad w(y) = \begin{cases} 1, \text{ ak y obsahuje najviac 2 jedničky} \\ 0 \text{ inak} \end{cases}$$

   Ukážte, že počet kladných príkladov w je kvadratickou funkciou n.
3. Predpokladajme, že v konečnom „učení očíslovaním“ sme si istí, že hypotézy sú očíslované tak, že tá ktorú chceme, je v prvej polovici.
4. Ak môžeme vybrať 1 milión hypotéz za sekundu a príkladový priestor je $\{0,1\}^9$, koľko to bude trvať v najhoršom prípade?
5. Dokážte, že počet funkcii $f: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ je 2^{2n}