**Definícia 0.1** Inverznou maticou k štvorcovej matici $\mathbf{A}$ je matica $\mathbf{A}^{-1}$ taká, že platí

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$$

**Poznámka 0.1**

- K štvorcovej matici existuje inverzná matica akk determinant $|\mathbf{A}| \neq \mathbf{0}$.
- štvorcová matica, ku ktorej neexistuje inverzná matica sa nazýva *singulárna matica*
- štvorcová matica, ku ktorej existuje inverzná matica sa nazýva *regulárna matica*

**Definícia 0.2** Nech $\mathbf{A}$ je reálna štvorcová matica stupňa $n$. Každý nenulový vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, pre ktorý platí

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x},$$

kde $\lambda$ je komplexné číslo, sa nazýva *vlastným vektorom matice* $\mathbf{A}$ odpovedajúcim číslu $\lambda$, ktoré nazývame *vlastným číslom* matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{x}$ sa nazýva *vlastným vektorom* matice $\mathbf{A}$.

**Poznámka 0.2** Vzťah sa dá zapísať v tvare

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Ak prejdeme k súradnicovej forme zápisu, máme

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n &= 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{n2}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Za účelom nájdenia vlastného vektora je nutné nájsť nenulové riešenie systému (1), ktoré existuje práve vtedy, keď determinant matice systému (1) je $\det(\mathbf{A}^\top - \lambda\mathbf{E}) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, t. j.

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

**Definícia 0.3**

- Matica $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$ sa nazýva charakteristickou maticou lineárneho zobrazenia $\varphi$.

- polynóm $P_n(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$ sa nazýva charakteristickým polynómom lineárneho zobrazenia $\varphi$
- spektrom lineárneho zobrazenia $\varphi$ nazývame systém všetkých koreňov charakteristického polynómu, pričom každý koreň je v ňom uvedený toľkokrát, aká je jeho násobnosť.
- ak $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ sú vlastné vektory lineárneho zobrazenia $\varphi$ patriace vlastným čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, ktoré sú navzájom rôzne, potom sú vektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ lineárne nezávislé.

**Definícia 0.4** Komplexne združené číslo k číslu $z = a + b\mathrm{i}$ je definované ako

$$\bar{z} = a - b\mathrm{i}$$

**Definícia 0.5** Štvorcová matica sa nazýva hermitovskou, ak je samoadjungovanou, resp. ak pre prvky matice platí

$$a_{ij} = \bar{a}_{ji},$$

kde pre dané $z$ je $\bar{z}$ komplexne združeným číslom.

**Poznámka 0.3**

- diagonálne prvky hermitovskej matice sú reálne čísla (lebo $a_{ii} = \bar{a}_{ii}$).
- každá celočíselná alebo reálna matica je hermitovská, akk je symetrická.
- hermitovské matice majú reálne vlastné čísla

**Definícia 0.6** *Pozitívne semidefinitnou maticou* nazývame každú hermitovskú maticu, ktorej vlastné čísla sú nezáporné.

**Definícia 0.7** Štvorcová matica $\mathbf{A}$ typu $n \times n$ sa nazýva ortogonálnou, ak

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^\top = \mathbf{E}$$

**Poznámka 0.4**

- ortogonálna matica je vždy invertibilná a platí

  $$\mathbf{A}^{-\mathbf{1}} = \mathbf{A}^\top,$$

  resp.

  $$(a^{-1})_{ij} = a_{ji}$$

- determinant ortogonálnej matice je rovný $\pm 1$
- súčin dvoch ortogonálnych matíc je ortogonálna matica

- inverzná matica ortogonálnej matice je ortogonálna matica

**Literatúra**


- Eric W. Weisstein. MathWorld–A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/
- Algebra: poznámky z prednášok 2000/2001 a 2001/2002 podľa doc. J. Lihovej. http://s.ics.upjs.sk/ novotnyr/home/skola/algebra/alg.pdf