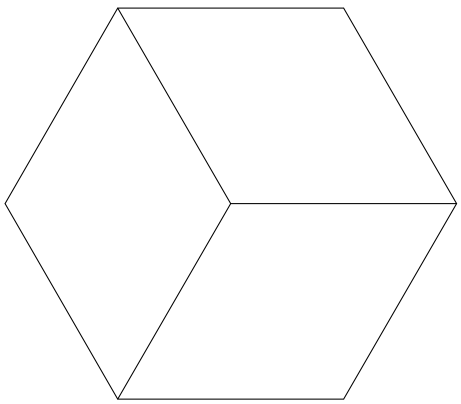
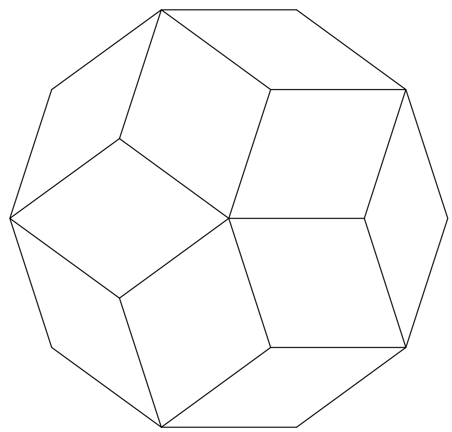
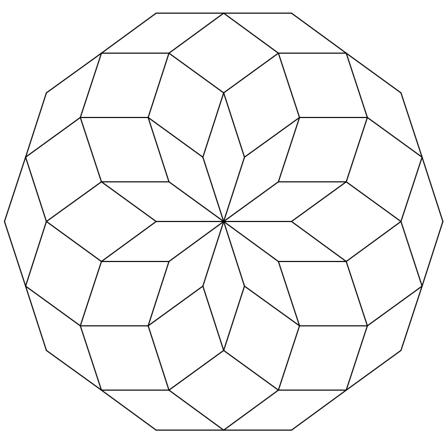
LUBOŠ MOTL
motl@physics.rutgers.edu

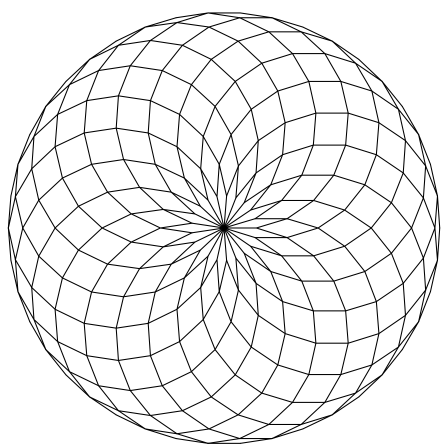
MILOŠ ZAHRADNÍK
mzahrad@karlin.mff.cuni.cz

PĚSTUJEME LINEÁRNÍ ALGEBRU









MATEMATICKO-FYSIKÁLNÍ FAKULTA UK 1994

Obsah

I Zimní semestr **13**

1 První seznámení s předmětem **15**
1.1 Gaussova eliminace 15
1.2 Řešení soustav rovnic a objemy těles 18
1.3 Výpočet objemu pravidelného dvacetistěnu 18

2 Kdo je grupa a těleso **27**
2.1 Grupa 27
2.2 Permutace 31
2.3 Řešil vy byste rovnici pátého stupně? 35
2.4 Nehmotná tělesa 37
2.5 Cayleyova čísla 40
2.6 Trisekce úhlu pravítkem a kružítkem 42

3 Prostory plné vektorů **45**
3.1 Lineární nezávislost 47
3.2 Steinitzova věta 51
3.3 Funkce typu spline 55

4 Skalární součin **59**
4.1 Gramm-Schmidtova ortogonalisace 65
4.2 Ortogonální doplněk 67

5 Matice a lineární zobrazení **69**
5.1 Některé další význačné příklady matic 75

6 Hodnost **77**
6.1 Hodnost součinu, regulární matice 80
6.2 Ekvivalentní řádkové úpravy 82

6.3 Frobeniova věta, řešitelnost soustavy 84

7 Operátory v různých basích, stopa **89**
7.1 Podobné matice, matice v různých basích 89
7.2 Stopa 91

8 Determinant **93**
8.1 Základní vlastnosti determinantů 98
8.2 Výpočet cirkulantu 104
8.3 Rozvoj determinantu podle sloupce 105
8.4 Cramerovo pravidlo, řešení soustavy 107

9 Vlastní čísla a vektory operátoru **109**
9.1 Charakterisace isometrií ve třech rozměrech 112
9.2 Přehled grup, Cartaniáda 113

II Letní semestr **119**

10 Dláždění a krystaly **121**
10.1 Penroseho pokrytí 124
10.2 Příklad třírozměrného kvasikrystalu 128

11 Exponenciála matice **131**
11.1 Aplikace na soustavu diferenciálních rovnic 137
11.2 Heisenbergův obraz 138
11.3 Vztah stopy a determinantu 139
11.4 Taylorův vzorec 141
11.5 Poissonovo rozdělení 142
11.6 Gaussova křivka 144
11.7 Logaritmus matice 145
11.8 Hamiltonovy rovnice pro oscilátor 146

12 Lieova algebra **149**
12.1 Killingova forma a metrika 153
12.2 Teorie representací 154
12.3 Kompaktní grupy 161
12.4 Váhy a mřížky 168
12.5 Superalgebry a supersymetrie 170
12.6 Obří vyňatá grupa 172

13 Nilpotence, Jordanův tvar **179**
13.1 Base z řetězců vektorů 182
13.2 Jordanův tvar obecné matice 186
13.3 Polynomy a funkce matic 193

14 Positivní matice **201**
14.1 Perron-Frobeniova věta 202
14.2 Feynmanův integrál 207

15 Dualita **217**
15.1 Duální grupa 217
15.2 Duální grafy a tělesa 218
15.3 Dualita v geometrii 220
15.4 Duální prostory 221
15.5 Dualita a skalární součin 225
15.6 Dualita ve funkcionální analýze 229

16 Spektrální rozklad, adjunkce **235**
16.1 Fyzikální veličiny v kvantové mechanice 238
16.2 Prostor Fourierových řad 241
16.3 Kvantový harmonický oscilátor 242
16.4 Hermitovy polynomy 244
16.5 Legendreovy polynomy 246
16.6 Čebyševovy, Laguerrovy a další polynomy 251
16.7 Diagonalisace konvolučního operátoru 255

17 Kvadratický svět **259**
17.1 Bilineární a kvadratické formy 259
17.2 Matice kvadratické formy 261
17.3 Diagonalisace kvadratické formy 264
17.4 Signatura, definitnost 271
17.5 Kvadriky a kuželosečky 272
17.6 Vlnky a kódování obrazu 280

18 Dvě maticové bagately **287**
18.1 Pseudoinverse matice 287
18.2 Polární rozklad operátoru 289

19 Říše tensorů **293**
19.1 Co jest tensor 293
19.2 Symetrické a antisymetrické tensory 306
19.3 Tensory v obecné relativitě 317
19.4 Spinory 322
19.5 Tensory a nezávislé jevy 332
19.6 Epilog 336

(Text k obrázkům na obálce viz definici rovnoběžnostěnu v kapitole Prostory plné vektorů a též kapitolu Dláždění a krystaly.)

Návod ke čtení těchto skript

Texty psané antikvou této velikosti jsou určeny i začátečníkům (třeba jako doplněk k přednášce jednoho z autorů tohoto textu) a obsahují látku, kterou doporučujeme studentům všech druhů studia libovolného ročníku na MFF UK. Rozšiřující partie psané někdy menším písmem[1] a někdy značkami (♯) resp. (♡) označujícími začátek resp. konec dotyčné „rozšiřující partie" jsou určeny pokročilejším, resp. více motivovaným čtenářům. Ani tyto partie však nevyžadují větší předběžné znalosti, snad kromě ovládnutí „kalkulu", tzn. elementů diferenciálního a integrálního počtu – jako oblastí, které často zasahují svým tématem. Skripta jsou psána dosti <u>stručně</u> nejen z důvodu „snahy udržet rozsah v únosných mezích"[2]. Žádný předmět <u>nelze</u> dobře ovládnout bez jistého <u>vlastního</u> „tvůrčího" úsilí. Partie vynechané se slovy „dokažte si sami" <u>nedoporučujeme</u> přeskakovat, pokud by čtenáři nebyla věc dost jasná, i když to třeba ještě neumí zformulovat. Může se stát, že vynechané partie vyvolají nevoli čtenáře případně přání nalézt podrobnější vysvětlení. Uvítáme tedy jakoukoliv, nejlépe však konstruktivní, kritiku a náměty pro zlepšení a rozšíření našeho textu. V dalších versích tohoto –zatím provisorního– textu se pokusíme na uvedené náměty reagovat.

„Vulgarisující" shrnutí a poznámky nevyžadující zvláštní vnímavost a inteligenci jsou psány strojopisným fontem (`„pro ty s přímočařejším chápáním matematiky"`[3]).

[1] Konečné rozhodnutí, které pasáže pojímáme jako rozšiřující, jsme ještě neprovedli.

[2] Tedy lenosti.

[3] Což mohou být i autoři textu. V dalším plánujeme uvedený typ poznámek <u>podstatně</u> rozšířit. Niels Bohr při své návštěvě v Moskvě v roce 1960 prohlásil, že se nikdy před svými studenty nebrání prozradit, že je hlupák. Perevodčik to přeložil tak, že se netají s tím, že jsou studenti hlupáci. Kapica (možná někdo jiný) vtipně replikoval, že právě v tomto tkví

Matice $\mathbf{A}$ je psána tlustším písmem a matice transponovaná, komplexně sdružená, hermitovsky sdružená, inversní a pseudoinversní po řadě jako $\mathbf{A}^T$, $\overline{\mathbf{A}}$, $\mathbf{A}^*$, $\mathbf{A}^{-1}$ a $\mathbf{A}^{\neg}$. Pro vektory jsou vyhražena písmena se šipkou, např. $\vec{\mathbf{u}}$. Počítáte-li ale něco sami, volte samozřejmě značení podle vlastního uvážení. Počítejte s tím, že fysici obvykle píší adjungovanou matici pomocí křížku ($\mathbf{A}^\dagger$), komplexní sdružení pomocí hvězdičky místo pruhu (c^*) a nad matici mnohý autor píše stříšky. Pro transponovanou matici je oblíbená vlnka: $\widetilde{\mathbf{A}}$.

Grupy, tělesa a prostory jsou psány písmem zdvojeným.

Poměrně brzy se objeví zápis matematických formulí s dolními i horními indexy (pokud jde o mocnění, lze to vyčíst z kontextu): všimněte si, že v čistě lineárně algebraických případech se sumuje jen podle zdvojených indexů, z nichž je jeden dole a druhý nahoře (většinou v tomto pořadí), a volné indexy mají stejnou polohu ve všech členech na obou stranách rovností. Výjimku tvoří např. skalární součin v $\mathbb{R}^n$

$$\mathbf{b}(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i. \tag{0.1}$$

Správně by se tento vzorec měl psát ve tvaru

$$\mathbf{b}(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g_{ij} x^i y^j. \tag{0.2}$$

kde g_{ij} (třeba $g_{ij} = 1$ pro $i = j$ a $g_{ij} = 0$ jinak) je veličina zvaná metrický tensor. Hodnota skalárního součinu není nic „a priori daného“, jak uvidíme později!

Bezpatkové písmo v běžném textu naznačuje, že právě čtete jakousi úlohu. Pro důkazy je často voleno písmo šikmé.

Možná už brzy zjistíte, jak jest užitečná **latinská** a **řecká abeceda**. Proto je zde uvádíme (řeckou s anglickými názvy písmen).

A je stan a nebo stříška	L je klika od dřevníku,	A, α	alpha	N, ν	nu
B dvě baculatá bříška.	M dva stany táborníků.	B, β	beta	Ξ, ξ	xi
C je rohlík, měsíc, srp,	N přišlo M o nohu,	Γ, γ	gamma	O, o	omikron
D půl broskve někdo slup'.	O je koláč z tvarohu.	Δ, δ	delta	Π, π, ϖ	pi
E je hřeben vylámaný,	P je prapor na mávání,	$\mathrm{E}, \epsilon, \varepsilon$	epsilon	$\mathrm{P}, \rho, \varrho$	rho
F semafor pochroumaný,	R je šašek pro zasmání,	Z, ζ	zeta	$\Sigma, \sigma, \varsigma$	sigma
G je rohlík bez špičky,	S je zatočený had,	H, η	eta	T, τ	tau
H postýlka Haničky.	T stoleček – prostírat!	$\Theta, \theta, \vartheta$	theta	Υ, υ	upsilon
CH je měsíc u postele,	U je mísa na knedlíky,	I, ι	iota	Φ, ϕ, φ	phi
I pravítko učitele,	V je váza z keramiky,	K, κ	kappa	X, χ	chi
J je obrácená hůl,	Y vidlice na práček,	Λ, λ	lambda	Ψ, ψ	psi
K sněhové vločky půl.	Z je značka zatáček.	M, μ	mu	Ω, ω	omega

rozdíl mezi kodaňskou a moskevskou školou. Autoři se nestydí přiznat hloupost jak učitelů, tak studentů, projeví-li se.

Úvodní poznámky k obsahu skript

Předmět lineární algebry tvoří bezesporu jednu z centrálních částí základního matematického vzdělávání na universitách. Jeho výrazná logická stavba, abstraktnost a elegance pojmů a vět a také, přes četné vazby k ostatním matematickým disciplínám i aplikacím, značná soběstačnost předmětu (ve smyslu malého objemu znalostí jiných matematických disciplín bezpodmínečně nutných k pochopení zde studované látky) z něho činí ideální úvodní předmět **moderní matematiky**.

Termín „moderní matematika" je nutno v této souvislosti trochu vysvětlit. Nejde již samozřejmě vůbec jen o „vyšší matematiku" s poněkud hypertrofovaným důrazem na klasický infinitesimální počet. Uvědomme si, že jinak dokonalé knihy třeba Jarníkovy zrcadlí (nejen místy již archaickým způsobem vyjadřování) dobu svého vzniku – která je současné generaci studentů vzdálena srovnatelně s dobou Bolzano-Cauchyho.

Moderní matematiku v současnosti charakterisuje již nejen abstraktnost přístupu, snaha o logickou jasnost výstavby předmětu, lakoničnost vyjadřování (což jsou převládající trendy matematiky 20.století), ale také, zvláště v posledních desetiletích, opětný návrat k interakcím s fysikou a ostatními přírodními vědami. Poslední trend ovšem nepůsobí ještě tak dlouho, aby se stačil odrazit v převážné většině stávajících učebnic, od obecné školy počínaje, ovlivněných více než padesátiletou „odlukou" matematiky od fysiky (započatou rozvojem disciplín jako je teorie množin, topologie a abstraktní algebra a vrcholící v díle Bourbakiho).

Zkrátka řečeno, nyní je opět „v módě" svazovat abstraktní matematické konstrukce s reálným světem současné fysiky (a dalších věd). Pisatelé těchto skript patří k těm, jimž uvedená móda vyhovuje mnohem více než dřívější stav.

Nečiníme si, samozřejmě, nárok na zvláštní originalitu. Kupříkladu, aniž bychom se snažili opisovat např. knihu [1], je jasné, že tato kniha (a samozřejmě též kniha [0]) značně ovlivnila obsah uvedených skript (a doporučujeme ji k přečtení či alespoň seznámení se s ní ambicióznějším studentům). Jinak je vhodné připomenout, že o předmětu lineární algebry existují desítky knih, skript, učebních textů, a to i v češtině, a další vycházejí. Doporučujeme čtenáři alespoň zběžné seznámení například s existujícími skripty lineární algebry autorů Vopěnky [2], Goralčíka [3], Bečváře [4] a dalších. (Je poučné si přečíst třeba jen úvody k těmto knihám dokumentující, jak různé osobnosti přistupují odlišným způsobem ke zdánlivě stejným tématům.) Seznámí se tak trochu i s historií přednášení tohoto předmětu na MFF UK. Skripta

[2] byla například psána v době „vrcholící odluky“ matematiky od fysiky, kdy geometrie (speciálně projektivní geometrie) byla málem nazírána jako již „mrtvá disciplína“, jejíž znalost však může být vhodná jako „průprava k jiným, důležitějším oborům matematiky“.

Posice geometrie se ovšem za posledních dvacet let radikálně proměnila: Nyní je geometrie v centru současného matematického dění – což dosvědčuje i počet tzv. Fieldsových medailí (analogie Nobelovy ceny, která –jak známo– není v matematice udělována). LA je samozřejmě do značné míry také úvodem k tomuto předmětu.

LA je však také stavebním kamenem kvantové mechanice, teorii pravděpodobnosti, teorii diferenciálních rovnic, lineárnímu programování, ekonomii …, jak časem uvidíme, a též úvodem do moderní analýzy, přesněji do předmětu zvaného „funkcionální analýza“.

Je obdivuhodné, jak mnohé pojmy LA mají kromě své vnitřní elegance (která samozřejmě není utajena autorům [2], [3], [4], …) též různorodé aplikace a vazby na další matematické obory. Tento aspekt je v uvedené literatuře téměř zcela zanedbáván. Například pojem operátoru je jedním z nejvhodnějších východisek k formulaci kvantové mechaniky, pojem exponenciály matice je základním prostředkem popisu evolučních rovnic (tzn. systémů vyvíjejících se v čase).

> Weyl ve svém nekrologu o Hilbertovi řekl mimo jiné: „… došlo pak navíc k jistému zázraku: ukázalo se, že teorie spektra Hilbertových prostorů[4] je odpovídajícím matematickým prostředkem nové kvantové fysiky, zavedené Heisenbergem a Schrödingerem r.1925.“

Zdaleka nejen do LA patří zásadní pojem **grupy**, sloužící mj. k matematickému zkoumání pojmu symetrie. (S pojmem grupy se seznámíme na četných příkladech; samotná teorie grup však v těchto skriptech není obsažena.)

Tato skripta jsou zápiskem přednášek lineární algebry pro první ročník fysiky, konaných původně víceméně dle Kopáčkových skript, přednášek, jež postupně doznaly změn a rozšíření hlavně směrem k aplikacím.) Jsou „nultým“ pokusem o text, který v české literatuře o předmětu LA zatím víceméně chybí. Obsahují jistě veliké množství chyb, snad převážně těch nepodstatných. Jsou psána (pro leckoho až příliš) stručně, neboť nechtějí suplovat existující texty. Měla by být, alespoň v zásadě, soběstačná,[5] aby čtenář ne-

[4] Tzn. nekonečnědimensionálních prostorů se skalárním součinem.

[5] Viz např. tabulku na straně 7.

musel hledat podstatnou informaci jinde.

Na druhé straně vřele doporučujeme čtenáři, aby čerpal další informace z n e j r ů z n ě j š í c h zdrojů. Vede to téměř vždy k lepšímu pochopení (tak jako je vždy lepší komunikovat s více lidmi – úplné hlupáky ovšem vyjímaje – než stále slyšet jeden, byť i konsistentní, názor). Níže uvádíme seznam některé základní literatury. Cílem této knihy je více položit důraz na s o u v i s l o s t i LA s ostatní matematikou (resp. alespoň na ty, které jsou bližší autorům textu) než na předmět takříkajíc „sám o sobě“.

Také jsme se snažili soustředit některá fakta, která jsou sice dobře známa znalcům specialisovaných oborů, tzn. patří do jakéhosi obecného „folklóru“ daných oborů a která tedy žádnému specialistovi nestojí za zformulování už proto, že to přece všichni (experti) znají – která ale naopak bývají neznámá obecnému (i matematickému) publiku a nevyskytují se v úvodních textech (ba někdy ani v monografiích). Příkladem budiž třeba Feynmanův integrál, podmínka detailní rovnováhy z teorie Markovských procesů, ale i tak triviální věc, jakou je výpočet objemu k-rozměrného rovnoběžnostěnu v n-rozměrném prostoru (což může být pro ryzího „algebraika“ věc „ležící mimo jeho zájem“ a ryzímu „analytikovi“ se to může jevit jako triviální cvičení na větu o substituci či plošný integrál.

Jinak řečeno, text se obrací ke čtenáři libovolného ročníku např. fysiky, který nebude ani specialistou analytikem, ani specialistou algebraikem, ale cítí potřebu porozumět některým základním věcem – třeba počítání objemů či plošných obsahů mnohostěnů... – a u teoretických konstrukcí oceňuje nejen jejich krásu, ale ještě raději jejich n e p o s t r a d a t e l n o s t v rozvoji matematicko-fysikální gramotnosti. Rádi bychom čtenáře přesvědčili, že většina konstrukcí uvedených v této knize vyhoví tomuto požadavku.

Další doporučená literatura pro studenty fysiky

Do doby zdokonalení těchto skript lze ještě doporučit standardní skripta Kopáčkova (podle nichž byla koneckonců uvedená přednáška zpočátku organisována) *Matematika pro fyziky II,IV*. Sbírka příkladů *(Kopáček a kolektiv)* je nezbytným doplňkem (do doby, než zařadíme odpovídající příklady i do předkládaných skript) každého studenta LA/fys. O sbírce příkladů *Proskurjakov* lze říci totéž co o její paralele v oblasti analýzy *(Děmidovič)*. Obě sbírky obsahují veliké množství (někdy velice zajímavých i těžkých a důležitých) příkladů a přes svoji zastaralost (vznikaly v 50.letech a dříve) jsou zatím nenahraditelné pro vážnější zájemce. Z velikého množství další literatury lze ostatní literaturu v jazyce českém doporučit jen jako doplňkovou, neboť většinou nepokrývá všechny partie, na které se klade důraz v těchto skriptech (platí to samozřejmě i obráceně).

Kromě knihy Kostrikina a Manina doporučujeme základní a dnes již klasickou učebnici *Současná geometrie*, přeloženou i do angličtiny.

Výběr látky v předloženém textu je samozřejmě ovlivněn subjektivní volbou autorů (nealgebraiků!); uveďme alespoň heslovitě některá základní témata, která k lineární algebře také patří a informaci o nichž by čtenář zde marně hledal.

Jde především o numerické aspekty lineární algebry (což je samostatný obor velké praktické důležitosti), dále o soustavnější informaci o afinní a projektivní geometrii (a o lineárním programování), o teorii perturbace spektra lineárních operátorů (uveďme alespoň knihu [11]). Také některé „čistě lineárně algebraické" partie jsou asi pojednány méně obšírně, než bývá zvykem. U tématu tak standardního, jako je LA, nemá smysl se snažit o přílišnou originalitu výkladu. Na druhé straně některé rozšiřující partie nemají vždy – pokud je nám známo – odpovídající analogii v běžné (i cizojazyčné) knižní literatuře.

Zmíněná a některá další literatura

0. Jiří Kopáček: *Matematika pro fyziky I, II, III, IV* a příklady k nim I-IV
1. A. I. Kostrikin, J. I. Manin: *LA i geometrija, Moskva 1986*
2. Petr Vopěnka: *Lineární algebra a analytická geometrie, 1964*, skripta UK
3. Pavel Goralčík: *Úvod do lineární algebry, 1978*, skripta UK
4. Jindřich Bečvář: *Lineární algebra I, II, 1980*, skripta UK
5. Ladislav Bican: *Lineární algebra, 1980*, skripta UK
6. B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, S. P. Novikov: *Současná geometrie, I. díl, Moskva 1979, 1986*
7. G. Birkhoff, S. MacLane: *Algebra*, Bratislava 1978
8. Israel M. Gelfand: *Lekce z lineární algebry*[6], Moskva 1966
9. Vladimír Kořínek: *Základy algebry,* z této knihy se učili po desetiletí vaši dávní předchůdci, Praha 1954
10. Leo Boček: *Tensorový počet*, Praha 1978
11. Tosio Kato: *Perturbation Theory , Springer-Verlag 1986*

[6] Tato kniha samozřejmě representuje pouze nepatrný zlomek rozsáhlého díla jednoho z největších matematiků 20. století. Také na legendárním Gelfandově semináři (který trvá od podzimu roku 1943 až dodneška, poslední léta ovšem na Rutgersově universitě v USA) je lineární algebra (a potenciálně celá matematika) stále přítomna.

12. Michael B. Green, John H. Schwarz, Edward Witten: *Superstring theory*, Cambridge University Press 1987
13. I. V. Proskurjakov: *Sbírka úloh z LA, Moskva*, 1984
14. Jiří Formánek: *Úvod do kvantové teorie, Academia 1983*
15. Aleš Pultr: *Skripta k přednášce pro 1. a 2. ročník informatiky, 1995*
16. Ladislav Koubek: *Úvod do anal. geometrie a algebry, 1965*, skripta UK
17. Gilbert Strang: *Linear Algebra and its Applications*, Academic Press 1976[7]
18. Nicolas Bourbaki: *Algebra*, Paris 1959, je to opět literatura pro náročné; obsahuje však i historické poznámky o předmětu lineární algebry
19. Jozef Kvasnica: *Matematický aparát fyziky*, Academia, Praha 1989
20. Jiří Blank, Pavel Exner, Miroslav Havlíček: *Lineární operátory v kvantové fyzice*, Praha, Karolinum 1993
21. L. Krump, V. Souček, J. Těšínský: *Úvod do analýzy na varietách*, v přípravě, vyjde 1997
22. Marjorie Senechal: *Quasicrystals and geometry*, Cambridge University Press, 1995

Jeden citát pro kuráž na závěr úvodu

Jeden z tvůrců kvantové mechaniky R. Jost vzpomíná na vznik kvantové teorie pole, matematicky víceméně nerigorosní, avšak úspěšné fysikální teorie – podle knihy *Simon-Reed: Metody současné matematické fysiky*:

> In the thirties, under the demoralizing influence of quantum perturbation theory, the mathematics required of a theoretical physicist was reduced to a rudimentary knowledge of the Latin and Greek alphabets.

A budete-li mít někdy při četbě textu pocit, že jste se s nějakým pojmem (který právě potřebujete) ještě nesetkali, použijte rejstřík!

[7] Velmi rozšířená americká učebnice ("for handicapped students", citujeme-li postesknutí jednoho z uživatelů této knihy nad úrovní amerických studentů, kterým přednášel. . .)

Část I
Zimní semestr

Poznámka k 2. vydání skript

V novém vydání skript jsou opraveny zjištěné chyby a překlepy; je též přidáno několik drobných dodatků.

Některé z partií textu – zvláště z těch, chápaných jako „rozšiřující" (pro čtenáře libovolného ročniku či věku) by si možná zasloužily přepracování či doplnění. Tyto partie však obvykle netvoří součást úvodních kursů. Mnohé části textu (a nejen ty vymezené symboly ($\sharp$) a ($\heartsuit$)) mohou tedy naopak být při četbě *vynechány*.

To lze doporučit zejména čtenáři bez speciálního zájmu o fyzikální aplikace (jako jsou mnozí studenti kursů matematiky a informatiky). Minimální smysluplnou podmnožinu textu mohou pak tvořit např. (místy mírně okleštěné) kapitoly 1, 3 – 8, 17 plus rudimenty kapitol 2, 9, 11, 13, 15, 16, 19. (Konzultujte přitom obsah knihy; popř. i strom závislosti na str. 26).

Z hlediska oborů, jako je čistá algebra a informatika, ovšem ve skriptech mnohé základní věci stále chybí (jako třeba důkladnější zmínka o jiných tělesech než je $\mathbb{R}$ či $\mathbb{C}$, speciálně o konečných tělesech) a důraz je místy položen jinam, než by potřeby těchto oborů vyžadovaly. Z dalších význačných aplikací LA zde pak chybí např. jakákoliv informace o teorii lineárních kódů.

Avšak samotný fakt, že lineární algebra má podstatný dopad i jinde než v sobě samé, je snad ilustrován dostatečně i tak.

Poznámka k 3. vydání skript

Krátký termín od rozebrání předchozího vydání do přípravy nového tisku neumožnil udělat plánované podstatnější změny a doplňky; bylo pouze opraveno několik dalších zjištěných chyb a přidáno jedno cvičení. Do budoucna plánujeme rozšíření knížky m.j. o obsáhlejší soubor řešených příkladů. Jakékoliv náměty k dalšímu vydání jsou vítány.

Při adaptaci textu 3. vydání LaTeXem nám poskytl velmi efektivní a rychlou pomoc student 2. ročníku Michal Belda; patří mu náš vřelý dík!

Kapitola 1

První seznámení s předmětem

Abstraktnost, logická výstavba a universálnost použití pojmů LA jsou rysy této teorie, které začátečník sotva ocení ihned. Ve snaze probudit jeho motivaci a pomoci mu přenést se přes počáteční abstraktní partie bez zjevných aplikací uvedeme hned teď některé příklady situací, při jejichž zkoumání předmět LA vyrostl a k jejichž popisu jsou pojmy a věty LA užitečným nástrojem (jak časem uvidíme).

Podnikneme zde krátkou úvodní exkursi do problematiky:

1. řešení soustav lineárních rovnic
2. výpočtu objemů (později i povrchů)
3. využití symetrií při zkoumání pravidelných těles.

Zmíníme se též o metodě „linearisace“ jako klíčové ideje mnohých přírodních věd.

Potřebný nadhled nad (1) bude později poskytovat teorie lineárních prostorů, nad (2) teorie determinantů a antisymetrických tensorů a nad (3) teorie grup.

1.1 Gaussova eliminace

Seznámíme se krátce s touto základní metodou řešení soustav lineárních rovnic. Soustavu m rovnic o n neznámých

$$a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$\vdots \tag{1.1}$$
$$a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

budeme zapisovat pomocí tabulky, tzv. matice (podrobněji budeme později mluvit o rozšířené matici soustavy)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right). \tag{1.2}$$

Vzpomeňme si nyní, jak jsme řešili soustavy dvou rovnic na střední škole: „vypočítáme“ z 1.rovnice

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - \sum_{i=2}^{n} a_{1i}x_i) \tag{1.3}$$

a dosadíme do dalších rovnic. V řeči matic to můžeme přehledněji vyjádřit takto (promyslete): odečteme vhodný násobek 1.řádku od ostatních řádků tak, abychom dostali novou, „ekvivalentní“ matici (dávající soustavu se stejným řešením jako dříve), mající pod členem a_{11} samé nuly.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \tilde{a}_{m2} & \cdots & \tilde{a}_{mn} & \tilde{b}_m \end{array}\right), \tag{1.4}$$

kde $\tilde{a}_{22} = a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}$ atd.

Pokud je $a_{11} = 0$, musíme postup modifikovat: přehodíme pořadí rovnic. Nelze-li ani takto docílit $a_{11} \neq 0$, tzn. celý první sloupec matice je nulový, můžeme zřejmě volit x_1 libovolně a fakticky potom řešíme pouze soustavu s maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right). \tag{1.5}$$

Analogicky pokračujeme dále – vynulováním sloupce pod $\tilde{a}_{22}$ (pokud lze docílit $\tilde{a}_{22} \neq 0$; jinak volíme x_2 libovolně a x_1 na závěr vypočteme z první rovnice poté, co jsme určili $x_3, \ldots, x_n$ ze zbývajících rovnic) atd. Uvedeným postupem dospějmeme nakonec k „ekvivalentní“ matici (vedoucí k témuž řešení) tvaru (promyslete podrobněji, procvičte na konkrétních příkladech)

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \times & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \Delta \\ & \times & \dots & \dots & \dots & \dots & \Delta \\ & & \times & \dots & \dots & \dots & \Delta \\ & & & & \times & \dots & \Delta \\ & & & & & & \cancel{\Delta} \\ & & & & & & \cancel{\Delta} \end{array}\right) \tag{1.6}$$

kde křížky ($\times$) označují <u>zaručeně nenulové</u> prvky – někdy zvané pivoty (jejichž přílišná malost by ovšem nepříznivě působila na numerickou přesnost výsledku[1]), od nichž nalevo jsou samé nuly, stejně tak jako nalevo od škrtnutým trojúhelníkem označených prvků na pravé straně, takže je-li některý z prvků označených $\cancel{\Delta}$ nenulový, soustava zřejmě <u>nemá</u> řešení. Jinak píšeme obecné řešení soustavy (1.6) a tedy i obecné řešení výchozí soustavy takto:

Nechť poslední řádek, v němž existuje nenulový člen, je v pořadí k-tý, nechť $\tilde{a}_{kl}$ je příslušný pivot, tedy zleva první takovýto člen. (Nebudeme již psát další vlnovky.) Proměnné $x_{l+1}, \dots, x_n$ <u>volíme nyní libovolně</u>; proměnnou x_l <u>dopočteme</u> z rovnice

$$\tilde{a}_{kl}x_l + \tilde{a}_{k,l+1}x_{l+1} + \dots + \tilde{a}_{kn}x_n = \tilde{b}_k. \tag{1.7}$$

Další postup „směrem nahoru“ je analogický, čtenář si ho zkusí promyslet sám! (Proměnné x_j, u nichž se <u>nikdy</u> nevyskytne „pivotní“ koeficient typu $\times$, libovolně volíme; ostatní proměnné x_j postupně (pro klesající indexy) dopočítáváme z rovnic

$$\tilde{a}_{ij}x_j + \sum_{k=j+1}^{n} \tilde{a}_{ik}x_k = \tilde{b}_i, \tag{1.8}$$

kde $\tilde{a}_{ij}$ je „pivotní“ koeficient.)

[1] Načrtli jsme jen nejzákladnější schema metody, která je široce používána a jejíž použití má mnoho dalších, zvláště numerických, aspektů, kterými se zde vůbec nezabýváme.

1.2 Řešení soustav rovnic a objemy těles

Omezíme se pro názornost na případ tří rovnic pro tři neznámé. Označme s_1, s_2, s_3 sloupce matice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \text{tedy} \quad s_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \quad \text{atd.} \tag{1.9}$$

Chceme řešit soustavu napsanou ve vektorovém tvaru takto:

$$x_1 s_1 + x_2 s_2 + x_3 s_3 = b \quad \text{kde} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}. \tag{1.10}$$

Pro jakékoli tři vektory $a, b, c \in \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zaveďme označení $V(a, b, c)$ pro objem rovnoběžnostěnu R vymezeného vektory a, b, c tzn. tělesa tvaru

$$R(a, b, c) = \{v = x_1 a + x_2 b + x_3 c \mid x_i \in (0, 1)\}. \tag{1.11}$$

Podle známého vzorce pro objem („základna krát výška") snadno ověříme platnost vztahů – (za b dosadíme $\sum x_i s_i$, promyslete a nakreslete si, co znamená, že výška nemění svou velikost při přechodu od rovnoběžnostěnu $R(s_1, s_2, b)$ k rovnoběžnostěnu $R(s_1, s_2, x_3 s_3)$)

$$V(s_1, s_2, b) = x_3 V(s_1, s_2, s_3) \tag{1.12}$$

(a podobně pro x_1, x_2.) Tedy platí vzorec

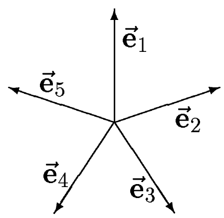
$$x_3 = \frac{V(s_1, s_2, b)}{V(s_1, s_2, s_3)}. \tag{1.13}$$

Jde o **Cramerovo pravidlo**, s nímž se setkáte v kapitole o determinantu.

1.3 Výpočet objemu pravidelného dvacetistěnu

Už Pythagorejci měli za emblém pravidelný pětiúhelník, obrazec, jehož podivuhodné vlastnosti byly skryty obyčejným smrtelníkům (a některé z nich i samotným Pythagorejcům, jak uvidíme později v kapitole o Penroseově pokrytí) a jehož zkoumání musí předcházet studiu dvacetistěnu. Uvidíme, jak symetrie pomáhá v řešení této úlohy.

Spočteme nejprve číslo $x = \cos 2\pi/5 = \cos 72^\circ$. Pohledem na pravidelný pětiúhelník s jednotkovými vektory $\vec{\mathbf{e}}_i$



CVIČENÍ. Nakreslete podobnou hvězdici, ovšem z vektorů $\vec{\mathbf{e}}_1 + \vec{\mathbf{e}}_2$ a podobně. Kolikrát větší rozměry bude mít, tj. kolik je $\|\vec{\mathbf{e}}_1 + \vec{\mathbf{e}}_2\| \,/\, \|\vec{\mathbf{e}}_1\|$?

zjistíme, že (odůvodněte podrobně; všimněte si, že ve výrazu níže pracujeme celkem s pětadvaceti dvojicemi vektorů, z nichž deset je „blízkých“, jako např. 1 a 2, a deset je „dalekých“, jako např. 1 a 3)[2]

$$0 = \|\vec{\mathbf{e}}_1 + \vec{\mathbf{e}}_2 + \vec{\mathbf{e}}_3 + \vec{\mathbf{e}}_4 + \vec{\mathbf{e}}_5\|^2 = 5 + 10\cos\frac{2\pi}{5} + 10\cos\frac{4\pi}{5} = \tag{1.14}$$

$$= 5 + 10x + 10(2x^2 - 1), \tag{1.15}$$

tedy $x = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1) = \frac{\tau}{2}$, kde τ je tzv. **zlatý řez**[3]

$$\tau \approx 0.618, \quad \tau^2 + \tau = 1 \quad \text{čili} \quad \tau^{-1} = \tau + 1. \tag{1.16}$$

O „magických“ vlastnostech tohoto čísla se lze poučit v knihách o teorii čísel.

Podobné pozorování platí i pro pravidelný <u>dvacetistěn</u>, mající jak známo 12 vrcholů, které dále ztotožníme s vektory $\vec{\mathbf{e}}_1, \ldots \vec{\mathbf{e}}_{12}$ vycházejícími z počátku ve středu tělesa. Doporučujeme zapůjčit si nebo lépe sám si vyrobit zmíněný dvacetistěn.

Dva vrcholy dvacetistěnu totiž buď splývají, nebo jsou protilehlé a nebo jsou v posici „blízké“ či „daleké“, přičemž obou druhů dvojic je po třiceti; každý z dvanácti vrcholů má pět „blízkých“ sousedů a stejně tak pět „dalekých“, součin však dělíme dvěma, abychom nezapočetli každou dvojici dvakrát. Jelikož $\|\vec{\mathbf{e}}_1 + \ldots + \vec{\mathbf{e}}_{12}\| = 0$, lehce ověříme, že $\cos\varphi$ se liší jen

[2]Nezapomeňte, že $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$.

[3]Zlatý řez se vykládá jako poměr stran obdélníka, který jde rozdělit na jemu podobný obdélník a čtverec. Nedivte se, že mnohý autor míní zlatým řezem převrácenou hodnotu ≈ 1.618. Zlatý řez je také (dokažte) limitou poměru sousedních členů **Fibonacciho posloupnosti**, v níž je každý člen součtem předcházejících dvou: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34\ldots$

ve znaménku, označuje-li φ úhel mezi dvěma body „blízké“ resp. „daleké“ dvojice vrcholů $\vec{\mathbf{e}}_i, \vec{\mathbf{e}}_j$. Spočteme tento úhel φ mezi blízkými vrcholy:

Volme očíslování dvanácti vrcholů tak, aby vektor

$$\vec{\mathbf{e}}_1 + \vec{\mathbf{e}}_2 + \vec{\mathbf{e}}_3 + \vec{\mathbf{e}}_4 + \vec{\mathbf{e}}_5 \tag{1.17}$$

byl kladným násobkem $\vec{\mathbf{e}}_6$. Pak je (ověřte!)

$$\|\vec{\mathbf{e}}_1 + \vec{\mathbf{e}}_2 + \vec{\mathbf{e}}_3 + \vec{\mathbf{e}}_4 + \vec{\mathbf{e}}_5\|^2 = 5 + 10\cos\varphi - 10\cos\varphi \tag{1.18}$$

(v dané pětici je pět blízkých a pět dalekých dvojic). Z druhé strany, zprojektujeme-li $\vec{\mathbf{e}}_1, \dots, \vec{\mathbf{e}}_5$ do $\vec{\mathbf{e}}_6$, platí

$$\|\vec{\mathbf{e}}_1 + \vec{\mathbf{e}}_2 + \vec{\mathbf{e}}_3 + \vec{\mathbf{e}}_4 + \vec{\mathbf{e}}_5\|^2 = (5\cos\varphi)^2 = 25\cos^2\varphi. \tag{1.19}$$

Tedy $\cos\varphi$ splňuje rovnici

$$25\cos^2\varphi = 5, \quad \text{tedy} \quad \cos\varphi = 5^{-1/2} \tag{1.20}$$

a objem již poměrně snadno dopočteme (proveďte!).

CVIČENÍ. Spočtěte i objemy dalších pravidelných (Platónových) těles pro známou vzdálenost vrcholů od těžiště. Těmito tělesy jsou čtyřstěn, krychle, osmistěn a dvanáctistěn; dvanáctistěn má pětiúhelníkové stěny.

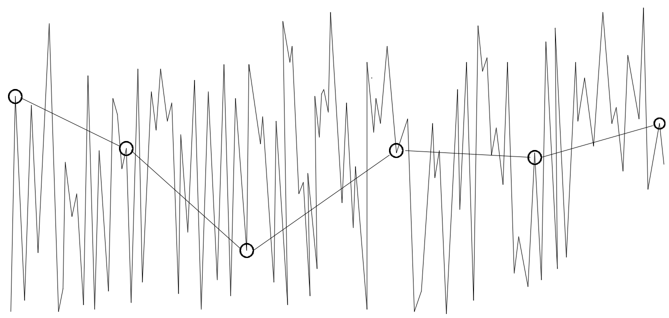
Několik poznámek o principu linearisace

Linearisujeme-li problémy „jedné“ nezávislé proměnné, dostáváme z hlediska LA objekty vcelku triviální, totiž jednorozměrné. Tedy LA nemá příliš co říci ke klasickému infinitesimálnímu počtu jedné proměnné.

Jiná situace nastane při zkoumání funkcí více proměnných. Tam už většina význačnějších tvrzení má své lineárně algebraické „jádro“; pokud by se LA vyučovala jen jako pomocník pro analýzu, bylo by logičtější s algebrou začít až v letním semestru 1.ročníku. I v analýze uslyšíte mnoho o pojmu, který se definuje jako „lineární zobrazení...“, totiž o diferenciálu.

Mnohé fysikální zákony (Hookův, Ohmův...) jsou linearisovanou versí zákonů přesnějších, o to však složitějších, totiž nelineárních. Nejpozději zanedlouho uvidíte, že celé fysikální teorie (nerelativistickou mechaniku) lze chápat jako „linearisované verse“ teorií úplnějších (teorie relativity).

Na závěr jedna odstrašující poznámka. „Linearisované“ obrázky, jako graf níže zobrazující typický záznam změn průměrných ročních teplot v období 10 000 let,



které často tvoří grafický doprovod nejrůznějších zkoumaných situací (ať už jde o kolísání cen akcií na burse, zápis teploty pacienta nebo cokoli jiného) svědčí obvykle o nevelké matematické gramotnosti autora. Máme-li k disposici jen údaje označené kolečkem, jsou domalované lineární spojnice mezi nimi jenom překážejícím balastem. Kritický uživatel dané informace by měl tyto lineární spojnice nejdříve umazat (a teprve poté si případně může položit otázku, jaký typ křivky je vhodné proložit danými daty – či „podél nich“).

Linearisovat problém má totiž smysl, jsou-li naměřené hodnoty rozprostřeny „dostatečně hustě“ (vzhledem k rychlosti změny derivace zkoumané závislosti).

Jako příklady extrémně chaotických funkcí vzpírajících se i při značně hustém výběru měřených dat rozumné linearisaci uveďme nedávno publikovaný graf změn průměrné roční teploty ve čtvrtohorách (získaný r. 1993 na základě měření průřezu grónského ledovce), kde vhodný krok pro linearisaci problému nečiní miliony ale pouhé desítky let(!) či – v jiné škále – grafy různých elektrických potenciálů a jiných (i nefysikálních) časových veličin popisujících činnost mozku (linearisovat a tudíž jednoduše predikovat třeba proměny nálad některých psychicky nevyrovnaných osob se jeví jako marné snažení někdy i v rozmezí pouhých vteřin(!); k porozumění takovýmto proměnlivým veličinám je lépe opřít se o poznatky z teorie chaosu či stacionárních náhodných procesů). Krátce, situace, kdy předložené údaje mají „hustotu nedostatečnou pro rozumnou linearisaci“, jsou velmi časté. Doplňující údaje buď nemáme, nebo se domníváme, že je nepotřebujeme – a návyk ze školy kreslit přímky „jako podle pravítka“ může přesto přetrvávat.[4]

[4]Autorům se bohužel nepodařilo v této filipice proti lomeným čarám být důslednými: při kreslení chaotického grafu nahoře byl použit program TEXCad, prokládající lomenou

Pro nerozumné uživatele čehokoliv (ať je to tužka a pravítko, LA, statistika či jiná partie matematiky) platí, že nejlépe by bylo jim dotyčný nástroj zcela utajit.

POZNÁMKA. Poněkud rafinovanějším způsobem linearisace je „preparace dat metodou integrálních součtů". Ta je založena na poměrně prosté myšlence – že totiž primitivní funkce třeba i k velmi „divoké" funkci – jako na předchozím obrázku – už vypadá podstatně „hladčeji", takže přikládat pravítko ke grafu primitivní funkce už smysl mít může (vezmeme-li pak primitivní funkci ještě jednou, bude situace ještě lepší!)

Výrok typu „graf roste" má pak už dobrý smysl (jenomže je zase obtížnější říci, čeho že graf to vlastně roste). Nejvědečtěji daná metoda vypadá, přičteme-li k původně zkoumané funkci konstantu tak, aby střední hodnota byla rovna nule na daném intervalu. Primitivní funkce pak „může začínat i končit v nule", tzn. vypadá obvykle už jako „luk", popřípadě má těch ohybů trochu více. A už lze činit závěry typu: od roku 1770 do roku 1850 se klima oteplovalo, pak ochlazovalo do roku 1910, pak zase ...

Úvodní poznámka o funkcionální analýze

Použití LA na nejrůznější problémy přírodních věd ve smyslu předchozí poznámky se dá shrnout do „hesla": místo složité funkce

$$f(x_1, \ldots, x_n) \tag{1.21}$$

zkoumejte její linearisaci v okolí daného bodu v $\mathbb{R}^n$.

Toto však není jediný způsob, jak LA vstupuje do jiných partií matematiky. Takto LA během 19.století vznikla, avšak použití uvedeného typu již netvoří nejpodstatnější část toho, jak LA interaguje se zbytkem matematicky nyní. Vyšší stupeň abstrakce nabízí disciplína zvaná **funkcionální analýza**. Ta pracuje s vícerozměrnými lineárními objekty (jako různé nekonečněrozměrné prostory funkcí) s použitím „názorných" pojmů známých z geometrie euklidovského prostoru. Tento přístup je velmi užitečný i pro získání potřebného nadhledu nad takovou partií, jako je klasický diferenciální a integrální počet. Pojmy funkcionální analýzy tvoří i základ soudobého jazyka kvantové teorie. Z tohoto a dalších důvodů budeme postupně čtenáři „vnucovat" funkcionálně-analytické myšlení i tam, kde by to zpočátku ani

čáru zvolenými body grafu...

neočekával. Uvidí třeba, že některé části analýzy vypadají z pohledu LA poněkud jinak a leckdy i jednodušeji – např. Taylorův vzorec jako exponenciála derivace. Uvidí elegantní popis situací jako je např. teorie řešení soustav lineárních diferenciálních rovnic prvého řádu s konstantními koeficienty, kde bez znalosti LA (Jordanova tvaru) nelze problému vůbec porozumět, pokud porozuměním míníme více než naučení se „kuchařce“ odněkud „spadlých“ předpisů.

Další poznámky o předmětu

LA je mnohem mladší než třeba analýza. Zatímco jádro klasického „kalkulu“ vzniklo v 17. a 18.století, některé zcela základní pojmy LA vznikly ani ne před sto lety, a partie LA blízké svým pojetím funkcionální analýze jsou jenom pár desítek let staré. (Některé ještě ani nepronikly do mnoha standardních učebnic.)

Současný bouřlivý rozvoj geometrie v souvislosti s teoretickou fysikou jistě dále obohatí obsah předmětu LA v blízké budoucnosti; srovnatelně rychlý rozvoj (relativně vzhledem k historickému období) v analýze proběhl naposled snad někdy v osmnáctém století…

Znamená to také snad, že LA teprve čeká období zpřesňování a přebudování jejich základů v analogii s prací Bolzana, Cauchyho,… v základech analýzy? Asi nikoliv, což je dáno také odlišnou povahou obou předmětů: v algebře v jistém smyslu „není co zpřesňovat“ a cesta od názorného argumentu či úspěšné formální manipulace k precisnímu důkazu je zde mnohem přímočařejší než v analýze.

Přirovnejme analýzu resp. algebru k dvěma následujícím dětským činnostem: stavení hradu z písku (analýza) a sestavení hodin ze stavebnice (algebra). Výrok „hrad už je skoro hotov, zbývá pár věcí uhladit a zamést“ nemá při sestavování hodin protějšek: ozubená kolečka hodin do sebe prostě buď zapadají nebo ne („skoro zapadají“ je nesmysl). Tak je to i s důkazy v lineární algebře: jsme-li „skoro hotovi“, jsme obvykle již zcela hotovi, zatímco v analýze bývá někdy od „důkazu podle obrázku“ k přesnému důkazu ještě dlouhá cesta.

U našeho přirovnání můžeme říci: zatímco při výstavbě hradu z písku se názory na hotovost díla, vypracování detailů, úklid atd. mohou lišit podle nátury a pořádnosti jednotlivých učastníků stavby či přihlížejících, v případě konstatování „stavebnice je složena“ je možné hodnocení mnohem jednoznačnější.

Poznamenejme dále, že jsme v tato skripta vložili mnoho poznámek uvádějících i fakta, která zde *nejsou* dokázána. V takových případech nám šlo o uvedení některých snadno formulovatelných (nikoliv nutně snadno dokazatelných) tvrzení říkajících důležitou *dodatečnou informaci* o právě probíraném předmětu a jeho souvislostech. Očekáváme námitky typu „ideje a náčrtky důkazů nepatří do učebnic, a vůbec už ne do učebnic pro začátečníky“ a předesíláme, že s takovýmito námitkami nesouhlasime; k vysvětlení tohoto stanoviska si roztřiďme tvrzení a věty objevující se v textu do několika skupin:

1. věty základní důležitosti pro další text, s výraznou a netriviální myšlenkou důkazu (leckdy i nesoucí název autora(ů)): tyto dokazujeme vždy, někdy i více způsoby (existuje-li více možností důkazu). Takovýchto vět je jenom 5-10 v každém semestru (a každý adept na známku alespoň 3 by je měl řádně zaregistrovat !).

2. věty řekněme standardní, jejichž důkaz (po uvedení případného návodu) vyžaduje jistou samostatnou ale „přímočarou“ námahu – jako pozorné pronásobení sum v součinech apod. – důkaz takovýchto vět často přenecháme čtenáři; některé z těchto vět mohou případně mít snadno pochopitelný význam i pro začátečníka, který v takovém případě může zpočátku formální důkaz přeskočit a vrátit se k němu později po zdokonalení svých formulačních dovedností. Důležitost vět tohoto typu je obvykle spíše v tom, že pomáhají ujasnit si roli základních *definic* dané oblasti.

3. věty sice důležité jinde, ale okrajového významu v uvedeném textu (nenavazuje se na ně dále). Zde se snažíme uvést leckdy alespoň myšlenku důkazu, ne však vždy. Některá fakta jsou prostě zajímavá dokonce i bez důkazu! (Nematematici to vědí...) Bylo naší vědomou snahou vložit takto do textu nejrůznější doplňující látku související s LA (i když nemůže být ani řeči o úplnosti našeho výběru). Současná matematika (a to i ta „skutečně nepostradatelná“ třeba pro fysika) je totiž tak rozsáhlá disciplína, že zvládnout ji pořádně ve smyslu dokonalého i formálního ovládnutí technických detailů je úkol prakticky nezvládnutelný pro jedince. Často je ale potřebné mít třeba jen letmé povědomí o užitečných pojmech a metodách – už proto abychom věděli, s čím se třeba potřebujeme v budoucnu více seznámit. Máme-li volit mezi „nepořádnou znalostí“ (třeba i jednoduchou karikaturou jinak mnohem

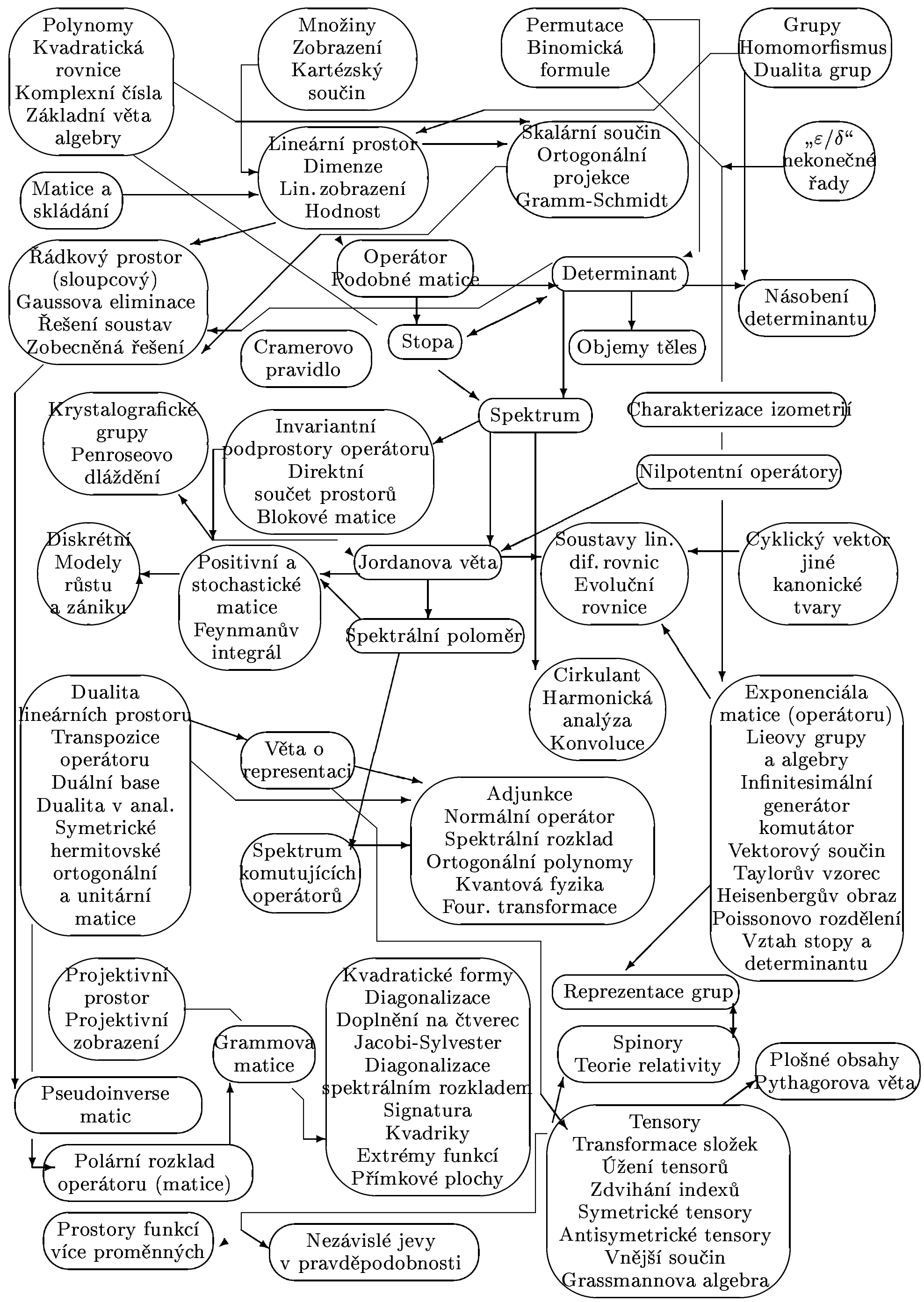
formálně složitější situace) nebo úplným ignorováním důležitých fakt, volíme první možnost.

V kontrastu k často vyslovovanému názoru, že jádrem matematiky jsou věty a (přesné!) důkazy, chceme zdůraznit i důležitost znalostí vhodných *metod* (a tedy vlastně i vhodných definic). Zastáváme názor, že metoda je důležitější než věta – z jedné metody volbou různých předpokladů a různých situací často dostáváme různá tvrzení. Opačný případ, kdy jeden důležitý fakt se dokazuje *různými metodami*, je sice velice pozoruhodný, ale podstatně méně častý! Metodu lze vyložit leckdy i v jednoduché karikatuře; výraznou metodu si lze zapamatovat mnohem snadněji než technické předpoklady (ty koneckonců metoda leckdy přirozeně nastolí již sama od sebe); ještě horší je, že někdy komplikované předpoklady zatemní výraznou metodu případně tuto metodu tak „znetvoří“ (špatně zvolené, někdy i příliš obecné předpoklady věty např.) tak, že neuvidíme později možnost uplatnit původní jasnou metodu i v situacích, které ambiciósně formulovaná obecná věta jaksi nepředvídala…

Např. člověk i letmo seznámený se současnou teoretickou fysikou ví, jak mnohostranné použití často ve velmi komplikovaných situacích má ona velmi jednoduchá metoda integrace zvaná „per partes“. Viz koneckonců i uvedená skripta: co mají společného třeba ortogonální polynomy, distribuce apod. kromě onoho jediného magického slova per partes? Myslet si, že jedna abstraktní věta z teorie nějakého „hodně obecného“ integrálu všechny tyto případy zahrne, je dosti absurdní a hlavně neužitečná představa; pokud by je třeba i momentálně zahrnula, tak se nepochybně brzy objeví nějaká další odlišná aplikace. (Mimochodem to, co mají třeba distribuce a ortogonální polynomy společného, se spíše vyjádří jazykem LA – pojmem transponovaného či adjungovaného operátoru – než jazykem teorie integrálu, který sotva zahrne dvě takto odlišná použití metody per partes do jedné věty.)

PODĚKOVÁNÍ. Autoři děkují četným kolegům (včetně mnohých studentů MFF UK), kteří věnovali svůj čas na seznámení se s některými partiemi skript a jejichž kritické poznámky a náměty leckdy zanechaly stopu na obsahu těchto skript. Zvláštní díky patří recensentům prof. J. Formánkovi, DrSc. a dr. M. Znojilovi, CSc. Další reakce na obsah i formu těchto skript budou vítány; nejlépe na elektronických adresách uvedených v závěru knihy.

Lineární algebra a souvislosti, 1994



Kapitola 2

Kdo je grupa a těleso

2.1 Grupa

Tato kapitola, striktně vzato, ještě nepatří do lineární algebry. Pojem grupy je však natolik ústředním pojmem algebry (a celé matematiky), že se mu samozřejmě nemůžeme vyhnout. Naopak, budeme se snažit tento pojem co nejvíce ilustrovat v průběhu celého kursu LA. Zde uvedeme jen několik nejzákladnějších pojmů.

Začněme tedy konečně výklad stylem věta, důkaz,...

<u>Definice grupy.</u> Množinu $\mathbb{G}$, na níž je definována <u>binární operace</u> tzn. zobrazení

$$\{(a,\, b) \mapsto a + b \text{ resp. } ab \text{ resp. } a \circ b\} : \mathbb{G} \times \mathbb{G} \to \mathbb{G} \tag{2.1}$$

nazýváme **grupou**, platí-li vztahy

1. $\forall a, b, c \in \mathbb{G} \quad a + (b + c) = (a + b) + c$ resp. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (asociativita).

2. $\exists 0$ resp. $1 \in \mathbb{G}$ (takzvaný nulový či neutrální prvek), že $\forall a \in \mathbb{G} \;\; a + 0 = 0 + a = a$ resp. $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

3. $\forall a \in \mathbb{G} \quad \exists b$ (tzv. opačný či inverzní prvek, píšeme potom $b = -a$ resp. $b = a^{-1}$) takový, že $a + b = b + a = 0$ resp. $ab = ba = 1$.

Značíme-li operaci jako $+$, mluvíme o **aditivní** grupě, píšeme-li ji jako násobení, jde řeč o grupě **multiplikativní**, jindy jde o „komposici“ apod.

CVIČENÍ. Dokažte jedinečnost neutrálního a inversního prvku.

DEFINICE. Grupu nazvěme **komutativní** nebo **Abelovou**, je-li $\forall a, b \in \mathbb{G} : \quad a + b = b + a$. (Znak „+“ jsme vyhradili jen pro Abelovy grupy.)

DEFINICE. Podmnožina $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{G}$, která je uzavřena na binární operaci grupy $\mathbb{G}$ a unární operaci inverse, se nazývá **podgrupou** $\mathbb{G}$. Podgrupa $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{G}$ je **normální** podgrupou $\mathbb{G}$, platí-li

$$\forall g \in \mathbb{G} \quad g \cdot \mathbb{P} \equiv \{g \cdot p,\, p \in \mathbb{P}\} = \{p \cdot g,\, p \in \mathbb{P}\} \equiv \mathbb{P} \cdot g \tag{2.2}$$

Třídy $a \cdot \mathbb{P} \equiv \{a \cdot p,\, p \in \mathbb{P}\}$ lze násobit (pro normální podgrupu $\mathbb{P}$!) podle vzorce $(a \cdot \mathbb{P}) \cdot (b \cdot \mathbb{P}) = ((a \cdot b) \cdot \mathbb{P})$. Tento vzorec je korektní právě tehdy, jde-li o normální podgrupu, neboť možnost napsat jakýkoliv součin $apbp'$ též ve tvaru abp'' je ekvivalentní možnosti napsat jakýkoliv prvek pb též ve tvaru $bp''p'^{-1} = bp'''$. Vzniklou grupu nazýváme **faktorgrupou** grupy $\mathbb{G}$ podle $\mathbb{P}$ a označujeme $\mathbb{G}/\mathbb{P}$. (Tento pojem, jakož i následující pojem direktního a polodirektního součinu, bude pro začátečníka asi velmi abstraktní a proto těžký; je možno ho při prvním čtení vypustit.)

JINÁ DEFINICE. Požadavek $\forall g \in \mathbb{G} \quad g \cdot \mathbb{P} = \mathbb{P} \cdot g$ lze přepsat také jako $\forall g \in \mathbb{G} \quad g \cdot \mathbb{P} \cdot g^{-1} = \mathbb{P}$, což je důvod, proč normální podgrupě také říkáme **invariantní** (míněno vůči tzv. **vnitřním automorfismům** $\phi_g : p \mapsto gpg^{-1}$). $\mathbb{P}$ je tedy normální podgrupou $\mathbb{G}$ právě tehdy, když

$$\forall g \in \mathbb{G},\, p \in \mathbb{P} \quad gpg^{-1} \in \mathbb{P}. \tag{2.3}$$

Tento vztah vyjadřuje $g\mathbb{P}g^{-1} \subseteq \mathbb{P}$, a jelikož platí i pro g^{-1}: $g^{-1}\mathbb{P}g \subseteq \mathbb{P} \Leftrightarrow \mathbb{P} \subseteq g\mathbb{P}g^{-1}$, je ekvivalentní $g\mathbb{P}g^{-1} = \mathbb{P}$.

Pojem normální podgrupy by se nedočkal docenění bez zavedení následující konstrukce.

DEFINICE MORFISMU. Zobrazení $\phi : \mathbb{G} \to \widetilde{\mathbb{G}}$ mezi dvěma grupami nazveme **morfismem** nebo **homomorfismem**, přenáší-li grupovou operaci, tzn.

$$\phi(a \cdot b) = \phi(a)\tilde{\cdot}\phi(b), \qquad \phi(1) = \widetilde{1}, \qquad \phi(a^{-1}) = \phi(a)^{\widetilde{-1}} \tag{2.4}$$

Vlnka zde označuje binární operaci, unární operaci „vybrání inversního prvku“ nebo nulární operaci „vybrání neutrálního prvku“ v $\widetilde{\mathbb{G}}$. Budiž známo, že morfismus, který je **s**urjekcí, to jest funkcí „na“, se nazývá **epimorfismem** a **monomorfismem** je morfismus v případě, že funkce je **in**jekcí (tj. když je prostý, různým přiřadí různé). (Mnemotechnická pomůcka SEMI či MISE složená z počátečních písmen těchto zobrazení vám vždy připomene, které je které.) Je-li ϕ obé, to jest zobrazení je bijekcí, vzájemně jednoznačným přiřazením, mluvíme o **isomorfismu**.

DEFINICE JÁDRA. **Jádrem homomorfismu** $\varphi : \mathbb{G} \to \widetilde{\mathbb{G}}$ nazveme množinu vzorů neutrálního prvku z $\widetilde{\mathbb{G}}$. Dokažte, že jádro každého morfismu je normální podgrupou $\mathbb{G}$ a naopak, je-li $\mathbb{G}'$ normální podgrupou $\mathbb{G}$, je $\mathbb{G}'$ jádrem morfismu $\{x \mapsto x + \mathbb{G}'\} : \mathbb{G} \to \mathbb{G}/\mathbb{G}'$.

DEFINICE CENTRA. **Centrem grupy** $\mathbb{G}$ nazýváme její podmnožinu $\mathbb{Z}(\mathbb{G})$ těch prvků s, pro něž

$$\forall g \in \mathbb{G} \quad sg = gs, \tag{2.5}$$

a je to tedy podgrupa ($gs_1 = s_1g$, $gs_2 = s_2g \Rightarrow g(s_1s_2) = (s_1s_2)g$) a to dokonce normální, protože $gsg^{-1} = sgg^{-1} = s$.

DEFINICE PROSTOTY. Grupu nazýváme **poloprostou** (polojednoduchou), neobsahuje-li žádné vlastní[1] normální Abelovy podgrupy. Grupa je **prostá** (jednoduchá), neobsahuje-li žádné vlastní normální podgrupy. (U Lieových spojitých grup, diskutovaných dále, slovo „žádné“ musíme chápat jako „žádné kromě diskrétních“.)

PŘÍMÝ SOUČIN GRUP. Typickým příkladem grupy, která není prostá, je **direktní** neboli **přímý** (také kartézský) součin grup $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$. Jde o kartézský součin těchto grup s jednotkovým prvkem $(1_A, 1_B)$, inversním prvkem $(a,b)^{-1} = (a^{-1}, b^{-1})$ a s operací definovanou vztahem $(a_1, b_1) \circ (a_2, b_2) = (a_1 \circ a_2, b_1 \circ b_2)$. Její počet prvků je tedy roven součinu počtů prvků grup $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ (v případě spojitých grup je její dimense rovna součtu dimensí grup $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$).

Taková grupa má za svoji normální podgrupu jak grupu isomorfní $\mathbb{A}$ (s prvky $(a \in \mathbb{A}, 1_B)$), tak grupu isomorfní $\mathbb{B}$.

CVIČENÍ. Ilustrujte uvedené pojmy na následujících příkladech grup:

1. $(\mathbb{R}, +)$, její podgrupy $(\mathbb{Q}, +)$ a $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot)$, ... Existuje morfismus $\{x \mapsto e^x\} : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, protože $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$ a dokonce isomorfismus na grupu $(\mathbb{R}^+, \cdot)$.

[1] Vlastní znamená netriviální: Grupa má vždy dvě triviální normální podgrupy, sebe samu a grupu obsahující jen neutrální prvek.

2. „ruleta“ $\mathbb{Z}_n = \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1\}$ $(i \oplus j) = (i+j)$ modulo n. Je isomorfní multiplikativní grupě n čísel rovnoměrně rozestavěných po jednotkové kružnici, jedním z nichž je jednotka[2] : $\{a \in \mathbb{Z}_n \mapsto \exp(2\pi i a/n)\} : \mathbb{Z}_n \to$ podgrupa $\mathbb{C}$.

3. „spojitá ruleta“ $\mathbb{U}_1 = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$ s násobením komplexních čísel. Lze sestrojit morfismus $\{x \mapsto \exp(ix)\} : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{U}_1, \cdot)$ nebo isomorfismus z aditivní grupy tříd reálných čísel lišících se o násobek 2π (sčítání modulo 2π).

4. Permutace na množině & skládání, viz dále.

5. Přemístění čili shodnosti v elementární geometrii a různé podgrupy na způsob symetrie těles (např. **isometrie dvacetistěnu**), symetrie krystalů apod.

6. **Krystalografické grupy**, v dvojrozměrném případě symetrie dláždění. Pohleďme na obrázky ve speciální kapitole (a na text na straně 122) věnované těmto otázkám a charakterisujme grupy tam pojmenované „prostorová“, „bodová“ neboli „krystalografická“ a „stacionární“.

7. Pojem grupy je ústředním matematickým pojmem i jinde ve fysice. Ve **standardním modelu** elementárních částic, to jest teorii kvarků, leptonů a zprostředkujících bosonů, je důležitá grupa symetrií $\mathbb{SU}_3 \times \mathbb{SU}_2 \times \mathbb{U}_1$, různé teorie velkého sjednocení se snaží tuto grupu vyložit jako podgrupu grupy větší, např. $\mathbb{SU}_5$ a heterotické stringy se ji snaží docílit z grupy $\mathbb{SO}_{32}$ nebo $\mathbb{E}_8 \times \mathbb{E}_8$.

8. Historicky se pojem grupy poprvé objevil začátkem 19.století `(to jest po roce 1800)` při zkoumání (ne)řešitelnosti algebraických rovnic stupně alespoň pátého. Galois svůj objev sepsal přes noc, následující den měl souboj kvůli něžnému pohlaví a nechal se odprásknout.

9. Radujme se, že v posledním desetiletí byla dokončena (snad) klasifikace velké třídy grup, totiž konečných grup, do níž patří grupy krystalografické, grupy permutací, stejně jako grupa symetrií dvacetistěnu a jiných těles a další, také grupa všech operací, které lze provést s **Rubikovou kostkou**. Klasifikace konečných grup je dílem srovnatelným (i vahou příslušné knihy) s atlasem světa a je výsledkem enormního úsilí několika generací algebraiků.

[2] Připomínáme, že $\exp(ix) = \cos x + i \sin x$.

Konečné Abelovy grupy. Neskonale prostší úlohou je klasifikace konečných komutativních grup – dokonce všech konečně generovaných (s konečným generátorem), kterým porozumíte sami, zobecníte-li pojem direktního součinu na libovolné množství činitelů.

Věta. Každá konečná Abelova grupa je isomorfní přímému součinu vhodných cyklických grup, které jdou dokonce volit tak, že každá z nich má počet prvků rovný mocnině prvočísla (pozor, řády grup-činitelů se mohou opakovat).

$$\mathbb{G} = \mathbb{Z}_{p(1)^{n(1)}} \times \mathbb{Z}_{p(2)^{n(2)}} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{p(N)^{n(N)}}, \quad \text{např. } \mathbb{Z}_{75} = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{25}. \tag{2.6}$$

Všimněte si, že např. grupa $\mathbb{Z}_4$ není isomorfní přímému součinu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ – například proto, že druhá mocnina každého prvku druhé z grup (nikoliv však první) je jednotkový prvek.

Definice. Řekneme, že množina $A \subseteq \mathbb{G}$ **generuje** grupu $\mathbb{G}$, jestliže

$$\forall g \in \mathbb{G} \quad \exists n\, \exists a_1, a_2, \ldots, a_n, \text{ že } \forall i (a_i \in A \text{ nebo } a_i^{-1} \in A) \text{ a že} \tag{2.7}$$

$$g = a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n. \tag{2.8}$$

(Některá a_i mohou být stejná.) Grupa generovaná jednoprvkovou množinou se nazývá **cyklická** (např. $\mathbb{Z}_n$ nebo $\mathbb{Z}$) a je vždy komutativní, což dokažte.

2.2 Permutace

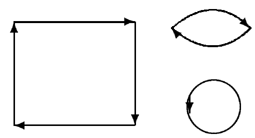
Motto.

Máte permutace rádi? Rádi máte permutace? Permutace rádi máte?
Rádi permutace máte? Permutace máte rádi? Máte rádi permutace!

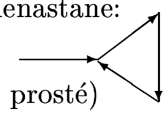
Permutace je vzájemně jednoznačné (tj. prosté a „na“) zobrazení obvykle konečné množiny na sebe.

Pojem. Permutaci $p : X \to X$ označíme za **transposici**, existují-li $x \neq y \in X$ takové, že $p(x) = y$, $p(y) = x$ a jinak $p(z) = z$ pro $z \in X \setminus \{x, y\}$.

Definice. Jakoukoli uspořádanou n-tici $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, pokud $p(x_i) = x_{i+1}$ pro $i = 1, \ldots, n-1$ a $p(x_n) = x_1$ nazveme **cyklem** permutace p délky $n-1$.



Tato situace pro
permutace nenastane:



(nebylo by prosté)

<u>Definice.</u> Uspořádáme-li prvky X do posloupnosti $(1, 2, \ldots, n)$ (kde n je počet prvků X), můžeme permutaci znázornit tabulkou

1	2	3	4	...	n
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	...	$\downarrow$
p(1)	p(2)	p(3)	p(4)	...	p(n)

Každou dvojici typu $i < j$, kde $p(i) > p(j)$ nazveme **inversí** tabulky (permutace). (Budeme mluvit o i, j-inversi.) Šipky a rámečky budeme nadále vynechávat.

Tři ekvivalentní definice znaku (znaménka) permutace

- $\text{znak}_1 p = (-1)^{\text{počet inversí p}}$
- $\text{znak}_2 p = (-1)^{\text{suma délek cyklů p}}$, tedy $(-1)^{\text{počet cyklů liché délky}}$
- $\text{znak}_3 p = (-1)^{\text{k}}$, kde k je počet transposic T_i nutných k sestavení permutace: $p = T_1 \circ \ldots \circ T_k$

<u>Věta.</u> Pojem **znaku permutace** je dobře definován a <u>všechny tři</u> definice určují totéž. Permutacím s kladným resp. záporným znakem (znaménkem) říkejme **sudé** resp. **liché**.

<u>Důkaz.</u>

1. $\text{znak}_1 = \text{znak}_3$: *Základní skutečností, již je třeba dokázat, je, že přidáme-li k permutaci S transposici T, změní se počet inversí o liché číslo. Nechť tedy $P = S \circ T_{ij}$, kde T_{ij} je transposice měnící prvky $i \neq j$. Pak má permutace P tabulku, v níž je v druhém řádku proti permutaci S vyměněno i-té a j-té číslo. Inverse i, j buď zmizí nebo se objeví (v P proti S, to je to „liché číslo“), inverse, kterých se neúčastní ani i ani j,*

zůstanou a u inversí typu i, a a a, j (kde a je libovolný prvek tabulky) se buď nic nezmění, nebo obě zmizí, nebo obě vzniknou, nebo jedna vznikne a jedna zmizí.

Z toho plyne nejen rovnost znaků, ale i jednoznačnost definice znak_3, *protože* znak_1 *je definován jednoznačně.*

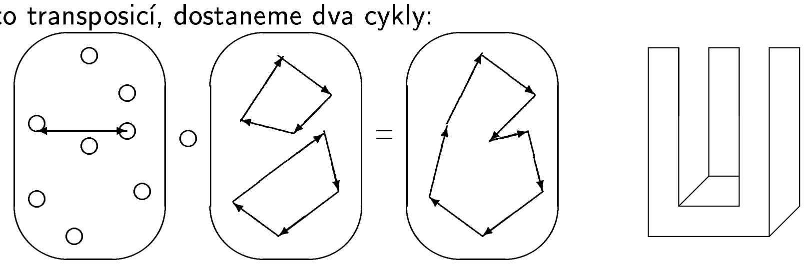
2. $\mathrm{znak}_2 = \mathrm{znak}_3$: *Každou permutaci lze složit z cyklů a každý cyklus délky n lze rozepsat na komposici n transposicí. Např.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \circ \tag{2.9}$$

$$\circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

Vyhodnocujeme-li pravou stranu, to jest zjišťujeme-li, co výsledná permutace přiřadí třeba trojce, je nutné nejprve přečíst, co přiřadí trojce ta úplně pravá permutace (4), druhá zprava přiřadí čtyřce čtyřku (4) a levá této čtyřce čtyřku. Proto nalevo napíšeme pod trojku čtyřku.

Můžete si také promyslet, kterak v permutaci, která obsahuje dva cykly, lze tyto dva cykly „slepit“, složíme-li tuto permutaci s nějakou transposicí, přehazující dva prvky, každý z jednoho cyklu, a naopak, složíme-li tento cyklus znovu s touto transposicí, dostaneme dva cykly:



Cvičení.

1. Sudé permutace tvoří normální podgrupu $\mathbb{A}_n$ grupy všech permutací $\mathbb{S}_n$. Co je faktorgrupou?

2. Dokažte tuto větu: Zobrazení $\{p \mapsto \mathrm{znak}\, p\} : P(X) \to \mathbb{Z}_2$ je morfismus grupy $P(X)$ všech permutací na množině X do multiplikativní grupy $\{+1, -1\}$ a ta je isomorfní cyklické dvojprvkové grupě $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ se sčítáním modulo 2. Sudé permutace jsou jádrem tohoto homomorfismu.

3. (Ještě ke grupám obecně.) Grupa všech otočení a posunutí trojrozměrného prostoru (uvažujme jen ty, které nemění orientaci) má za normální podgrupu grupu všech posunutí. Naopak podgrupa všech otočení fixujících počátek není normální. Ukažte, proč. (Dvě různá, vzájemně neinversní otočení nemohou dát dohromady identitu, ač je navíc skládáme s translacemi v jakémkoli pořadí.)

POLOPŘÍMÝ SOUČIN GRUP ($\sharp$). Poslední cvičení bylo typickým příkladem, kdy lze grupu $\mathbb{G}$ všech isometrií popsat jako **polopřímý součin** grup $\mathbb{A} \underset{\alpha}{\times} \mathbb{B}$, kde $\mathbb{B}$ je normální podgrupa (dělitel) $\mathbb{G}$ (v našem případě je $\mathbb{B}$ grupou všech translací) a $\mathbb{A}$ je isomorfní faktorgrupě $\mathbb{G}/\mathbb{B}$.

Polodirektní (semidirektní) součin grup $\mathbb{A} \underset{\alpha}{\times} \mathbb{B}$ je tedy kartézský součin těchto grup s operací definovanou podle

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2^{a_1}), \tag{2.11}$$

kde $b^a = \alpha(a)b$ je symbol účinkování grupy $\mathbb{A}$ na grupě $\mathbb{B}$ (čili některého zvoleného morfismu grupy $\mathbb{A}$ do grupy automorfismů $\mathbb{B}$, čili grupy všech isomorfismů $\mathbb{B}$ do sebe). Konkrétně v nahoře uvedeném příkladě si uvědomte, že rotace generuje přirozeným způsobem automorfismus grupy translací, který dané translaci přiřadí translaci ve směru příslušně otočeném. (Zvolíme-li triviální morfismus α, který každému a přiřadí identický automorfismus grupy $\mathbb{B}$, dostaneme obyčejný přímý součin $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$.) Každý si může nalézt inversní prvek k (a, b) (nebo alespoň ověřit, že jím $(a^{-1}, (b^{-1})^{(a^{-1})})$ je), jednotkový prvek je $(1_A, 1_B)$ a asociativitu ověříme zde:

$$\begin{aligned} [(a_1, b_1)(a_2, b_2)]\,(a_3, b_3) &= (a_1 a_2 a_3, b_1 b_2^{a_1} b_3^{(a_1 a_2)}) \\ (a_1, b_1)\,[(a_2, b_2)(a_3, b_3)] &= (a_1 a_2 a_3, b_1 (b_2 b_3^{a_2})^{a_1}) \end{aligned} \tag{2.12}$$

První složky obou výsledků se rovnají evidentně, ale rovnají se i druhé, poněvadž (upravujeme druhou komponentu v druhém výsledku) platí následující vzorce plynoucí z toho, že $\alpha(a)$ jsou automorfismy grupy $\mathbb{B}$.

$$(b_2 b_3^{a_2})^{a_1} = b_2^{a_1} (b_3^{a_2})^{a_1} = b_2^{a_1} b_3^{(a_1 a_2)} \tag{2.13}$$

Dalším příkladem polopřímého součinu je $2n$-prvková grupa Δ_n symetrií pravidelného n-úhelníka, která je polopřímým součinem (přesněji je mu isomorfní) grupy $\mathbb{Z}_2$ (hraje roli $\mathbb{A}$) a grupy $\mathbb{Z}_n$ (která je normální podgrupou Δ_n). ($\heartsuit$)

2.3 Řešil vy byste rovnici pátého stupně?

($\sharp$) Tuto sekci jsme nenazvali *Galoisova teorie*, abychom příliš nepodráždili případné na větší formální přesnost si potrpící znalce této teorie, ale přesto doufáme, že hloubavé studenty inspiruje k dumání o řešení rovnic vyšších stupňů.

Mnozí jsou přesvědčeni, že vzorec pro řešení algebraické rovnice libovolného stupně musí existovat. Proto hned na počátek předvedeme jeden důvod, který snad víru těchto osob v existenci vzorce podlomí:

Hledáme-li kořeny rovnice (vydělili jsme koeficienty u nejvyšší mocniny a zavedli střídavá znaménka)

$$x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} - cx^{n-3} + - \ldots = 0, \tag{2.14}$$

chceme vlastně rozložit tento polynom na součin **kořenových činitelů**

$$x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} - cx^{n-3} + - \ldots = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n). \tag{2.15}$$

Roznásobíme-li pravou stranu a uvážíme, že se musí rovnat všechny koeficienty u jednotlivých mocnin x, zjistíme, že a je součtem všech kořenů (kladně vzatým díky naší znaménkové konvenci), b je součtem všech součinů dvojic různých kořenů atd.

Všimněme si, že všechny koeficienty jsou invariantní[3] vůči libovolné permutaci kořenů, a toto bude zajisté platit pro jakékoli jejich funkce $(a^2 - b \ldots)$. Nezdá se vám těžké z nich získat výraz natolik asymetrický, jakým je x_1?

Jak to vlastně děláme u kvadratické rovnice

$$x^2 - ax + b = 0, \text{ kde } \quad a = x_1 + x_2, \quad b = x_1 \cdot x_2? \tag{2.16}$$

Umocníme a na druhou, dostaneme $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$, odečteme $4b$ a zbude nám $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$, což po odmocnění dává $\pm(x_1 - x_2)$. Přičtením a a vydělením dvěma dostáváme kořeny.

Z uvedeného postupu je snad zřejmé, že různé kořeny dává (jeden) vzorec proto, že volíme různé hodnoty odmocnin. (Zde, v případě druhé odmocniny, jde o dvojznačnost znaménka, n-tá odmocnina je n-značná funkce.)

Chcete-li si odvodit vzorce pro řešení rovnice třetího a čtvrtého stupně, doporučujeme vám sestavit si tabulky, kterak vyjádřit různé (vůči permutacím kořenů) invariantní polynomy kořenů, např.

$$x_1^2 + x_2^2 = a^2 - 2b. \tag{2.17}$$

[3] Nezmění se, permutujeme-li kořeny.

Pro kubickou rovnici pak pohledíte na výraz ($\omega = \exp 2\pi i/3$ je „primitivní hodnota“ $\sqrt[3]{1}$)

$$x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 \tag{2.18}$$

a uvědomíte si, že pokud se vám podaří vypočítat tento výraz z koeficientů, budete mít takřka vyhráno. (Přičtete k výrazu zrcadlový $x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3$ a součet kořenů $x_1 + x_2 + x_3$ a dostanete $3x_1$; vidíme, že vzorec pro kořen bude mít tvar součtu dvou třetích odmocnin a $a/3$.)

Zároveň třetí mocnina daného výrazu vypadá symetričtější vůči permutacím kořenů (a tak by se mohla lépe vyjadřovat pomocí koeficientů), není však úplně:[4]

$$\begin{gathered}(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6x_1x_2x_3 + \\ +3\omega(x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1) + 3\omega^2(x_1x_2^2 + x_2x_3^2 + x_3x_1^2).\end{gathered} \tag{2.19}$$

Přepsáním ω do tvaru $(-1/2 + i\sqrt{3}/2)$ dospějeme radostně ke stavu, kdy jediný vůči permutacím neinvariantní člen bude

$$i3\sqrt{3}/2(x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 - x_1x_2^2 - x_2x_3^2 - x_3x_1^2). \tag{2.20}$$

Ten ovšem již lze získat jako druhou odmocninu výrazu vůči všem permutacím invariantního podobně, jako $x_1 - x_2$ u kvadratické. (Pod oněmi sčítanými třetími odmocninami bude součet nějakých polynomů z koeficientů a jakési druhé odmocniny.)

Provedete-li naznačené kroky, dospějete k řešení: ještě je však užitečné substitucí $x = y - a/3$ rovnici převést do formy s nulovým koeficientem u x^2, což se projeví tím, že lze vyškrtat všechny členy obsahující a. Závěrem bude **Cardanův vzorec**: rovnice

$$y^3 + py + q = 0 \tag{2.21}$$

má kořeny (různá znaménka před druhou odmocninou právě zajišťují „zrcadlovost“ výrazů)

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}. \tag{2.22}$$

Podobně lze **v radikálech** (pomocí odmocnin) vyřešit i rovnici čtvrtého stupně (zkuste si to). Pro odvození je třeba znát triky pro řešení rovnice kubické. Zkusíte začít s výrazem

$$(x_1 + x_2 - x_3 - x_4). \tag{2.23}$$

[4] Výraz pak napíšeme ve tvaru třetí odmocniny této „třetí mocniny“.

Teprve potom trochu pochopíte, proč nelze řešit rovnice vyšších stupňů, shrnete-li postup řešení:

Z koeficientů jsme vždy sestavili (symetrický vůči $\mathbb{S}_n$) výraz, odmocnili, a dostali tak formuli F, která se násobí některou odmocninou z jednotky odpovídajícího stupně při určité permutaci kořenů. Našli jsme tak **charakter** (morfismus do $\mathbb{U}_1$) grupy dosud přípustných permutací. Tím, že k takovému výrazu přičteme výraz symetrický nebo zrcadlový, dostaneme vzoreček, který zcela mění hodnotu při permutacích, vůči kterým není F invariantní. Zajímáme se tedy jen o podgrupu permutací, které F nechávají beze změny (říkejme tomu **narušení grupy symetrií** $\mathbb{S}_n$ do $\mathbb{G}$, např. $\mathbb{A}_n$). Tato grupa $\mathbb{G}$ je normální podgrupou grupy předchozí, jako každé jádro charakteru. Tvorbou nových výrazů a dalším odmocňováním postupně narušujeme grupu symetrií daného výrazu až na 1_G, grupu obsahující jen identickou permutaci.

Narušení grupy probíhá $\mathbb{S}_2 \to \mathbb{A}_2 = 1_G$ resp. $\mathbb{S}_3 \to \mathbb{A}_3 \to 1_G$ resp. $\mathbb{S}_4 \to \mathbb{A}_4 \to \mathbb{B}_4 \to 1_G$, kde $\mathbb{B}_4$ je (lokální) označení pro čtyřprvkovou podgrupu $\mathbb{A}_4$ isomorfní $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ s prvky

$$(1,2,3,4) \to \{(1,2,3,4),(2,1,4,3),(3,4,1,2),(4,3,2,1)\}. \tag{2.24}$$

U vyšších stupňů postup nelze realisovat, poněvadž známá věta (obsažená v učebnicích algebry) říká, že grupa $\mathbb{A}_n$ je prostá pro $n > 4$. Prostotu $\mathbb{A}_5$ (vzorce pro rovnice vyšších stupňů by nám umožnily odvodit i vzorec pro rovnici pátého stupně) dokážete tak, že si uvědomíte, že případná normální podgrupa grupy $\mathbb{A}_5$ by musela (aby nebyla triviální) obsahovat alespoň jednu neidentickou permutaci p, která může mít v případě pěti prvků jednu z následujících struktur cyklů: cyklus délky 4, cyklus délky 2, dvě transposice. Aby však byla normální, musí obsahovat s permutací p všechny prvky gpg^{-1}, $g \in \mathbb{A}_5$, a tudíž (jak zjistíte) by musela obsahovat všechny prvky stejné struktury cyklů. Z požadavku uzavřenosti na komposici však vyvodíte, že musí obsahovat všechny permutace z $\mathbb{A}_5$ (a jde tedy stejně o triviální podgrupu), protože cyklus délky 2 lze zapsat jako komposici cyklů délky 4 apod. ($\heartsuit$)

2.4 Nehmotná tělesa

Seznámíme se s příklady algebraických struktur proti grupě bohatších o další operaci.

<u>Definice.</u> Množinu $\mathbb{M}$ se dvěma binárními operacemi „+“ a „·“ nazveme **okruhem**, platí-li

1. $a+b=b+a$
2. $(a+b)+c=a+(b+c)$
3. $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
4. $\exists 0: \quad a+0=0+a=a$
5. $\forall b \quad \exists a \quad a+b=0=b+a, \qquad (b=-a)$
6. $\exists 1: \quad a\cdot 1=1\cdot a=a$
7. $a(b+c)=ab+ac$
8. $(a+b)c=ac+bc$

<u>PŘÍKLAD.</u> Zobrazení na $\mathbb{R}^n$ mohu skládat („$\circ$“), ale i sčítat („$+$“): $(\varphi+\psi)(a):=\varphi(a)+\psi(a)$. Nejde však ještě o okruh (co není splněno?) Okruh dostaneme, bereme-li <u>lineární</u> zobrazení (viz dále). Podrobnější diskusi těchto a dalších příbuzných pojmů (obor integrity...) viz algebraické učebnice.

Nás bude dále nejvíce zajímat následující speciální případ okruhu:

<u>DEFINICE.</u> Okruh nazveme **tělesem**, pokud

$$\forall a \in \mathbb{M}\setminus\{0\} \quad \exists b \in \mathbb{M}, \text{ že} \tag{2.25}$$

$$ab=ba=1 \text{ a značíme } b=a^{-1}. \tag{2.26}$$

<u>PŘÍKLADY TĚLES.</u>

1. $\mathbb{Z}_p$, kde p je prvočíslo – cyklická grupa s p prvky: Tělesem $\mathbb{Z}_p$ zde míníme těleso čísel $\{0,\dots,p-1\}$ se sčítáním a násobením **modulo** p (zbytek po dělení p); je vidět, že v případě, že p není prvočíslo (např. 77), najdeme v $\mathbb{Z}_p$ nějaké s ním soudělné číslo (např. 14), jehož každý násobek (modulo p) bude dělitelný jejich největším společným dělitelem (zde 7) a tedy nemůže být roven jedničce (ze $\mathbb{Z}_p$); nenajdeme tedy inversní prvek. Naopak, je-li p prvočíslo, najdeme pro každé nenulové $i\in\mathbb{Z}_p$ inversní prvek (např. v $\mathbb{Z}_7$ jsou inversní prvky k 1,2,3,4,5,6 po řadě 1,4,5,2,3,6, třeba $5\cdot 3 \operatorname{modulo} 7=1$.)

2. Kromě $\mathbb{Z}_p$ s prvočíselným p lze sestrojit komutativní tělesa, která mají p^n prvků (mocnina prvočísla), které si lze představit jako polynomy nejvýše $(n-1)$-ního stupně s koeficienty ze $\mathbb{Z}_p$, se sčítáním modulo p v každém stupni x a násobením modulo nějaký vhodný (**ireducibilní**, to jest nerozložitelný na součin jednodušších) polynom n-tého stupně. (Operace modulo polynom n-tého stupně se provádí odečítáním součinu tohoto polynomu s nějakými x^i, dokud nedostaneme polynom nejvýše $(n-1)$-ního stupně.)

3. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$. Víte, jak se násobí a sčítají zlomky?

4. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ a jeho největší komutativní nadtěleso $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

   Proč nejsou užitečná třeba u-komplexní čísla $x = a + bu$, $u^2 = 1$? Inversní číslo k x lze psát jako $x^{-1} = (a - bu)/(a^2 - b^2)$ a neexistuje pro $x = a(1 \pm u)$ – z puristického hlediska tedy nesplňuje axiómy pro těleso.

   Zásadnější je, že taková u-komplexní čísla se rozpadají na dvě nezávislá reálná čísla; napíšeme-li dvě u-komplexní čísla ve tvaru

   $$x = a\frac{1+u}{2} + b\frac{1-u}{2}, \quad y = c\frac{1+u}{2} + d\frac{1-u}{2}, \tag{2.27}$$

   lze potom zapsat součin xy jako součet dvou složek, z nichž prvá je součinem jen prvých složek činitelů a druhá je součinem druhých:

   $$xy = ac\frac{1+u}{2} + bd\frac{1-u}{2} \tag{2.28}$$

   Přesně tak se násobí diagonální matice $\mathbf{x}$ resp. $\mathbf{y}$ s čísly a, b resp. c, d na diagonále. (Ověř uvedená fakta.)

5. Množina čísel typu $\{m + \sqrt{p} \,.\, n \,|\, m \in \mathbb{T},\, n \in \mathbb{T}\}$ pro $p \in \mathbb{T}$, $\sqrt{p} \notin \mathbb{T}$ pro dané těleso $\mathbb{T}$ (zprvu $\mathbb{T} = \mathbb{Q}$) jsou tělesa, hrající velkou roli v důkazech nemožnosti trisekce úhlu apod.

6. U kvaternionů se pozdržíme trošku déle.

Kvaterniony, největší nadtěleso tělesa $\mathbb{R}$, objev Williama Rowana Hamiltona (podle něho značíme těleso $\mathbb{H}$) z roku 1843. Patří k nejčastěji citovaným příkladům „záblesku génia“ v matematické literatuře, o čemž se, spolu s popisem výjimečné osobnosti W.R.Hamiltona, můžete dočíst např. v časopise Math. Intelligencer 11/2(1989).

Chceme-li mít těleso s více než jednou imaginární jednotkou (pouhé dvě nestačí, jak se dá nahlédnout), aby

$$i^2 = j^2 = k^2 = \ldots = -1, \tag{2.29}$$

předepíšeme-li ještě vztah níže a uvažujeme-li jen tři jednotky i, j, k

$$ij = k, \tag{2.30}$$

je už vše další určeno definicí tělesa, vztahy např.

$$ij = k \Rightarrow i^2 j = ik \Rightarrow \underline{-ik = j} \text{ apod.} \tag{2.31}$$

Kvaterniony jsou tedy „čísla“ tvaru

$$x = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k, \ \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \subseteq \mathbb{R} \tag{2.32}$$

sčítající se zřejmým způsobem a násobící se v souladu s distributivním zákonem a s pravidly (všimněte si nekomutativity)

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \ ij = k = -ji, \ jk = i = -kj, \ ki = j = -ik. \tag{2.33}$$

Všechna možná nadtělesa $\mathbb{C}$ s maximální dimensí jsou isomorfní s kvaterniony. Při důkazu se využívá vhodná volba kombinací ?-maginárních jednotek, aby byly splněny podmínky $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

Pokuste se najít x^{-1}. ... Nevíte-li, prozkoumejte číslo

$$\frac{\alpha - \beta i - \gamma j - \delta k}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2}. \tag{2.34}$$

V čitateli je **sdružený kvaternion**, ve jmenovateli čtverec jeho normy.

2.5 Cayleyova čísla

($\sharp$) Ještě větší „těleso“ než kvaterniony dostaneme, opustíme-li požadavek asociativity násobení. Každé **Cayleyovo číslo** neboli **oktonion** má svůj oboustranný inversní prvek. Známe-li distributivní zákon a přirozený zákon sčítání, tak jediné, co je třeba najít pro nalezení jejich struktury, je multiplikativní tabulka imaginárních jednotek.

Prozraďme hned na počátku, že algebra Cayleyových čísel (značme ji $\mathbb{O}$) má imaginárních jednotek sedm, je tedy osmirozměrným prostorem nad $\mathbb{R}$. Můžete si promyslet, proč v jiné dimensi nic podobného nefunguje.

Pokud se dozvíte, že obsahuje za své podtěleso kvaterniony (a že čtverec každé imaginární jednotky je -1), jistě vás symetricko-estetické důvody přivedou k víře, že kvaterniony obsahuje vícekrát: říkejme **kvaternionická trojice** trojici Cayleyových čísel (obvykle imaginárních jednotek), které se chovají jako i, j, k. Označíme-li imaginární Cayleyovy jednotky jako i, j, k, A, B, C, D, napadne nás, že (kromě ijk) také ABC mohou tvořit trojici. Hned se ale dostaneme do nesnází, protože součiny iA a iB musí být oba $\pm D$ (chceme-li, aby součinem dvou imaginárních jednotek byla plus minus jiná) a součin iD již nelze definovat v souladu s požadavkem, aby každé dvě různé jednotky spolu s jejich součinem tvořily trojici.

Existuje však řešení; čtveřice $ABCD$ lze rozdělit na dvojice třemi způsoby, ke každému způsobu lze přiřadit jednu jednotku z $\{i,j,k\}$. Tedy budeme mít sedm imaginárních jednotek, jejichž čtverce budou -1, které navzájem antikomutují, a kvaternionické trojice získají tvar (z jistých důvodů je třeba psát iDC, kCB místo iCD, kBC)

$$ijk, iAB, iDC, jAC, jBD, kCB, kAD. \tag{2.35}$$

Všimněte si, že každá dvojice jednotek je v právě jedné trojici, a její součin je tedy dobře definován. Příklad neasociativity je

$$(ij)A = kA = D \neq -D = iC = i(jA). \tag{2.36}$$

Podobně, jako lze získat $\mathbb{H}$ z množiny $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$, lze $\mathbb{O}$ získat z $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$, předepíšeme-li pro násobení

$$(x+yA)(x'+y'A) = (xx' - \overline{y'}y) + (y\overline{x'} + y'x)A, \quad x,y,x',y' \in \mathbb{H}. \tag{2.37}$$

Zajímavá je otázka automorfismů uvedené algebry. Požadujeme-li po automorfismu φ, aby

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b),\ \varphi(a\cdot b) = \varphi(a)\cdot\varphi(b), \tag{2.38}$$

zjistíme, že komplexní čísla mají grupu automorfismů isomorfní $\mathbb{Z}_2$ (kromě identického automorfismu komplexní sdružení), automorfismy kvaternionů tvoří grupu $\mathbb{SO}(3)$ (tři imaginární jednotky lze otočit trojrozměrnou ortogonální transformací) a Cayleyova čísla mají zvláštní grupu automorfismů $\mathbb{G}_2$. Jde o podgrupu $\mathbb{SO}(7)$ – kvaterniony lze také ortogonálně otáčet, ale nikoli zcela volně; dimense grupy $\mathbb{G}_2$ je jen 14 ve srovnání s dimensí $21 = 7\cdot(7-1)/2$ grupy $\mathbb{SO}(7)$, viz str. 114.

Jak vypadají takové transformace grupy $\mathbb{G}_2$? Shromáždíme-li k sobě zbytky kvaternionických trojic od jedné imaginární jednotky – například i (to jest jk, AB, DC), můžeme říci, že lze rotovat „do sebe" souřadnice j a k, stejně jako A a B nebo D a C, ovšem v grupě $\mathbb{G}_2$ musí být celkový úhel těchto tří otočení nulový (proto je dimense $\mathbb{G}_2$ jen dvoutřetinová ve srovnání s $\mathbb{SO}(7)$).

Ověříte-li, že algebra je skutečně symetrická vůči uvedeným rotacím, snadno pak i pochopíte, proč má každý prvek jednoznačný oboustranný inversní prvek.

Co se týče invariantů, má grupa $\mathbb{G}_2$ invariant grupy $\mathbb{SO}(7)$ (metrický tensor δ_{mn}) a navíc antisymetrický tensor y_{mno} (indexy m,n,o nabývají hodnot i,j,k,A,B, C a D), který je nulový vyjma případů, kdy m,n,o tvoří kvaternionickou trojici (pak nabývá znaku permutace). $\mathbb{G}_2$ lze také charakterisovat jako podgrupu $\mathbb{SO}(7)$, která ponechává na místě nějaký prvek spinorové representace.

<u>Ostatní vyňaté grupy.</u> Grupa $\mathbb{G}_2$ je jednou z Cartanových vyňatých grup, o nichž ještě uslyšíme. Každá z nich může být charakterisována jako grupa automorfismů nějaké neasociativní algebry (struktury podobné okruhu, viz def. na str. 37).

Důvodem, proč neukážeme tyto algebry s grupami symetrií $\mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8$, je jejich složitost. Řekneme jen, že $\mathbb{F}_4$ je grupa automorfismů algebry $\mathbb{A}(3,\mathbb{O})$, to jest všech hermitovských matic 3 × 3 s Cayleyovými elementy a operací definovanou jako

$$\text{„antikomutátor“} \quad \mathbf{A} \diamond \mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{AB} + \mathbf{BA}). \tag{2.39}$$

Taková matice obsahuje tři nezávislá reálná čísla na diagonále a tři další Cayleyova čísla mimo diagonálu, dimense $\mathbb{A}(3, \mathbb{O})$ je tedy 27, ovšem jednotková matice při automorfismu musí přejít opět na sebe. To je důvod, proč v sekci Cartaniáda prohlásíme, že fundamentální representace $\mathbb{F}_4$ je 26-rozměrná.

2.6 Trisekce úhlu pravítkem a kružítkem

Stovky lidí se snažilo a mnozí dodnes snaží roztřetit úhel. V této sekci ukážeme, proč je nemožné rozdělit obecný úhel na třetiny pomocí pravítka a kružítka.

Ukážeme[5] nejprve, že všechny body, které lze sestrojit, mají souřadnice, které jdou zapsat jako výraz obsahující sčítání, odčítání, násobení, dělení a druhé odmocniny, a naznačíme, že body, které by musely jít vytvořit, kdybychom uměli roztřetit úhel, mají souřadnice, které nemají takovýto jednoduchý tvar z druhých odmocnin.

Budeme postupně rozšiřovat těleso $\mathbb{T}_i$, podtěleso $\mathbb{R}$, obsahující všechny x-ové a všechny y-ové souřadnice. Začneme s $i = 0$ a $\mathbb{T}_0 = \mathbb{Q}$. Nové body (x, y) lze získat jako průnik přímky s přímkou

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \text{ a } \frac{x - x_3}{x_4 - x_3} = \frac{y - y_3}{y_4 - y_3}, \tag{2.40}$$

kružnice s kružnicí

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r_{12}^2 \text{ a } (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 = r_{34}^2, \tag{2.41}$$

nebo přímky s kružnicí,

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1) \text{ a } (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 = r_{34}^2 \tag{2.42}$$

kde přímky spojují již vyznačené body a kružnice mají střed v některém vyznačeném bodě a mají poloměr, aby na nich ležel nějaký již odkrytý bod. To jest $x_i, y_i, r_{ij}^2 \equiv (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \in \mathbb{T}_i$. Vyřešením první dvojice rovnic dostáváme, že i x a y leží v $\mathbb{T}_i$, tedy nic nového. U druhé dvojice lze dvě rovnice od sebe odečíst, $x^2 + y^2$ se požere a zbude lineární rovnice, která v kombinaci s jednou z kvadratických dá soustavu téhož typu, jakou je třetí, opět s koeficienty z $\mathbb{T}_i$.

Když řešíme třetí, buď budou x a y z $\mathbb{T}_i$, nebo budou tvaru x resp. $y = m + n \cdot \sqrt{d}$, kde $m, n, d \in \mathbb{T}_i$ a $\sqrt{d} \notin \mathbb{T}_i$. V druhém případě stačí rozšířit těleso na $\mathbb{T}_i[\sqrt{d}]$, to jest na

$$\mathbb{T}_{i+1} = \mathbb{T}_i[\sqrt{d}] = \{m + n \cdot \sqrt{d} \,|\, m, n \in \mathbb{T}_i\}. \tag{2.43}$$

[5]Děkujeme panu Petru Vopěnkovi za inspiraci.

To je opravdu těleso, protože $(m+n\cdot\sqrt{d})^{-1} = (m-n\cdot\sqrt{d})/(m^2-n^2d)$. (Těleso $\mathbb{C}$ lze pak chápat jako $\mathbb{R}[\sqrt{-1}]$.) Protože operací s kružítkem a pravítkem děláme konečný počet, stačí konečněkrát rozšířit těleso. Všechny souřadnice bodů, jež dostaneme, budou tudíž z nějakého rozšířeného tělesa $\mathbb{T}_n$.

Kdybychom uměli daný úhel 3α roztřetit, pak bychom uměli sestrojit vzdálenost $\tan\alpha$ při dané jednotkové vzdálenosti a daném $\tan 3\alpha$.

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}, \quad \tan 2\alpha = 2\frac{\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \tag{2.44}$$

$$\tan 3\alpha = \frac{2\frac{\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} + \tan\alpha}{1-2\tan\alpha\frac{\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}} = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha} \tag{2.45}$$

Sekvenci rovností ať si verifikuje každý sám. Poslední vzorec není nic jiného než kubická rovnice pro $\tan\alpha$.

$$\tan^3\alpha - 3\tan 3\alpha\cdot\tan^2\alpha - 3\tan\alpha + \tan 3\alpha = 0 \tag{2.46}$$

Pokud má ale tato rovnice s koeficienty z $\mathbb{T}_i$ kořen z $\mathbb{T}_{i+1}$, třeba $m+n\cdot\sqrt{d}$, kde $m,n,d \in \mathbb{T}_i$ a $\sqrt{d} \notin \mathbb{T}_i$, pak má také kořen $m-n\cdot\sqrt{d}$ (polynom se rozpadne na $M+N\cdot\sqrt{d}$ a musí být $M=N=0$, speciálně pro $d=-1$ zde tvrdím, že rovnice s reálnými koeficienty obsahuje s komplexním kořenem i komplexně sdružený). Pro kubickou rovnici je ale faktor u kvadratického členu minus součtem kořenů, čili třetí kořen leží v $\mathbb{T}_i$; je roven $-(m+n\cdot\sqrt{d}) - (m-n\cdot\sqrt{d})$ – kvadratický koeficient. Indukcí dostáváme, že pokud má kubická rovnice kořen z $\mathbb{T}_i$, má pak i racionální kořen ($\mathbb{T}_0 \equiv \mathbb{Q}$). Není těžké nahlédnout, že určitě pro nějaké racionální (ba pro většinu) $\tan 3\alpha$ nebude mít[6] racionální kořen, čímž tvrzení dokážeme (detaily v další subsekci).

Týž závěr bychom dostali pro **kubaturu krychle** (rovnice $x^3=2$, nalezení hrany krychle s dvojnásobným objemem) nebo kupříkladu pro konstrukci pravidelného sedmiúhelníka. (Pravidelný pětiúhelník jde sestrojit!)

Racionální kořeny

Chtějme nalézti všechny racionální kořeny algebraické rovnice s celočíselnými koeficienty $a_n,\ldots,a_1,a_0$:

$$a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0 = 0 \tag{2.47}$$

Dosadíme-li požadovaný tvar kořenu $x=p/q$ (můžeme uvažovat, že p,q jsou nesoudělná celá čísla) do této rovnice, dostaneme po vynásobení výrazem q^n rovnici

$$a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0. \tag{2.48}$$

[6] Úhel 3α s racionální tangentou jde vždy sestrojit a přesto nejde narýsovat jeho třetina.

Napíšeme ji ve dvou tvarech, v nichž je názornější

$$a_n p^n = -q(a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1}) \tag{2.49}$$

$$a_0 q^n = -p(a_1 q^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p^{n-2}q + a_n p^{n-1}), \tag{2.50}$$

že (podle prvého) a_n musí být násobkem q (p^n a q jsou nesoudělná) a že (podle druhého) a_0 musí být násobkem p (q^n a p jsou nesoudělná, v závorce jsou vždy celá čísla).

Nyní již stačí zkontrolovat čísla p/q, která připadají do úvahy.

Proč tedy nelze sestrojit pravidelný sedmiúhelník?

Protože by musel jít sestrojit úhel $\alpha = \pi/7$. Zkontrolujte následující vzorce.

$$\tan 4\alpha = \tan(2 \cdot 2\alpha) = \frac{4\tan\alpha(1-\tan^2\alpha)}{1-6\tan^2\alpha+\tan^4\alpha} \tag{2.51}$$

$$\tan 7\alpha = \tan(3\alpha + 4\alpha) = \tan\alpha\left(\frac{3-\tan^2\alpha}{1-3\tan^2\alpha} + 4\frac{1-\tan^2\alpha}{1-6\tan^2\alpha+\tan^4\alpha}\right) \tag{2.52}$$

Ale pro $\alpha = \pi/7$ je $\tan 7\alpha = 0$ a jelikož $\tan\alpha \neq 0$, musí být nulová závorka. Píšeme-li $x = \tan^2\alpha$, máme tedy rovnost

$$\frac{3-x}{1-3x} + \frac{4-4x}{1-6x+x^2} = 0 \quad \text{neboli} \quad x^3 - 21x^2 + 35x - 7 = 0, \tag{2.53}$$

což je kubická rovnice, která (díky skutečnostem výše) nemůže mít jiné reálné racionální kořeny než $-1, 1, -7, 7$. Žádný ale rovnici neřeší (zkontrolujte), a tak nelze sestrojit úsečku délky $\tan^2\pi/7$, a tedy ani úsečku délky $\tan\pi/7$:

Sestrojení úseček délek x a x^2 jsou ekvivalentní úkoly, poněvadž máme-li x, stačí narýsovat podobné trojúhelníky, jeden se stranami $1, x$, druhý s odpovídajícími stranami x, y a bude $y = x^2$. Naopak, lze vyznačit na přímku sousední úseky o délkách $c_a = 1, c_b = x^2$, nad úsečkou $c_a + c_b$ zkonstruovat Thaletovu kružnici a sestrojit kolmici v bodě dělícím úseky c_a, c_b. Výška v daného trojúhelníka pak bude x podle Euklidovy věty o výšce $v^2 = c_a c_b$. ($\heartsuit$)

Kapitola 3

Prostory plné vektorů

Touto kapitolou začíná vlastní výklad lineární algebry.

DEFINICE. Nechť $\mathbb{T}$ je komutativní těleso; dále mějme na mysli vždy $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$, přičemž oba tyto případy budou velmi důležité a v lecčems odlišné.[1] Množinu $\mathbb{V}$ nazveme **lineárním** nebo **vektorovým prostorem** nad $\mathbb{T}$, jsou-li definovány na $\mathbb{V}$ operace „sčítání" a „násobení konstantou" z $\mathbb{T}$ splňující následující axiomy (neutrální prvek prostoru jakožto grupy 0_V budeme značit $\vec{\mathbf{0}}$)

1. $(\mathbb{V}, +)$ je komutativní grupa
2. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{T} \quad \forall \vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{V} \quad \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{\mathbf{v}}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{\mathbf{v}}$
3. $0_T \cdot \vec{\mathbf{v}} = 0_V, \qquad (-1_T) \cdot \vec{\mathbf{v}} = -\vec{\mathbf{v}}_V$
4. $\lambda \cdot (\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}) = \lambda \cdot \vec{\mathbf{u}} + \lambda \cdot \vec{\mathbf{v}}$
5. $(\lambda + \mu) \cdot \vec{\mathbf{v}} = \lambda \cdot \vec{\mathbf{v}} + \mu \cdot \vec{\mathbf{v}}$

Prvky takového prostoru nazýváme **vektory** a značíme $\vec{\mathbf{u}}$ apod. Kdybychom podtržené slovo „těleso" v definici nahradili slovem „okruh", výsledný objekt bychom nazývali **modulem**.

[1] Nevěnujeme pozornost prostorům nad jinými tělesy, ač jsme si vědomi toho, že je studují v dnešní matematice obory z nejprestižnějších, jakým je **algebraická geometrie**. Zpočátku si můžete představovat prostory reálné, na přechod ke komplexním včas upozorníme.

<u>POJEM LINEÁRNÍ KOMBINACE.</u> Jakýkoliv vektor tvaru součtu násobků konečného počtu vektorů

$$\vec{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{v}}_i \lambda^i \tag{3.1}$$

nazveme **lineární kombinací** vektorů $\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n$.

<u>DEFINICE.</u> Pro libovolnou množinu M vektorů nazveme jejím **lineárním obalem** lineární prostor všech lineárních kombinací vektorů z M a značíme ho

$$\mathcal{L}(M) = \{\sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{v}}_i \mu^i,\ \forall i\ \vec{\mathbf{v}}_i \in M,\ \mu^i \in \mathbb{T}\}. \tag{3.2}$$

<u>DEFINICE.</u> **Base** prostoru $\mathbb{V}$ je každá minimální[2] množina vektorů (dále místo adjektiva „minimální“ budeme mluvit o lineárně nezávislých vektorech), jejímž lineárním obalem je celé $\mathbb{V}$, a **dimense** je počet těchto vektorů. O jednoznačnosti pojmu dimense přesvědčíme nedůvěřivé v sekci o Steinitzově větě. Obvykle budeme mluvit o prostorech konečné dimense, ale mnohé závěry mohou být elegantně převedeny i do situace nekonečné dimense.

<u>DEFINICE.</u> Řekneme, že $M \subseteq \mathbb{V}$ **generuje** $\mathbb{V}$, pokud

$$\forall \vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{V} \quad \exists \vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n \in M \text{ a } \lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^n \in \mathbb{T}, \text{ že } \vec{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{v}}_i \lambda^i. \tag{3.3}$$

<u>PŘÍKLADY LINEÁRNÍCH PROSTORŮ.</u>

1. Vektory v rovině a v prostoru z elementární geometrie.
2. $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n}$.
3. $\mathbb{C}^n$.
4. Prostor $\mathcal{F}(X)$ všech funkcí (reálných či komplexních) na nějaké množině X. Je-li X interval, jde o velikánský prostor, pro interval $X = \langle 0, 1\rangle$ hleď na další příklady.
5. $\mathcal{C}\langle 0, 1\rangle$, spojité funkce na $\langle 0, 1\rangle$.

[2] Taková, z níž nelze žádný ubrat tak, že se lineární obal nezmění.

6. $\mathcal{P}\langle 0,1\rangle$ polynomy, $\mathcal{P}_n\langle 0,1\rangle$ polynomy nejvýše n-tého stupně.
7. $\mathcal{T}\langle 0,1\rangle$ trigonometrické polynomy, kombinace funkcí $\cos 2\pi nx$ a $\sin 2\pi nx$ pro $n \in \mathbb{N}$.
8. Prostor funkcí po částech konstantních na $\langle 0,1\rangle$, vyjma dělících bodů $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < 1$.
9. Prostor spojitých funkcí po částech lineárních.
10. Množina řešení soustavy lineárních rovnic s nulovou pravou stranou.
11. Prostor všech (resp. jen omezených resp. konvergentních) posloupností.
12. Patologický příklad: $\mathbb{R}$ coby lineární prostor nad tělesem racionálních čísel (podobná „zvrhlost" se užívá při důkazu existence neměřitelných množin v teorii míry).
13. **Magické** neboli **latinské čtverce**, čtvercové tabulky čísel, v nichž se navzájem rovnají všechny řádkové a sloupcové součty, případně dle libosti i součty po diagonálách.
14. Miliony dalších příkladů.

Úkol. Hledejte base uvedených prostorů (ne každý prostor má basi přirozeně zadanou jako 2),3) nebo i 6), např. 9),10)), sestrojte tímto isomorfismy do vhodného $\mathbb{R}^n$ (je-li to možné) a určete dimense.

3.1 Lineární nezávislost

Definice. Vektory $\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n \in \mathbb{V}$ nazveme **lineárně závislé**, existuje-li n-tice čísel

$$(\lambda^1, \ldots, \lambda^n) \in \mathbb{T}^n \setminus \{(0,0,\ldots,0)\} \tag{3.4}$$

$$\text{taková, že } \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{v}}_i \lambda^i = 0. \tag{3.5}$$

Zde $\mathbb{T}$ znamená $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Pro každé i, pro něž $\lambda^i \neq 0$, lze vyjádřit vektor $\vec{\mathbf{v}}_i$ jako lineární kombinaci ostatních vektorů

$$\vec{\mathbf{v}}_i = \sum_{j \neq i} \vec{\mathbf{v}}_j \mu^j \ \text{ kde } \ \mu^j = -\frac{\lambda^j}{\lambda^i}. \tag{3.6}$$

Necelá dimense

(♯) Neodpustíme si z tématu vybočující poznámku určenou pro zvídavé čtenáře, kteří si chtějí zapřemýšlet nad **fraktály**, to jest útvary sobě podobnými (zvětšíme-li fraktál, vidíme podobnou strukturu jako před zvětšením), o tom, že mnohdy má smysl mluvit i o neceločíselné dimensi. Rozpracování teorie takových prostorů zahájil jeden z největších (snad největší) matematiků našeho století John von Neumann.[3]

Uvažme, že trojrozměrný prostor má podmnožiny trojrozměrné (celý prostor, kvádry, koule atd.), dvojrozměrné (povrchy kvádrů, koulí, kruhy atd.) a jednorozměrné (křivky) a že objem (míra) tělesa dimense menší než tři je nulový.

Podobně brzy uslyšíte, že Lebesgueova míra **Cantorova diskontinua** na přímce je nulová. Cantorovu diskontinuu lze připsat dimensi $\ln 2/\ln 3$ v souladu s následující definicí. (Přesvědčte se, že pro útvary s celočíselnou dimensí dává správné hodnoty.)

JAK JI SPOČÍTAT. V $\mathbb{R}^n$ mějme omezenou množinu bodů M. Pro každou přesnost C najděme co nejlepší způsob s co nejmenším $B(C)$, kterak lze pro každý bod P z M pomocí $B(C)$ bitů informace vypočítat souřadnice takového bodu A, aby měl od bodu P vzdálenost menší než 2^{-C} (nebo jinak řečeno, aby se každá souřadnice A lišila od odpovídající souřadnice P méně než o 2^{-C}, tj. byla s přesností na C bitů). **Zobecněnou (Hausdorffovou) dimensí** pak rozumíme limitu poměru $B(C)/C$ pro $C \to \infty$. (Užívejme definici jen pro omezené množiny.) Pojem výše uvedený se obvykle formalisuje následujícím způsobem:

DEFINICE. Nazvěme ε-sítí dané množiny M takovou její konečnou podmnožinu N, že každý bod má od množiny N vzdálenost nejvýše ε. Hausdorffova dimense se definuje jakožto

$$d = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln n}{\ln(1/\varepsilon)}, \tag{3.7}$$

pokud tato limita existuje, kde n označuje minimální možný počet prvků ε-sítě N.

[3] Šlechtickou předponu získal jeho otec za to, že půjčil císaři peníze. Již jako malý projevoval John matematické nadání, a tak se jeho otec rozhodl, že z něho vychová velkého matematika. Nuže platil nejlepší matematiky, aby Johna učili, a vychoval z něho světového matematika.

POJEM CANTOROVA DISKONTINUA. Jde o podmnožinu intervalu $\langle 0,1\rangle$ těch čísel, která lze ve trojkové soustavě zapsat jako $0,abcde\ldots$, kde číslice $a,b,c,d,e\ldots$ jsou jen nuly a dvojky, přičemž sem patří i čísla typu $(0,02222\ldots)_3$ (toto je totéž jako $(0,1)_3 = 1/3$).

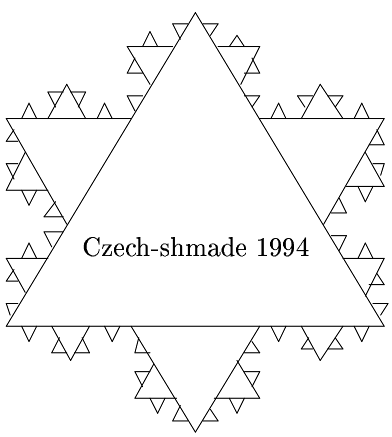
Z hlediska teorie množin je to množina **nespočetná** (nelze jejím prvkům vzájemně jednoznačně přiřadit přirozená čísla), její **mohutnost** je stejná, jako mohutnost **kontinua**: stačí nahradit dvojky v zápise jednotkami a vzniklé číslo interpretovat jako binární, čímž Cantorovo diskontinuum jednoznačně[4] přiřadíme intervalu $\langle 0,1\rangle$.

Množinu lze názorně získat tak, že interval $\langle 0,1\rangle$ rozdělíme na tři části a prostřední (otevřený interval $(1/3,2/3)$) vypustíme. Každý zbylý interval rozdělíme na tři části a prostřední vypustíme (tj. intervaly $(1/9,2/9)$ a $(7/9,8/9)$). Takto postupujeme do nekonečna; Cantorovo diskontinuum je tedy průnikem množin po n vyškrtnutích přes $n\in\mathbb{N}$.

Celkem vynecháme z intervalu $\langle 0,1\rangle$ úsečky o celkové délce

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\frac{8}{81}\ldots=\frac{1/3}{1-2/3}=1, \tag{3.8}$$

čili zbude **množina míry nula**. ($\heartsuit$)



Bod na kupř.dolní třetině obrysu obrazce, který získáme po nekonečněkrát provedeném přistavení rovnostranného trojúhelníka na prostřední třetinu každé strany (viz obr.), lze popsat desetinným číslem z intervalu (0,1) ve čtyřkové soustavě, kde k-tá číslice (0,1,2,3) udává, na které čtvrtině strany v k-tém stupni rozlišení bod leží. Protože délky úseček klesají jen jako 3^{-k}, připíšeme fraktálu (obrysu) dimensi $\log 4/\log 3$.

(3.9)

Isomorfismus, podprostory, reálná a komplexní dimense

DEFINICE. Zobrazení $\varphi:\mathbb{V}\to\mathbb{W}$ mezi dvěma lineárními prostory nazve-

[4] Až na nějakou spočetnou množinu; př.: $(0,02222\ldots)_3 \neq (0,20000\ldots)_3$, ale $(0,01111\ldots)_2 = (0,10000\ldots)_2$.

me **isomorfismem**, je-li vzájemně jednoznačné (prosté a „na“) a lineární.

$$\varphi(\vec{\mathbf{v}} + \lambda\vec{\mathbf{w}}) = \varphi(\vec{\mathbf{v}}) + \lambda\varphi(\vec{\mathbf{w}}) \tag{3.10}$$

<u>DEFINICE.</u> Podmnožinu lineárního prostoru, která je sama vektorovým prostorem v indukované operaci $+$ a $\cdot$, nazveme **podprostorem**. Je-li $\mathbb{W}$ podprostor $\mathbb{V}$ (dále značíme prostě $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$), nazveme **faktorprostorem** (pochopte, proč jde o speciální příklad faktorgrupy) $\mathbb{V}$ podle $\mathbb{W}$ množinu všech <u>tříd prvků</u> typu

$$\vec{\mathbf{a}} + \mathbb{W} = \{\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{v}} \,|\, \vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{W}\} \tag{3.11}$$

a značíme ho $\mathbb{V}/\mathbb{W}$. Sčítání a násobení zavádíme předpisem

$$(\vec{\mathbf{a}} + \mathbb{W}) + (\vec{\mathbf{b}} + \mathbb{W}) := (\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}) + \mathbb{W}, \quad \lambda(\vec{\mathbf{a}} + \mathbb{W}) := \lambda\vec{\mathbf{a}} + \mathbb{W}. \tag{3.12}$$

Ověřte korektnost[5] těchto definic.

<u>VĚTA.</u> Označíme-li symbolem $\dim\mathbb{V}$ dimensi prostoru $\mathbb{V}$, platí

1. Pro $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$ je $\dim\mathbb{W} \leq \dim\mathbb{V}$. Pro případ konečné dimense a $\mathbb{W} \neq \mathbb{V}$ je nerovnost ostrá.
2. $\dim\mathbb{W} + \dim\mathbb{V}/\mathbb{W} = \dim\mathbb{V}$

<u>LEMMA.</u> Nechť $\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n$ je <u>base podprostoru</u> $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$. Pak ji lze doplnit na basi celého $\mathbb{V}$ $(m > n)$

$$\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n, \vec{\mathbf{v}}_{n+1}, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_m, \tag{3.13}$$

přičemž třídy

$$\vec{\mathbf{v}}_{n+1} + \mathbb{W}, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_m + \mathbb{W} \tag{3.14}$$

tvoří basi faktorprostoru $\mathbb{V}/\mathbb{W}$.

<u>TVRZENÍ.</u> Nechť $\mathbb{W}_1 \subseteq \mathbb{V}$, $\mathbb{W}_2 \subseteq \mathbb{V}$. Pak

$$\dim\mathbb{W}_1 + \dim\mathbb{W}_2 = \dim\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2 + \dim\mathcal{L}(\mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2). \tag{3.15}$$

[5] Vnitřní neprotiřečivost.

<u>DŮKAZ.</u> *Je-li $\vec{\mathbf{v}}_{1\ldots m}$ base $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$, lze najít vektory $\vec{\mathbf{w}}_{1\ldots n}$ a vektory $\vec{\mathbf{z}}_{1\ldots p}$ tak, aby vektory*

$$\begin{array}{l} \vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_m,\ \vec{\mathbf{w}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{w}}_n \text{ tvořily basi } \mathbb{W}_1 \\ \vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_m,\ \vec{\mathbf{z}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{z}}_p \text{ tvořily basi } \mathbb{W}_2. \end{array} \tag{3.16}$$

Pak již jen ověříte, že $\vec{\mathbf{v}}_{1\ldots m}$, $\vec{\mathbf{w}}_{1\ldots n}$, $\vec{\mathbf{z}}_{1\ldots p}$ tvoří basi $\mathcal{L}(\mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2)$.

<u>VĚTA.</u> Isomorfní prostory mají stejnou dimensi, prostory stejné dimense nad týmž tělesem jsou isomorfní.

<u>VĚTA.</u> Dimense komplexního prostoru $\mathbb{V}$ chápaného jako prostor nad tělesem reálných čísel je dvojnásobná proti komplexní dimensi téhož prostoru

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{V} = 2 \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{V}, \tag{3.17}$$

protože tvoří-li $\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n$ komplexní basi $\mathbb{V}$, vytvářejí prvky $\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n$ a $i\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, i\vec{\mathbf{v}}_n$ reálnou basi $\mathbb{V}$.

<u>DALŠÍ ÚLOHY.</u>

1. <u>Najděte dimensi,</u> sestavte „co nejpřirozenější" basi prostoru všech funkcí spojitých na $\mathbb{R}$, které jsou navíc lineární v zadaných intervalech $(-\infty, a_0)$, (a_0, a_1), ... , (a_{n-1}, a_n), (a_n, ∞), kde $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$. Zkoumejte lineární nezávislost funkcí $f_n(x) = |x - a_n|$, $f_{n+1}(x) = 1$ a $f_{n+2}(x) = x$.
2. Dumejte nad lineární nezávislostí souborů funkcí:
   (a) $1,\ x,\ x^2,\ x^3 \ldots$
   (b) $e^{\lambda_1 x},\ e^{\lambda_2 x},\ e^{\lambda_3 x} \ldots \quad \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \ldots$
   (c) $\sin \alpha_1 x,\ \sin \alpha_2 x,\ \sin \alpha_3 x \ldots$ (požadavky na α_i?)
3. Najděte co nejvíce „co nejodlišnějších" příkladů podprostorů lineárního prostoru všech posloupností.

3.2 Steinitzova věta

Mějme ve vektorovém prostoru $\mathbb{V}$

1. nějaké lineárně nezávislé vektory $\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_m$

2. a další vektory $\vec{\mathbf{w}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{w}}_n$ takové, že $\forall i \;\; \vec{\mathbf{v}}_i \in \mathcal{L}(\{\vec{\mathbf{w}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{w}}_n\})$ to jest každý vektor $\vec{\mathbf{v}}_i$ je lineární kombinací vektorů $\vec{\mathbf{w}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{w}}_n$.

POTOM PLATÍ $m \leq n$.

<u>DŮSLEDEK.</u> Nazvali jsme **basí** jakoukoliv množinu nezávislých vektorů $\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n$ že $\mathbb{V} = \mathcal{L}(\{\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n\})$. Libovolné dvě base mají potom <u>stejný</u> počet prvků neboli **dimensi**, která je tím pádem dobře definována.

<u>DŮKAZ DŮSLEDKU ZE STEINITZOVY VĚTY.</u> *Mějme dvě base* $\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_m$ *a* $\vec{\mathbf{w}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{w}}_n$. *Užijme dvakrát Steinitzovu větu dle schematu:*

$$\begin{array}{l} \mathcal{L}(\{\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_m\}) = \mathbb{V} \; \& \; \vec{\mathbf{w}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{w}}_n \textit{ nezávislé} \implies n \leq m, \\ \mathcal{L}(\{\vec{\mathbf{w}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{w}}_n\}) = \mathbb{V} \; \& \; \vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_m \textit{ nezávislé} \implies m \leq n. \end{array} \tag{3.18}$$

Výroky vlevo nahoře a vpravo dole resp. vpravo nahoře a vlevo dole znamenají, že $\vec{\mathbf{v}}_i$ *resp.* $\vec{\mathbf{w}}_i$ *tvoří basi.*

<u>LEMMA O VÝMĚNĚ, ZÁKLAD DŮKAZU STEINITZOVY VĚTY.</u> Nechť

$$\vec{\mathbf{w}} \in \mathcal{L}(\{\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_m\}), \quad \vec{\mathbf{w}} = \sum_{i=1}^{m} \vec{\mathbf{v}}_i \beta^i. \tag{3.19}$$

Je-li $\beta^j \neq 0$, tak

$$\mathcal{L}(\{\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_{j-1}, \vec{\mathbf{w}}, \vec{\mathbf{v}}_{j+1}, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_m\}) = \mathcal{L}(\{\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_m\}). \tag{3.20}$$

Pro důkaz stačí dosadit $\vec{\mathbf{v}}_j = \frac{1}{\beta^j}(\vec{\mathbf{w}} - \sum_{k \neq j} \vec{\mathbf{v}}_k \beta^k)$.

<u>ZESLABENÍ VĚTY.</u> *Výrokem* Φ_k $(k = 1, \ldots, m)$ *mysleme modifikaci Steinitzovy věty vzniklou* <u>*dodatečným předpokladem*</u>, *že* množiny $\{\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_m\}$ a $\{\vec{\mathbf{w}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{w}}_n\}$ mají <u>alespoň k</u> společných prvků. *Pak* Φ_0 *značí původní Steinitzovu větu a* Φ_m *je triviální tvrzení.*

$$\boxed{\Phi_k \textit{ a lemma implikuje } \Phi_{k-1}}$$

<u>NÁVOD.</u> *Nechť mezi oněmi společnými* $k-1$ *prvky z věty* Φ_{k-1}, *kterou chceme dokázat, není vektor* $\vec{\mathbf{v}}_u$ *a také jisté* $\vec{\mathbf{w}}_{i_0}$, *přičemž ve vyjádření*

$$\vec{\mathbf{v}}_u = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{w}}_i \alpha^i \;\; \textit{je} \;\; \alpha^{i_0} \neq 0.$$

Mezi těmi $\vec{\mathbf{w}}_j$, pro něž $\alpha^j \neq 0$, je nutně nějaké $\vec{\mathbf{w}}_{i_0}$, které není mezi $k-1$ společnými vektory, jinak bychom mohli napsat $\vec{\mathbf{v}}_u$ jako lineární kombinaci ostatních společných vektorů a vektory $\vec{\mathbf{v}}_i$ by nebyly nezávislé. Podle lemmatu je $\mathcal{L}(\{\vec{\mathbf{w}}_{1\ldots n}\}) = \mathcal{L}(\{\vec{\mathbf{w}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{w}}_{i_0-1}, \vec{\mathbf{v}}_u, \vec{\mathbf{w}}_{i_0+1}, \ldots, \vec{\mathbf{w}}_n\})$, čímž se ale dostáváme do situace věty Φ_k.

POZNÁMKA. Věta říká, že rozkaz Zaměň vhodných m vektorů množiny $\{\vec{\mathbf{w}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{w}}_n\}$ prvky množiny $\{\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_m\}$ tak, aby se lineární obal $\mathcal{L}(\{\vec{\mathbf{w}}_{1\ldots n}\})$ nezměnil ! tedy lze realisovat, čehož zřejmým důsledkem je vysněná nerovnost $m \leq n$.

Alternativní zavedení pojmu dimense

Existují i další způsoby zavedení pojmu dimense; uveďme nyní jeden z nich. Je, pravda, mnohem kratší, avšak určitě „méně konstruktivní“ a asi i méně průzračný než způsob založený na Steinitzově větě. Pojem dimense se v něm definuje *rekursivním* způsobem, založeným v podstatě na metodě matematické indukce:

DEFINICE. Dimensí vektorového prostoru $\mathbb{V}$ budeme rozumět nulu, pokud půjde o prostor s jediným prvkem $\vec{\mathbf{0}}$, nebo minimální n takové, aby každý vlastní (tj. netotožný s $\mathbb{V}$) podprostor $\mathbb{V}$ měl už definovanou dimensi, a to nejvýše $n-1$.

VĚTA. Ve vektorovém prostoru dimense n má každá base přesně n prvků. (Basí v tomto alternativním pojetí opět rozumíme soubor nezávislých vektorů, který generuje $\mathbb{V}$ tzn. který je „maximální“ možný).

DŮKAZ. *Postupujeme matematickou indukcí podle relace $\subset$; pro $n = 0$ (ba i $n = 1, 2$) je to snad zřejmé.... Zřejmě každý konečně generovaný prostor má konečnou dimensi podle této definice. Má-li prostor dimensi n (podle definice), tak v něm zřejmě nebude existovat base o méně než n prvcích (to by byl spor s indukčním předpokladem!), ale ani base o více než n prvcích (neboť potom bychom vynecháním jednoho prvku takovéto base a vzetím příslušného lineárního obalu dostali vlastní podprostor dimense větší než $n-1$ podle indukčního předpokladu, což by byl spor s definicí dimense nahoře!)*

Některé geometrické pojmy

Rovnoběžnostěn je daný počátkem souřadnic (nulovým vektorem) a vektory $\vec{\mathbf{v}}_1, \dots, \vec{\mathbf{v}}_n \in \mathbb{V}$

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{v}}_i \lambda^i \,|\, \forall i \;\; \lambda^i \in \langle 0, 1 \rangle \right\} \tag{3.21}$$

Obvykle předpokládáme, že $\vec{\mathbf{v}}_1, \dots, \vec{\mathbf{v}}_n$ jsou nezávislé, čímž vyloučíme např. zdegenerování krychle na šestiúhelník.

POZNÁMKA. Rovnoběžnostěny nad pravidelnými hvězdami tří, pěti, deseti a jedenadvaceti vektorů v rovině $\mathbb{E}^2$ viz obálku knihy. Každý vnitřní bod takovéhoto rovnoběžnostěnu je ovšem možno vyjádřiti nekonečně mnoha způsoby jako kombinaci zmíněných vektorů, „nejlepší vyjádření“ (minimalisující sumu absolutních hodnot souřadnic) je možno znázornit lomenou čarou, běžící nejkratší cestou po segmentech ornamentu až k dosažení nejbližšího (k počátku) rohu kosočtverce, ve kterém zmíněný bod leží. (Všechny nenulové souřadnice tohoto vyjádření kromě dvou posledních jsou rovny jedné.)

Simplex je vymezený vektory $\vec{\mathbf{v}}_1, \dots, \vec{\mathbf{v}}_n \in \mathbb{V}$ a počátkem souřadnic

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{v}}_i \lambda^i \,|\, 0 \le \lambda^i, \sum \lambda^i \le 1 \right\} \tag{3.22}$$

Nepředpokládáme-li nezávislost $\vec{\mathbf{v}}_i$, může vzniknout také n-úhelník.

Tuto definici s počátkem souřadnic lze brát jako speciální případ následující obecnější definice pro $\vec{\mathbf{v}}_0 = \vec{\mathbf{0}}$: Simplex vymezený body (koncovými body odpovídajících vektorů) $\vec{\mathbf{v}}_0, \vec{\mathbf{v}}_1, \dots, \vec{\mathbf{v}}_n$ je konvexním obalem množiny těchto bodů, tj.

$$\left\{ \sum_{i=0}^{n} \vec{\mathbf{v}}_i \lambda^i \,|\, \sum_{i=0}^{n} \lambda^i = 1 \right\}. \tag{3.23}$$

POZNÁMKA. Pro $n = 2$ jde o trojúhelník, pro $n = 3$ o čtyřstěn (jsou-li ovšem vektory $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \vec{\mathbf{v}}_3$ nezávislé, kreslete). Pro kontrast uveďme, že například v případě pěti vektorů $\vec{\mathbf{v}}_1, \dots, \vec{\mathbf{v}}_5$ v rovině dostáváme pětiúhelník.

Polyedr je pak souvislé sjednocení konečně mnoha simplexů. (Najděte i jiné definice.) **Konvexním polyedrem** pak rozumíme průnik konečně mnoha poloprostorů. (Zkuste precisovat definici užívající konvexní obal.)

3.3 Funkce typu spline

Matematický obor, jehož základními objekty zkoumání jsou nejrůznější lineární prostory *funkcí*, se nazývá funkcionální analýza. Prostory funkcí tam zkoumaných jsou ovšem většinou nekonečné dimense – což přináší technické komplikace a někdy i zcela nové rysy proti situacím, se kterými se setkáváme v LA . Existuje však i několik význačných typů prostorů funkcí konečné dimense, používaných velmi často v tzv. teorii aproximací (kde jde o nahrazení původní „složité" funkce jednodušší aproximující funkcí z nějaké třídy polynomů, trigonometrických polynomů, ... viz dále). [6]

Níže uvedené prostory jsou velmi často používány – třeba v teorii aproximací funkcí. Zatím můžeme seznámení s nimi chápat jako příležitost pocvičit se v hledání zajímavých příkladů bází v různých lineárních prostorech.

Nejde však zdaleka jenom o tento (samo)účel. Níže zkonstruované base podstatným způsobem použijeme později (viz odstavec „Vlnky" v druhé části knihy v kapitole Kvadratický svět, věnovaný úvodu do problematiky oboru zvaného „Image processing").

Kromě již zmíněných prostorů polynomů a trigonometrických polynomů jde v aplikacích velmi často o prostory funkcí majících „po částech vlastnost ..." kde za ... lze dosadit vlastnosti jako konstantní, lineární, kvadratický, kubický, ... Tedy takzvané „spline functions" – česky snad "splajny" (?).

Popišme nyní podrobněji tyto příklady. Vezměme pro určitost interval $[0,1]$ rozdělený na (typicky „malé") intervaly $[x_i, x_{i+1})$ pomocí jistého (fixovaného v dalším výkladu) dělení intervalu

$$\mathcal{D} = \{x_i\}, \text{ kde } 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = 1. \tag{3.24}$$

Dohodněme se pro konkrétnost, že všechny dále uvažované funkce budou mít předepsánu hodnotu 0 vně intervalu $(0,1)$. Naopak, bude li to účelné, považujme interval $[0,1)$ za grupu se sčítáním modulo 1 (v takovém případě někdy už bez bezpodmínečného požadavku nulovosti uvažovaných funkcí v bodě $0 = 1$).

1. Prostor $\mathcal{K}$ všech funkcí po částech konstantních na každém intervalu (x_i, x_{i+1}) a zprava spojitých v každém bodě x_i .

[6] Z našeho dosavadního, čistě algebraického, hlediska jsou samozřejmě všechny prostory stejné dimense „stejné" (tedy isomorfní). Tato stejnost ovšem zmizí při zkoumání konkrétnějších problémů, třeba už při různém zavedení pojmu „vzdálenost vektorů" v jednotlivých prostorech.

2. Podprostor $\mathcal{K}_0 = \{f \in \mathcal{K} : \int_0^1 f(x)dx = 0\}$.

   CVIČENÍ. Najděte vhodné base prostorů $\mathcal{K}$ a $\mathcal{K}_0$!

   NÁVOD. V případě 1) volte funkce (typu „Stolová hora“)

$$\chi_i(x) = \chi_{[x_i,x_{i+1}]}(x) \tag{3.25}$$

   kde $\chi_I : \chi_I(x) = 1 \Leftrightarrow x \in I$ označuje tzv. charakteristickou funkci intervalu I (někdy se též mluví o tzv. „indikátoru“ I).

   V případě 2) zkuste funkce typu

$$\psi_i(x) = \chi_i(x) - c_i\chi_{i+1}(x), \quad \text{kde} \quad c_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+2} - x_{i+1}}. \tag{3.26}$$

3. Prostor $\mathcal{L}$ všech spojitých funkcí „po částech lineárních“, přesněji lineárních na každém intervalu $[x_i, x_{i+1}]$ a nulových vně intervalu $[0, 1]$.

4. Podprostor

$$\mathcal{L}_0 = \{f \in \mathcal{L} : \int_0^1 f(x)dx = 0\}. \tag{3.27}$$

   CVIČENÍ. Najděte vhodné base prostorů $\mathcal{L}$ a $\mathcal{L}_0$!

   NÁVOD. V případě 3) volte funkce (typu „Milešovka“)

$$\Psi_i(x) = \int \psi_i(x)dx \tag{3.28}$$

   tedy primitivní funkce k ψ_i.

   V případě 4) zkuste funkce

$$\phi_i(x) = \Psi_i(x) - d_i\Psi_i(x) \quad \text{kde} \quad d_i = \frac{(x_{i+2} - x_{i+1})(x_{i+2} - x_i)}{(x_{i+3} - x_{i+1})(x_{i+1} - x_i)}. \tag{3.29}$$

   Všimněte si, že zobrazení

$$\{f \to f'\} : \mathcal{L} \to \mathcal{K}_0 \tag{3.30}$$

   je isomorfismem prostorů $\mathcal{L}$ a $\mathcal{K}_0$.

5. Prostor $\mathcal{Q}$ všech všude derivovatelných funkcí, kvadratických v každém intervalu $[x_i, x_{i+1}]$ a nulových vně intervalu $[0, 1]$.

   Cvičení. Najděte vhodnou basi prostoru $\mathcal{Q}$.

   Návod. Zkuste funkce (typu „Říp“)

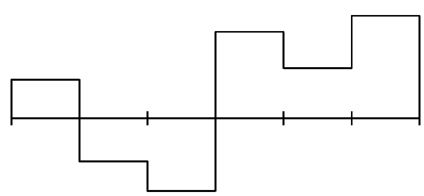
$$\Phi_i(x) = \int \phi_i(x), \tag{3.31}$$

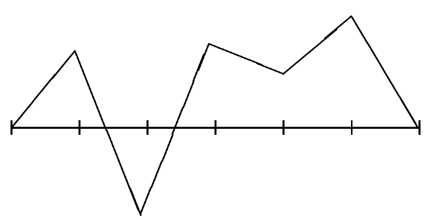
   tedy primitivní funkce k ϕ_i. Že jde vskutku o basi, je nejlépe vidět s použitím isomorfismu

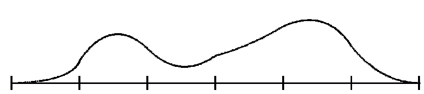
$$\{f \to f'\} : \mathcal{Q} \to \mathcal{L}_0. \tag{3.32}$$

Poznámka. V konstrukci prostorů uvedeného typu (polynomy zvoleného stupně uvnitř intervalů (x_i, x_{i+1}) s co „nejhladším napojením“ na sebe) lze samozřejmě pokračovat i dále. Vezměte třeba podprostor $\mathcal{Q}_0 = \{f \in \mathcal{Q} : \int_0^1 f(x)dx = 0\}$ a prostor primitivních funkcí k němu. Dostaneme tzv. kubické „splajny“ (spline functions). Najdete vhodnou basi tohoto prostoru ? (S přibývajícím stupněm polynomu to zřejmě bude formálně čím dále komplikovanější.) Najděte aspoň dimensi tohoto prostoru!

Následující obrázky znázorňují typické příklady funkcí z prostorů $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{Q}$:



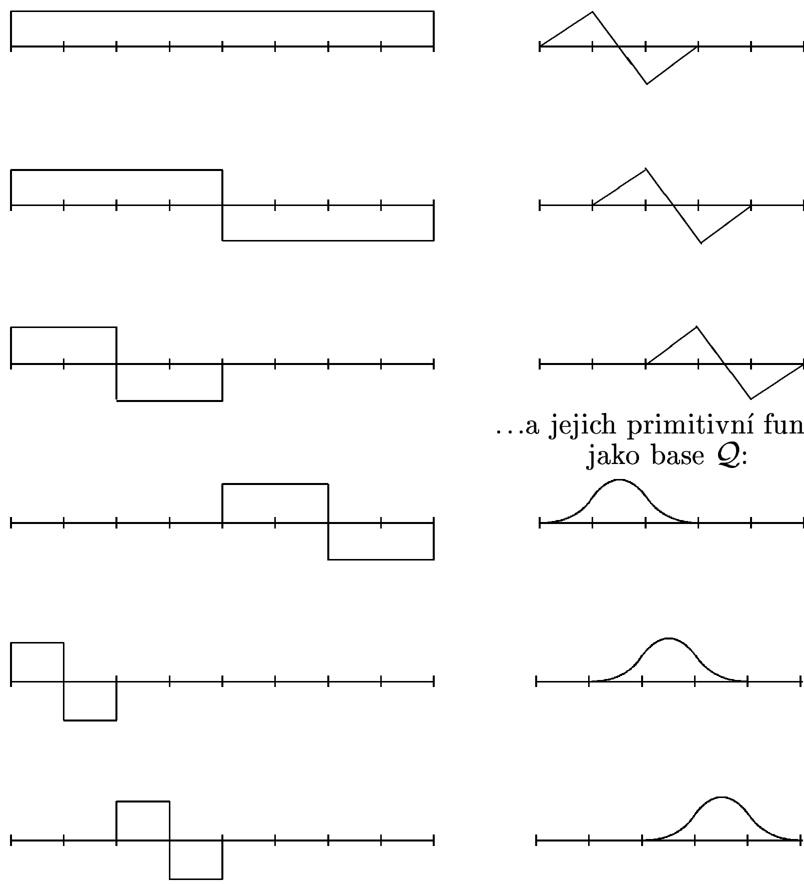




A níže uvedené posloupnosti funkcí naznačují příklady vhodných voleb basí v prostorech $\mathcal{K}, \mathcal{L}_0$ a $\mathcal{Q}$; některé z těchto basí jsou „víceméně“ ortogonální (viz následující kapitolu a podrobnější komentář pak v odstavci Vlnky v druhé části knihy).

Haarovy funkce;
příklad ortogonální base v $\mathcal{K}$:

Příklad base v $\mathcal{L}_0$:



a tak dále …

<u>Cvičení.</u> Jaký je vztah mezi nakreslenými funkcemi z $\mathcal{L}_0$ a příslušnými vhodně volenými Haarovými funkcemi?

Kapitola 4

Skalární součin

Pojem **skalárního součinu** je zobecněním pojmu již asi známého (ze střední školy) pro vektory v $\mathbb{R}^2$ nebo v $\mathbb{R}^3$.[1] Jeho axiomatické zavedení je následující:

DEFINICE. Zobrazení[2]

$$\{(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}}) \mapsto \mathbf{b}(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}})\} \qquad \mathbb{V}\times\mathbb{V}\to\mathbb{R} \quad \text{nebo} \quad \mathbb{C} \tag{4.1}$$

splňující vztahy

1. $\mathbf{b}(\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{y}},\vec{\mathbf{z}}) = \mathbf{b}(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{z}}) + \mathbf{b}(\vec{\mathbf{y}},\vec{\mathbf{z}})$
2. $\mathbf{b}(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}}+\vec{\mathbf{z}}) = \mathbf{b}(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{z}}) + \mathbf{b}(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}})$
3. $\mathbf{b}(\lambda\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}}) = \lambda\mathbf{b}(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}})$
4. $\mathbf{b}(\vec{\mathbf{x}},\lambda\vec{\mathbf{y}}) = \overline{\lambda}\mathbf{b}(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}})$
5. $\mathbf{b}(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}}) = \overline{\mathbf{b}(\vec{\mathbf{y}},\vec{\mathbf{x}})}$
6. $\forall\vec{\mathbf{x}}\neq\vec{\mathbf{0}} \quad \mathbf{b}(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{x}}) > 0$

[1] Nepleťte, prosím, s vektorovým součinem, o němž pohovoříme mnohem později.

[2] Zprvu budeme mít na mysli reálné prostory, na přechod na komplexní včas upozorníme. Postupně budeme objasňovat, proč právě komplexní čísla (a teorie na nich založené) jsou tak důležité ve fysice. Nejde o věc jednoduchou, i matematikům trvalo tři staletí, od Cardana až do minulého století, než Gauss problém jasně zformuloval, a teprve s rozmachem kvantové mechaniky se ukázala nepostradatelnost komplexních čísel ve fysice. Jedním z impulsů pro jejich vznik už v době Cardanově byla skutečnost, že vzorec pro řešení kubické rovnice někdy nedá všechny tři kořeny (poněvadž nemáme odmocninu ze záporných čísel), ač jsou všechny reálné, což se zavedením $\mathbb{C}$ vyřeší.

nazveme skalárním součinem na vektorovém prostoru $\mathbb{V}$.

Cvičení. Minimalisujte soubor těchto axiomů.

Poznámka. Nyní nemluvíme o skalárním součinu čtyřvektorů v teorii relativity, jelikož nesplňuje poslední (šestou) podmínku, ani o komplexním skalárním součinu „bez hvězdičky“, protože nevyhovuje páté poznámce, $\mathbf{b}(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{x}})$ není obecně reálný a mluviti o šesté podmínce nemá vůbec cenu.

Definice. Vektory $\vec{\mathbf{v}}_1$, $\vec{\mathbf{v}}_2, \dots \vec{\mathbf{v}}_n$ nazveme vzájemně **kolmé** nebo **ortogonální**, platí-li (na pravé straně rovnosti níže zavádíme označení tzv. normy vektoru)

$$\mathbf{b}(\vec{\mathbf{v}}_i,\vec{\mathbf{v}}_j) = \delta_{ij}\,\|\vec{\mathbf{v}}_i\|^2\,, \tag{4.2}$$

kde δ_{ij} je tzv. **Kroneckerův symbol**: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ pokud } i=j \\ 0 \text{ pokud } i \neq j \end{cases}$

Skutečnost, že dva vektory $\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}}$ jsou kolmé, značíme také $\vec{\mathbf{a}} \perp \vec{\mathbf{b}} \iff \mathbf{b}(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}}) = 0$.

Úloha. Soubor nenulových vzájemně ortogonálních vektorů je vždy lineárně nezávislý.

Předběžné upozornění. Často, jako v případě $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ případně jejich podprostorů je skalární součin zadán jaksi „od přírody“. Uvidíme, že na každém lineárním prostoru lze skalární součin zavést, a to mnoha způsoby. Časem uvidíme, pro jaké problémy potřebujeme v daném lineárním prostoru „najít“ či zkonstruovat vhodný skalární součin. Je třeba také zdůraznit opačnou stránku věci: v mnoha problémech pojem skalárního součinu překáží správnému pochopení situace. Uvedení pojmu skalárního součinu a základních tvrzení s ním spjatých takto brzy ve výkladu lineární algebry lze odůvodnit tím, že pojmy jako „kolmost“ jsou v běžné představivosti přímo svázány s pojmy přímka, rovina a se zkoumáním jejich vzájemné polohy a pro začátečníka je spíše těžké pojem vektoru zcela oprostit od takovýchto zdánlivě nezbytných atributů – a v dalším pochopit, proč vůbec zavádíme třeba pojem duálního prostoru a proč mají tensory dva druhy indexů...

(Posuďme, jak je těžké pro začátečníka si jako isomorfismus prostorů $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bez skalárního součinu představit vedle otočení také kosení nebo natažení podél jedné nebo obou souřadnic.)

Příklady.

1. $\mathbf{b}(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}}) = \sum_{i=1}^{n} x^i \overline{y^i}$ pro $\vec{\mathbf{x}} = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{C}^n$ resp. $\mathbb{R}^n$ (pak lze vynechat sdružení)

2. Pojem skalárního součinu je důležitý i v analýze. Na prostorech funkcí bývá skalární součin zadán pomocí určitého integrálu. (Všimněte si, že tento přechod je zcela přirozený: v minulém příkladě jsme sčítali součiny hodnot[3] x a $\overline{y}$ v bodě i, v případě funkčním nabývá i – nyní značené jako x – hodnot ze spojitého oboru, a tak je přirozené nahradit sumaci integrací.)
$$\mathbf{b}(\vec{\mathbf{f}},\vec{\mathbf{g}}) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx \tag{4.3}$$
Konkrétně, pro polynomy se užívá
$$\int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx \quad \text{Legendreův skalární součin} \tag{4.4}$$
nebo
$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x)Q(x)e^{-x^2}dx \quad \text{Hermitův skalární součin} \tag{4.5}$$
(tento skalární součin je důležitý v kvantové mechanice při zkoumání harmonického oscilátoru) a mnohé další (slyš lineární algebru i analýzu).

KORELACE. Číslo $\mathbf{b}(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}})$ je v některých situacích nazýváno **korelací** mezi $\vec{\mathbf{x}}$ a $\vec{\mathbf{y}}$. Mějme zadány nějaké funkce x, y na konečné množině M, jejíž prvky označme jako $1,\ldots,n$, to jest mějme vektory $(x^1,\ldots,x^n)$ a $(y^1,\ldots,y^n)$. Podle znaménka $\mathbf{b}(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}}) := \sum_{i=1}^{n} x^i y^i$ se říká, že veličiny x a y jsou **kladně** nebo **záporně korelovány.** Za míru korelovanosti[4] obvykle považujeme veličinu „koeficient korelace“
$$c_{xy} = \frac{\mathbf{b}(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}})}{\|\vec{\mathbf{x}}\|\,\|\vec{\mathbf{y}}\|} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x^i y^i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x^i)^2 \sum_{i=1}^{n}(y^i)^2}} \tag{4.6}$$

[3] Pojímáme teď vektor x jako funkci, přiřazující proměnné i z oboru $1,\ldots,n$ i-tou souřadnici x^i.

[4] Jestliže chceme definovat ve statistice běžnější koeficient korelace, který je roven signu a, pokud y závisí lineárně na x ($y^i = ax^i + b$), je třeba nejprve odečíst od x resp. y průměr x resp. y: $x^i := x^i - \sum x^i/n$, $y^i := y^i - \sum y^i/n$.

a veličiny x, y, pro které je $c_{xy} = 0$ (alespoň přibližně), nazýváme **nekorelované** nebo nezávislé (toto slovo nechápejme v algebraickém smyslu). (Koeficient leží v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$.) Domníváme se např., že má smysl psát vztah typu

$$y^i = \alpha x^i + z^i + \text{const}; \quad i = 1, \ldots, n \tag{4.7}$$

kde $\vec{\mathbf{z}}$ je „nekorelovaný zbytek" takový, že $\mathbf{b}(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{z}}) = 0$ a $\sum_{i=1}^n z^i = 0$. To je tzv. **lineární regrese** a množina M zde má význam seznamu pořadových čísel měření. Ani lineární regresi netřeba přehánět, jak jsme často svědky při zpracování nejrůznějších dat v různých oblastech: z faktu, že je $\mathbf{b}(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) \neq 0$, což je téměř vždy, ještě neplyne, že vše souvisí lineárně se vším a že vypočtená veličina α dává nějakou užitečnou informaci. K závěrům nejrůznějších výzkumů typu „preparát P působí (ne)příznivě na to či ono" je dobré býti a priori spíše kritičtější, nejsou-li autoři odborníky v matematické statistice.

<u>Diracovské brackety.</u> Nenápadně si dovolujeme upozornit na názorný způsob zápisu rovnic s vektory, skalárním součinem atd., hojně používaný v kvantové teorii. Vektor $\vec{\mathbf{v}}$ lze psát jako $|v\rangle$, skalární součin

$$\mathbf{b}(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \langle y | x \rangle \tag{4.8}$$

(Všimněte si obráceného pořadí, v bracketech komplexně sdružujeme <u>levý</u> vektor.) Vektory $\langle \psi |$ jsou prvky **duálního vektorového prostoru**, o němž uslyšíme později, a existence skalárního součinu se ukazuje být v jistém smyslu ekvivalentní možnosti rozumného vzájemného přiřazení vektorů prostoru a jeho duálu (zajišťující smysluplnost $\langle y |$, máme-li $|y\rangle$.) Vektorům zapsaným $\langle \psi |$ resp. $|\psi\rangle$ říkáme bra-vektory resp. ket-vektory podle prvních resp. posledních tří písmen anglického výrazu pro závorku $\langle$bracket$\rangle$.

<u>Definice.</u> Funkci

$$\{\vec{\mathbf{x}} \to \|\vec{\mathbf{x}}\| \equiv \sqrt{\mathbf{b}(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}})}\} : \mathbb{V} \to \mathbb{R}^+ \tag{4.9}$$

nazveme **normou** vektoru $\vec{\mathbf{x}}$, indukovanou skalárním součinem b. Normou tedy myslíme „**délku**" vektoru a nikoliv její kvadrát, jak jest mnohdy dobrým zvykem.

Jak lze zrekonstruovat $\mathbf{b}(\ldots, \ldots)$, známe-li $\|\ldots\|$? Na to odpovídá následující tvrzení, zobecňující známou kosinovou větu.

<u>Věta.</u> $\mathbf{b}(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \frac{1}{2}(\|\vec{\mathbf{x}}\|^2 + \|\vec{\mathbf{y}}\|^2 - \|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}\|^2)$ (reálný případ)

<u>DŮKAZ.</u> *Okamžitě z bilinearity skalárního součinu. Nejjednodušší kontrolu koeficientů a znamének docílíte pro jednorozměrný prostor, kdy* $\vec{\mathbf{x}}$ *a* $\vec{\mathbf{y}}$ *jsou čísla a rovnost*

$$xy = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 - (x-y)^2\right) \tag{4.10}$$

platí. Stejně otestujte

$$\mathbf{b}(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \frac{1}{4}(\|\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}}\|^2 - \|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}\|^2). \tag{4.11}$$

V obecném komplexním případě je třeba užít složitější vztah, který dokážete zase tak, že čtverce norem napíšete jako skalární součiny a „roznásobíte" je (koeficienty u druhé proměnné je třeba při vytýkání sdružit).

<u>VĚTA.</u>

$$\mathbf{b}(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \frac{1}{4}(\|\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}}\|^2 - \|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}\|^2 + i\,\|\vec{\mathbf{x}} + i\vec{\mathbf{y}}\|^2 - i\,\|\vec{\mathbf{x}} - i\vec{\mathbf{y}}\|^2) \tag{4.12}$$

<u>CVIČENÍ.</u> Zatím ještě nevíme, že v $\mathbb{R}^3$ je $\mathbf{b}(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) \equiv x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = \|\vec{\mathbf{x}}\|\,\|\vec{\mathbf{y}}\|\cos\varphi$, kde φ je úhel mezi $\vec{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3)$ a $\vec{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3)$. Dokažte to!

<u>MINKOWSKÉHO VĚTA.</u> (trojúhelníková nerovnost pro normu)

$$\|\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}}\| \le \|\vec{\mathbf{x}}\| + \|\vec{\mathbf{y}}\| \tag{4.13}$$

<u>DŮKAZ.</u>

$$\|\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}}\|^2 = \mathbf{b}(\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}}) = \|\vec{\mathbf{x}}\|^2 + \|\vec{\mathbf{y}}\|^2 + \mathbf{b}(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) + \mathbf{b}(\vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{x}}) \tag{4.14}$$

$$? \le \|\vec{\mathbf{x}}\|^2 + \|\vec{\mathbf{y}}\|^2 + 2\,\|\vec{\mathbf{x}}\|\,\|\vec{\mathbf{y}}\|\,. \tag{4.15}$$

Poslední krok je oprávněn díky

<u>CAUCHYHO NEROVNOSTI.</u>

$$\mathbf{b}(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) + \mathbf{b}(\vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{x}}) \le 2\,\|\vec{\mathbf{x}}\|\,\|\vec{\mathbf{y}}\| \text{ v reálném případě } \mathbf{b}(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) \le \|\vec{\mathbf{x}}\|\,\|\vec{\mathbf{y}}\| \tag{4.16}$$

Důkaz Cauchyovy nerovnosti. *Funkce*

$$f(t) = \|\vec{\mathbf{x}} - t\vec{\mathbf{y}}\|^2 = \mathbf{b}(\vec{\mathbf{x}} - t\vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{x}} - t\vec{\mathbf{y}}) = \|\vec{\mathbf{x}}\|^2 - t\mathbf{b}(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) - t\mathbf{b}(\vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{x}}) + t^2 \|\vec{\mathbf{y}}\|^2 \tag{4.17}$$

je nezáporná $\forall t \in \mathbb{R}$, *tudíž diskriminant*

$$(\mathbf{b}(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) + \mathbf{b}(\vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{x}}))^2 - 4\|\vec{\mathbf{x}}\|^2 \|\vec{\mathbf{y}}\|^2 \leq 0. \tag{4.18}$$

Dokázali jsme tedy, že reálná část skalárního součinu dvou vektorů je menší nebo rovna součinu norem; stejně tak je ale menší nebo rovna absolutní hodnota skalárního součinu

$$|\mathbf{b}(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}})| \leq \|\vec{\mathbf{x}}\| \|\vec{\mathbf{y}}\|, \tag{4.19}$$

o čemž se lehce přesvědčíme tím, že vektor (třeba) $\vec{\mathbf{y}}$ *násobíme takovou komplexní jednotkou, aby byl skalární součin reálný, čímž se ovšem nezmění normy vektorů ani absolutní hodnota skalárního součinu, a přitom nerovnost už budeme mít dokázanou.*

Geometrické odbočení, definice. Isomorfismus mezi dvěma vektorovými prostory $\varphi : \mathbb{V} \to \widetilde{\mathbb{V}}$ zachovávající navíc i skalární součin

$$\tilde{\mathbf{b}}(\varphi(\vec{\mathbf{v}}), \varphi(\vec{\mathbf{w}}))_{\widetilde{\mathbb{V}}} = \mathbf{b}(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}) \tag{4.20}$$

nazveme **isomorfismem prostorů se skalárním součinem** $(\mathbb{V}, b)$ a $(\widetilde{\mathbb{V}}, \widetilde{b})$.

Definice. Prostor $\mathbb{R}^n$ s obvyklým skalárním součinem

$$\mathbf{b}(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i \tag{4.21}$$

budeme nazývat **euklidovským** prostorem; označení $\mathbb{E}^n$.

Příklad. Máme charakterisovat všechny isomorfismy $\mathbb{E}^2$ do sebe (v pozdější terminologii všechna ortogonální zobrazení). (Morfismy algebraické struktury $\mathbb{S}$ do sebe se nazývají **endomorfismy** a ty, které jsou navíc isomorfismy, se označují za **automorfismy**, tvoří grupu často značenou $\mathrm{Aut}(\mathbb{S})$.)

Věta. Takový isomorfismus $\varphi : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ je

1. buď otočením o vhodný úhel ω (pro $\omega = 0$ identita)

2. nebo komposicí otočení se zrcadlením ζ, např.

$$\zeta((x,y)) = (x,-y) \tag{4.22}$$

   v tom či onom pořadí.

<u>POZNÁMKA.</u> Morfismy z prvé skupiny tvoří normální podgrupu všech isomorfismů. Promyslete, proč je faktorgrupou grupa

$$\{\text{isomorfismy neměnící orientaci, isomorfismy měnící orientaci}\} \tag{4.23}$$

isomorfní grupě $\{+1,-1\}$ s násobením nebo grupě $(\mathbb{Z}_2, +\text{modulo } 2)$.

<u>DŮKAZ.</u> *Pišme* $\varphi((1,0)) = (a,c)$ *a* $\varphi((0,1)) = (b,d)$. *Podle definice isomorfismu platí vztahy (dosaďte vektory base)*

$$\|\varphi(\vec{\mathbf{x}})\|^2 = \|\vec{\mathbf{x}}\|^2 \Rightarrow a^2+c^2 = 1,\ b^2+d^2 = 1. \tag{4.24}$$

$$\mathbf{b}(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}}) = 0 \Rightarrow \mathbf{b}(\varphi(\vec{\mathbf{x}}),\varphi(\vec{\mathbf{y}})) = 0 \Rightarrow ab+cd = 0. \tag{4.25}$$

Vyjádřeme tedy $a = \cos\alpha$, $c = \sin\alpha$, $b = -\sin\gamma$, $d = \cos\gamma$.

Pak $-\cos\alpha.\sin\gamma + \sin\alpha.\cos\gamma = \sin(\alpha-\gamma) = 0$.

Buď se tedy α *a* γ *liší o násobek* 2π, *tedy*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{4.26}$$

jde o rotaci o úhel α, *nebo se liší o <u>lichý</u> násobek* π, *pak*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.27}$$

vidíme komposici otočení a zrcadlení. (Násobení matic budete zvládat nejpozději brzy.)

4.1 Gramm-Schmidtova ortogonalisace

Seznámíme se nyní s jednou velmi přirozenou konstrukcí, mající názorný geometrický význam. (Budeme časem možná až překvapeni, ke kolika netriviálním aplikacím plným „složitých formulí“ tato metoda povede; bude např. jednotícím prvkem rozsáhlé kapitoly klasické analýzy zvané *Teorie ortogonálních polynomů.*)

Máme-li dva vektory $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2$, můžeme vyjádřit

$$\vec{\mathbf{v}}_2 = a\vec{\mathbf{v}}_1 + \vec{\mathbf{w}}_2 \quad \text{tak, aby} \quad \vec{\mathbf{v}}_1 \perp \vec{\mathbf{w}}_2. \tag{4.28}$$

Další text rozšiřuje tuto operaci na případ více vektorů.

<u>VĚTA.</u> Nechť $\vec{\mathbf{v}}_{1\ldots n} \in (\mathbb{V}, b)$. Pak

$$\exists \vec{\mathbf{w}}_{1\ldots n} \text{ takové, že}$$

1. $\mathbf{b}(\vec{\mathbf{w}}_i, \vec{\mathbf{w}}_j) = 0$ když $i \neq j$. Píšeme též $\vec{\mathbf{w}}_i \perp \vec{\mathbf{w}}_j$.
2. $\mathcal{L}(\{\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_k\}) = \mathcal{L}(\{\vec{\mathbf{w}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{w}}_k\})$ platí $\forall k = 1, \ldots, n$.

<u>DŮKAZ.</u> Kreslete si obrázek pro $k = 2, 3$, projděte Grammovým a Schmidtovým ortogonalisačním procesem vlastní nohou. *Druhá podmínka bude splněna, volíme-li* $\vec{\mathbf{w}}_j$ *ve tvaru*[5]

$$\vec{\mathbf{w}}_k = \vec{\mathbf{v}}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \vec{\mathbf{w}}_j \lambda_k^j \;\; \textit{neboli} \;\; \vec{\mathbf{v}}_k = \vec{\mathbf{w}}_k + \sum_{j=1}^{k-1} \vec{\mathbf{w}}_j \lambda_k^j. \tag{4.29}$$

Je zřejmě $\mathcal{L}(\{\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_k\}) = \mathcal{L}(\{\vec{\mathbf{w}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{w}}_{k-1}, \vec{\mathbf{v}}_k\})$ *podle indukčního předpokladu a díky volbě* $\vec{\mathbf{w}}_k$ *také* $\mathcal{L}(\{\vec{\mathbf{w}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{w}}_k\}) = \mathcal{L}(\{\vec{\mathbf{w}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{w}}_{k-1}, \vec{\mathbf{v}}_k\})$. *Podmínka prvá vyžaduje, aby* $\forall i = 1, \ldots, k-1$ *bylo*

$$\vec{\mathbf{w}}_i \perp \vec{\mathbf{w}}_k \Leftrightarrow \mathbf{b}(\vec{\mathbf{w}}_i, \vec{\mathbf{v}}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \vec{\mathbf{w}}_j \lambda_k^j) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{b}(\vec{\mathbf{w}}_i, \vec{\mathbf{v}}_k) = \mathbf{b}(\vec{\mathbf{w}}_i, \vec{\mathbf{w}}_i)\lambda_k^i, \tag{4.30}$$

což jednoznačně určuje λ_k^i.

<u>PŘÍKLAD.</u>

- Legendreovy polynomy $P_n(x) = \alpha_n^P \frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]$ tvoří ortogonalisaci $1, x, x^2, \ldots$ vůči skalárnímu součinu $\int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx$.
- Hermitovy polynomy $H_n(x) = \alpha_n^H e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$ tvoří ortogonalisaci vůči skalárnímu součinu $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}e^{-x^2}dx$ funkcí $1, x, x^2, \ldots$.

[5] Máme tedy $\vec{\mathbf{w}}_1 = \vec{\mathbf{v}}_1$.

`Nejde o nic jiného, než že vezmeme první vektor ze souboru, ke druhému přičteme takový násobek prvního, aby byl kolmý na první, ke třetímu přičteme takové kombinace těch předcházejících vektorů (těch, které jsou již kolmé navzájem), aby byl kolmý opět na všechny předchozí atd., až dostaneme vektory, které generují týž prostor, jako ty původní, ale vzájemně již jsou kolmé.`

4.2 Ortogonální doplněk

Definice doplňku. Množinu $\{\vec{\mathbf{v}} \,|\, \vec{\mathbf{v}} \perp \vec{\mathbf{w}}\ \forall \vec{\mathbf{w}} \in W\}$ nazveme **ortogonálním doplňkem** množiny $W \subseteq \mathbb{V}$, značíme $W^\perp$ a znak čteme komín nebo kolmítko.

Tvrzení. $(W^\perp)^\perp = \mathcal{L}(W)$.

Lemma, jež se bude hodit. Nechť $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$. Pak každou ortogonální basi $\vec{\mathbf{w}}_{1\ldots n}$ prostoru $\mathbb{W}$ lze prodloužit na ortogonální basi celého $\mathbb{V}$; *prodloužíme basi libovolným způsobem na basi celého* $\mathbb{V}$ *a ortogonalisujeme à la Gramm-Schmidt.*

Jeho důsledek. $\dim \mathbb{W}^\perp = \dim \mathbb{V} - \dim \mathbb{W}$.

Důkaz tvrzení.

- *Nechť je W lineární prostor (budeme tedy tutéž množinu psát zdvojeným $\mathbb{W}$). Jelikož je zřejmé, že $\mathbb{W} \subseteq (\mathbb{W}^\perp)^\perp$ (poněvadž vektor je kolmý na všechny vektory, které jsou kolmé na něho) a dále* $\dim \mathbb{W} = \dim(\mathbb{W}^\perp)^\perp$ *dle lemmatu, musí být $\mathbb{W} = (\mathbb{W}^\perp)^\perp$.*
- *Zřejmě je $W^\perp = (\mathcal{L}(W))^\perp$, a proto $(W^\perp)^\perp = \mathcal{L}(W)$ dle minulého bodu.*

Definice. Nechť $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$. Dle předchozího tvrzení lze každý vektor $\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{V}$ napsat ve tvaru

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{w}} + \tilde{\vec{\mathbf{w}}},\ \text{kde}\ \vec{\mathbf{w}} \in \mathbb{W},\ \tilde{\vec{\mathbf{w}}} \in \mathbb{W}^\perp.$$

Zobrazení $\{\vec{\mathbf{v}} \mapsto \vec{\mathbf{w}}\} : \mathbb{V} \to \mathbb{W}\,(\subseteq \mathbb{V})$ nazýváme **ortogonální projekcí** na podprostor $\mathbb{W}$.

Nechť $\mathbb{W}_1 \subseteq \mathbb{V}$, $\mathbb{W}_2 \subseteq \mathbb{V}$, ..., $\mathbb{W}_n \subseteq \mathbb{V}$ jsou na sebe vzájemně kolmé podprostory takové, že

$$\dim \mathbb{V} = \sum_{j=1}^{n} \dim \mathbb{W}_j \tag{4.31}$$

($\mathbb{W}_i \perp \mathbb{W}_j$ znamená $\forall \vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{W}_i \quad \forall \vec{\mathbf{w}} \in \mathbb{W}_j \quad \vec{\mathbf{v}} \perp \vec{\mathbf{w}}$). Pak existuje jednoznačný rozklad vektoru $\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{V}$

$$\vec{\mathbf{v}} = \textstyle\sum_{j=1}^{n} \vec{\mathbf{w}}_j, \text{ kde } \vec{\mathbf{w}}_j \in \mathbb{W}_j.$$

Pochopte a vysvětlete jednomu člověku, který to nechápe. Zobrazení $\{\vec{\mathbf{v}} \mapsto \vec{\mathbf{w}}_j\} : \mathbb{V} \to \mathbb{W}_j \ (\subseteq \mathbb{V})$ označujeme dále p_j a nazýváme ortogonální projekcí na $\mathbb{W}_j$. Platí tedy: identické zobrazení$= \sum_{j=1}^{n} p_j$[6].

1. První a druhá Pythagorova věta: Velikost čtverce pod odvěsnou resp. přeponou se rovná velikosti čtverce nad odvěsnou resp. přeponou.
2. Třetí Pythagorova věta: $\|\vec{\mathbf{v}}\|^2 = \|\vec{\mathbf{w}}\|^2 + \left\|\tilde{\vec{\mathbf{w}}}\right\|^2$.
3. Obecnější čtvrtá Pythagorova věta: $\|\vec{\mathbf{v}}\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|\vec{\mathbf{p}}_j(\vec{\mathbf{w}})\|^2$.
4. Pátou „Pythagorovu větu“ uvidíme ve formě Parsevalovy rovnosti na straně 257.
5. Parafráze Pythagorovy věty ve tvaru, kdy odvěsny a přepony již nejsou úsečkami, nýbrž vícerozměrnými simplexy, pochází od Grassmanna a my o ní mluvíme na str. 315. Pythagoras ji asi ještě neznal.

Důkazy si proveďte sami kromě šesté věty.

Projekcí bez přívlastku ortogonální a bez předpokladu zavedení skalárního součinu nazveme lineární zobrazení $p : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$, platí-li $p^2 = p$. Projekce $p_1, \ldots, p_n$ nazveme **doplňkové**, platí-li $\forall i \neq j : \ p_i p_j = p_j p_i = 0$ a $\mathbf{1} = \sum_{j=1}^{n} p_j$, kde $\mathbf{1}$ označuje identické zobrazení. Operátoru splňujícímu $p^2 = p$ se také říká **idempotentní** (z latinského „stejný jako mocniny“) a co se týče vlastních čísel x (viz dále), splňují $x^2 = x$, tedy $x = 0$ resp. $x = 1$.

[6] Poslednímu vztahu se v kvantové fysice říká **relace úplnosti**. Sečteme-li projektory $|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ na všechny vektory („stavy“) z base (na podprostory jimi generované), dostaneme identický operátor (zde značený svislou čarou) $| = \sum_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$

Kapitola 5

Matice a lineární zobrazení

<u>MOTTO.</u> Matice Indukují Lineární Obrazení Študákům, Znalým A Holdujícím Raději Algebraickým Dohadům Než Idiotským Klepům.

Linearita Umožňuje Bezpečné Odstranění Šotků, Mařících Odvěké Touhy Lidstva.

<u>DEFINICE.</u> **Lineárním zobrazením (homomorfismem)** $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ rozumíme každé zobrazení splňující vztahy

$$f(\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}}) = f(\vec{\mathbf{v}}) + f(\vec{\mathbf{w}}) \quad \forall \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}} \in \mathbb{V} \tag{5.1}$$

$$f(\lambda \vec{\mathbf{v}}) = \lambda f(\vec{\mathbf{v}}) \tag{5.2}$$

<u>PŘÍKLADY.</u>

1. Zobrazení typu $\{\vec{\mathbf{x}} \mapsto \vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{x}})\} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, kde[1]

$$\vec{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ \vdots \\ f^m \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad f^k(\vec{\mathbf{x}}) = \sum_{j=1}^{n} a^k{}_j x^j. \tag{5.3}$$

Tabulku $(a^k{}_j)$ nazýváme **maticí** tohoto lineárního zobrazení.

[1] V zájmu budoucnosti píšeme některé indexy nahoru. Koho to obtěžuje, nechť si představí všechny dole.

2. Otočení, zrcadlení, stejnolehlost, kosení (ale nikoli posun vektoru, nulovému vektoru musí být přiřazen opět nulový) atd. jako příklady z elementární geometrie.

   Chceme-li mluvit o zobrazeních v tzv. **afinních** prostorech (včetně posunu), je užitečné psát souřadnice vektoru v n-rozměrném prostoru nikoli pouze $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, ale $(x^1, x^2, \ldots, x^n, 1)$ a identifikovat tento vektor s jeho násobky. Tímto se nám také přirozeně odkryjí nevlastní body (v nekonečnu) jako vektory s nulovou poslední (přidanou) souřadnicí. Transformace souřadnic zahrnující posunutí bude mít tvar

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R} & \vec{\mathbf{v}} \\ \vec{\mathbf{0}} & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.4}$$

   kde matice $\mathbf{R}$ obhospodařuje obvyklou část lineárního zobrazení a sloupcový vektor $\vec{\mathbf{v}}$ posun. Další poznámky o **projektivním prostoru** v kapitole o kvadratických plochách.

3. Ortogonální projekce na podprostor.

4. Řada příkladů z analýzy na nekonečněrozměrných prostorech funkcí a jejich vhodných (i konečnědimensionálních) podprostorech, kupř.

$$f \mapsto f' \equiv \frac{df}{dx} \quad \text{(derivace)} \tag{5.5}$$

$$f \mapsto \int_0^x f(y)dy \quad \text{(primitivní funkce)} \tag{5.6}$$

$$f \mapsto g \cdot f \quad \text{(násobení funkcí)} \tag{5.7}$$

$$f \mapsto f_t \quad \text{kde } f_t(x) = f(x+t), \quad (\text{posun o } t). \tag{5.8}$$

   Lineární zobrazení $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$, zvláště na prostorech funkcí, nazýváme **operátory**. (Např. operátor derivování, operátor souřadnice, tj. násobení funkcí $g(x) = x$ apod.)

5. Mnohá nelineární zobrazení bývá užitečné linearisovat.

Matice

Brzy uvidíme, jak je výhodné pracovat abstraktním způsobem s operátory bez jejich vyjadřování v určité basi. O tom, s jakým váháním se uskutečňoval krok k bezsouřadnicovému myšlení, svědčí výzva E. Schmidta na jednom semináři v Göttingenu k Johannu[2] von Neumannovi z konce dvacátých let:

„Ne, ne! Neříkejte operátor, říkejte matice!“

Začněme tedy s definicí matice.

<u>Definice.</u> Nechť $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ je lineární zobrazení, $\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n$ base $\mathbb{V}$ a $\vec{\mathbf{w}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{w}}_m$ base $\mathbb{W}$. Pišme

$$\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}}_i) = \sum_{j=1}^{m} \vec{\mathbf{w}}_j a^j{}_i. \tag{5.9}$$

To lze, neboť $\mathbb{W} = \mathcal{L}(\{\vec{\mathbf{w}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{w}}_m\})$. Tabulku

$$\mathbf{A} = (a^j{}_i), \quad j = 1, \ldots, m, \quad i = 1, \ldots, n \tag{5.10}$$

nazveme **maticí** f <u>vůči basím $\vec{\mathbf{v}}_i$ a $\vec{\mathbf{w}}_j$.</u> Prvky matice řaďme

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 & \cdots & a^1{}_n \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 & \cdots & a^2{}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^m{}_1 & a^m{}_2 & \cdots & a^m{}_n \end{pmatrix} \tag{5.11}$$

(píšeme-li indexy všude dole $(a^i{}_j = a_{ij})$, po řádkách čteme čísla 11,12,... v běžném pořadí) a její velikost vyslovujme jako výška krát šířka, čili zde $m \times n$. Často se zajímáme o případ $\mathbb{V} = \mathbb{W}$ a $\vec{\mathbf{v}}_i = \vec{\mathbf{w}}_i$ a mluvíme o matici vzhledem k (jedné) basi $\vec{\mathbf{v}}_i$.

<u>Věta.</u> Nechť $\vec{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{v}}_i x^i$. Potom $\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{x}}) = \sum_{j=1}^m \vec{\mathbf{w}}_j y^j$, kde

$$y^j = \sum_{i=1}^{n} a^j{}_i x^i. \tag{5.12}$$

V důkazu je užit jen vztah pro obraz vektoru base, linearita a změna pořadí dvou sum.

$$\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}}_i) x^i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \vec{\mathbf{w}}_j a^j{}_i x^i = \sum_{j=1}^{m} \vec{\mathbf{w}}_j y^j \tag{5.13}$$

[2] Tehdy ještě; později po emigraci John.

<u>VĚTA O SLOŽENÉM ZOBRAZENÍ.</u> Nechť $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ má matici $\mathbf{A}$ vůči basím $\vec{\mathbf{v}}_{1\ldots n}$ a $\vec{\mathbf{w}}_{1\ldots m}$. Nechť $g : \mathbb{W} \to \mathbb{Z}$ má matici $\mathbf{B}$ vůči basím $\vec{\mathbf{w}}_{1\ldots m}$ a $\vec{\mathbf{z}}_{1\ldots p}$. Pak komposice

$$g \circ f : \mathbb{V} \to \mathbb{Z} \tag{5.14}$$

má matici $\mathbf{C}$ vůči basím $\vec{\mathbf{v}}_{1\ldots n}$ a $\vec{\mathbf{z}}_{1\ldots p}$, přičemž matice $\mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ je komposice neboli součin matic[3] $\mathbf{B}$ a $\mathbf{A}$ a má elementy

$$c^j{}_i = \sum_{k=1}^{m} b^j{}_k a^k{}_i. \tag{5.15}$$

<u>DŮKAZ.</u>

$$\vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}}_i)) = \vec{\mathbf{g}}(\sum_{k=1}^{m} \vec{\mathbf{w}}_k a^k{}_i) = \sum_{k=1}^{m} \vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{w}}_k) a^k{}_i = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{p} \vec{\mathbf{z}}_j b^j{}_k a^k{}_i = \sum_{j=1}^{p} \vec{\mathbf{z}}_j c^j{}_i \tag{5.16}$$

<u>UŽITEČNÝ ÚKOL.</u> Ověřte <u>asociativitu</u> násobení matic $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{D}$ a distributivnost $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{F}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{F}$ a $(\mathbf{E} + \mathbf{F}) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{A}$.

<u>POZNÁMKY.</u>

- <u>Pravidlo pro zapamatování „řádka krát sloupec“</u> zní, že $c^j{}_i$ je skalárním součinem j-tého řádku $\mathbf{B}$ a i-tého sloupce $\mathbf{A}$, je třeba ale vynechat komplexní sdružování.
- Čtvercové matice daného rozměru $n \times n$ tvoří nekomutativní <u>okruh</u> vůči sčítání[4] a násobení. Toto platí samozřejmě i o množině všech lineárních zobrazení $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$.
- V případě čtvercových matic „obvykle“ neplatí $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$; je-li alespoň jedna nečtvercová, tak mají tyto součiny různý rozměr nebo dokonce neexistují, a tak o neplatnosti rovnosti nikdo nepochybuje.

<u>TEST.</u> Učte se násobit matice, dokud nebudete souhlasit s tím, že

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & -19 \\ 13 & 19 \\ 8 & 17 \end{pmatrix} \tag{5.17}$$

[3]Nezaměňujte s $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, existuje-li!

[4]Matice se sčítají zřejmým způsobem: $c^i{}_j = a^i{}_j + b^i{}_j$, je-li $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$.

Příklady z analýzy: operátory derivace a posunu

<u>OPERÁTOR DERIVACE.</u> Na prostoru $\mathcal{P}_n$ všech polynomů nejvýše n-tého stupně má operátor $D[f] = f'$ vůči basi $1, x, x^2, \ldots$ matici

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \circ & 1 & \circ & \circ & \cdots \\ \circ & \circ & 2 & \circ & \cdots \\ \circ & \circ & \circ & 3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{5.18}$$

Všimněte si, že ve třetím sloupci je vektor přiřazený operátorem derivace třetímu vektoru base, vyjádřený pomocí souřadnic v téže basi.

Pokud bychom zkoumali matici derivování vůči basi

$$1, x, \frac{x^2}{2!}, \frac{x^3}{3!}, \frac{x^4}{4!} \ldots, \tag{5.19}$$

měla by matice tvar (protože $d/dx(x^k/k!) = (x^{k-1}/(k-1)!)$)

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \circ & 1 & \circ & \cdots & \circ \\ \circ & \circ & 1 & \cdots & \circ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \circ & \cdots & 1 \\ \circ & \circ & \circ & \cdots & \circ \end{pmatrix}, \tag{5.20}$$

který bude jakýmsi standardem v kapitole o nilpotentních operátorech. (Spočtěte $\mathbf{N}^2$, $\mathbf{N}^3$.... Snad vám vyjde, že jedničky se jen posouvají od diagonály.)

<u>OPERÁTOR POSUNU.</u> Najdeme matici $\mathbf{P}_\alpha$ operátoru posunu $\{f \mapsto f_\alpha\}$, kde $f_\alpha(x) = f(x+\alpha)$, vůči basi $1, x, x^2/2!, \ldots$ a dokážeme vztah

$$\mathbf{P}_\alpha = \mathbf{1} + \alpha\mathbf{N} + \frac{\alpha^2}{2!}\mathbf{N}^2 + \ldots + \frac{\alpha^n}{n!}\mathbf{N}^n, \tag{5.21}$$

přičemž $\mathbf{1}$ značí **jednotkovou matici** operátoru identity, která má na diagonále jednotky a jinde nuly a proto[5]

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & \circ & \cdots & \circ \\ \circ & 1 & \cdots & \circ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \quad \text{resp.} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{A} \qquad ({\mathbf{1}^i}_j = {\delta^i}_j) \tag{5.22}$$

[5]Pro jednotkovou matici se mnohdy užívají symboly I, E, J a další.

pro stejně vysokou resp. širokou matici $\mathbf{A}$, jako je jednotková matice. V uvedeném vztahu rozpoznáváme Taylorův vzorec známý z analýzy a věc budeme dále studovat v kapitole o exponenciále.

Operátor posunu totiž vektoru base $x^k/k!$ přiřadí funkci (podle binomické věty)

$$\frac{(x+\alpha)^k}{k!} = \sum_{j=0}^{k} \frac{x^j}{j!} \frac{\alpha^{k-j}}{(k-j)!}, \tag{5.23}$$

což je kombinace vektorů base $x^j/j!$. Matice $\mathbf{P}_\alpha$ tedy bude mít na místě s indexy $\binom{j}{k}$ prvek

$$\frac{\alpha^{k-j}}{(k-j)!}. \tag{5.24}$$

Stejně tak pravá strana přispívá na posici $\binom{j}{k}$ jen členem s $(k-j)$-tou mocninou $\mathbf{N}$ (což jste snad dokázali v úloze), před níž je týž koeficient.

Úloha. Zamyslete se, jak se chová operátor $\mathbf{P}_\alpha$ pro $\alpha \to 0$.

Operátor diference

Všimněme si nyní diskrétní variace na téma operátoru derivace.

Zkoumejme operátor

$$\hat{\mathcal{D}}_t = \frac{1}{t}(\mathbf{P}_t - \mathbf{1}), \tag{5.25}$$

kde symbolem $\mathbf{1}$ označujeme identické zobrazení $\{f \mapsto f\}$. Jde o tzv. **operátor první diference**, podrobněji

$$[\hat{\mathcal{D}}_t f](x) = \frac{1}{t}(f(x+t) - f(x)). \tag{5.26}$$

Rozviňme $(\hat{\mathcal{D}}_t)^n = ((\mathbf{P}_t - \mathbf{1})/t)^n$ podle binomické formule (a nebojme se toho, že pracujeme s operátory a nikoliv s čísly a tedy vlastně používáme platnost binomické formule na komutativním okruhu):

$$(\hat{\mathcal{D}}_t)^n = \frac{1}{t^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!(n-k)!} \mathbf{P}_{kt}, \quad \left(\mathbf{P}_{kt} = (\mathbf{P}_t)^k\right) \tag{5.27}$$

nebo pro konkrétní funkci f

$$[(\hat{\mathcal{D}}_t)^n f](x) = \frac{1}{t^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!(n-k)!} f(x+kt) \tag{5.28}$$

Následující cvičení je už spíše z analýzy.

Úloha. Dokažte pomocí l'Hospitalova pravidla vztah

$$\lim_{t\to 0}[(\hat{\mathcal{D}}_t)^n f](x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x) \qquad \left(\text{užijte} \quad 0 = (1-1)^m = \sum_{k=0}^{m} \frac{m!(-1)^k}{k!(m-k)!}\right) \tag{5.29}$$

a uznejte, že

$$(\hat{\mathcal{D}}_t)^n \tag{5.30}$$

je vhodnou náhražkou n-té derivace v případě, že f je zadána jen pomocí hodnot na nějaké podmřížce $\mathbb{R}$, to jest v bodech $x + mt$, $m \in \mathbb{Z}$. Pro nepravidelné rozmístění bodů v mřížce je dobrá Vandermondova matice, viz dále.

5.1 Některé další význačné příklady matic

Permutační matice indukovaná permutací $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ má prvky

$$\mathbf{p}^i{}_j = \delta^i{}_{\pi(j)}. \tag{5.31}$$

Má tu prostou vlastnost, že prvkům base přiřadí tytéž v jiném pořadí:

$$\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}}_j) = \sum \vec{\mathbf{v}}_i \delta^i{}_{\pi(j)} = \vec{\mathbf{v}}_{\pi(j)}. \tag{5.32}$$

Tímto jsme **representovali** grupu permutací na $\{1, \ldots, n\}$ v grupě všech matic $n \times n$, které odpovídají isomorfismům na $\mathbb{V}$ (tj. regulárních, viz dále).

Trojúhelníkové matice horní resp. **dolní A** jsou takové, pro něž $a^i{}_j = 0$ pro $i > j$ resp. $i < j$.

Poznámka. Taková matice se již objevila při popisu Gramm--Schmidtova ortogonalisačního procesu. Obecněji, máme-li zadaný řetězec podprostorů $\mathbb{V}_1 \subseteq \mathbb{V}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathbb{V}_n \equiv \mathbb{V}$ a máme-li zobrazení $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ takové, že $f(\mathbb{V}_i) \subseteq \mathbb{V}_i$ a značí-li $\mathbf{A}$ jeho matici vůči postupně doplňované basi, má $\mathbf{A}$ tvar, v němž se postupně zleva doprava snižuje (nebo zůstává stejný) sloupec nul, jímž končí každý sloupec matice, něco jako horní trojúhelníková matice, v níž jsou elementy bloky a nikoli již pouhá čísla, kde bloky odpovídají doplňujícím prvkům base $\mathbb{V}_i$ vůči $\mathbb{V}_{i-1}$. Bloky jsou triviální, je-li $\dim \mathbb{V}_i = \dim \mathbb{V}_{i-1} + 1$. Množina zobrazení tohoto typu tvoří **pologrupu** (uzavřenou na komposici, obsahující jednotkový prvek). Najděte nějaké její podgrupy. Návod: Zaměňte $f(\mathbb{V}_i) \subseteq \mathbb{V}_i$ za silnější předpoklad.

Diagonální matice je taková, že ${a^i}_j = 0$ pro $i \neq j$, tedy taková, které je zároveň horní trojúhelníková i dolní trojúhelníková. Diagonální matice tvoří podpologrupu předchozí pologrupy. Co musíme ještě požadovat, aby šlo o multiplikativní grupu a nejen pologrupu (grupa bez požadavku existence inversního prvku)?

Z mnoha význačných příkladů matic, jimiž se hemží sbírky příkladů (např. od Proskurjakova) uvedeme jeden (dvojitý) příklad.

Vandermondova matice

Polynom n-tého stupně můžeme charakterisovat

1. buď zadáním jeho koeficientů: $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$.
2. nebo třeba zadáním hodnot v nějakých bodech $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Vztah mezi těmito dvěma soubory čísel lze zapsat jako

$$\begin{pmatrix} p(\alpha_0) \\ p(\alpha_1) \\ \vdots \\ p(\alpha_n) \end{pmatrix} = \mathbf{V} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_0 & \alpha_0^2 & \cdots & \alpha_0^n \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \tag{5.33}$$

Stejná matice vzniká při zkoumání následujícího, zdánlivě odlišného, fakticky však téměř totožného problému: víme, že

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x), \tag{5.34}$$

a chceme pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každou volbu čísel $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ najít koeficienty $q_0, q_1, \ldots, q_n$, aby

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sum_{i=0}^{n} q_i f(x + h\alpha_i)}{h^n} = f^{(n)}(x), \tag{5.35}$$

chceme tedy odvozovat vzorce typu

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2}. \tag{5.36}$$

Řešte užitím l'Hospitalova pravidla; snad vám vyjde, že

$$\begin{pmatrix} q_0, & q_1, & \cdots, & q_n \end{pmatrix} \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0, & 0, & \cdots, & n! \end{pmatrix} \tag{5.37}$$

Kapitola 6

Hodnost

Začneme větou, která by se stejně tak mohla hodit do partie o dimensi a která zobecňuje rovnost $\dim \mathbb{W} + \dim \mathbb{W}^{\perp} = \dim \mathbb{V}$ pro $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$.

<u>Věta.</u> Pro dané zobrazení $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ zaveďme symboly [1]

$$\mathbb{K}\mathrm{er}\,(f) = \{\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{V} \,|\, \vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}}) = \vec{\mathbf{0}}\}, \tag{6.1}$$

$$\mathbb{I}\mathrm{m}\,(f) = f(\mathbb{V}) = \{\vec{\mathbf{w}} \in \mathbb{W} \,|\, \exists \vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{V} \quad \vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}}) = \vec{\mathbf{w}}\} \tag{6.2}$$

a mluvme o **jádru** neboli **nulovém prostoru** a **obrazu** daného lineárního zobrazení.

$$\text{Pak je} \quad \dim \mathbb{K}\mathrm{er}\,(f) + \dim \mathbb{I}\mathrm{m}\,(f) = \dim \mathbb{V}.$$

<u>Důkaz.</u> *Nechť* $\vec{\mathbf{w}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{w}}_m$ *je base* $\mathbb{I}\mathrm{m}\,(f)$ *a nechť* $\vec{\mathbf{z}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{z}}_k$ *je base* $\mathbb{K}\mathrm{er}\,(f)$. *Najděme pro každé* $i = 1, \ldots, m$ *nějaké* $\vec{\mathbf{v}}_i$ *takové, že* $\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}}_i) = \vec{\mathbf{w}}_i$. *Potom je* $\vec{\mathbf{z}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{z}}_k, \vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_m$ *base prostoru* $\mathbb{V}$, *poněvadž je-li* $\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{V}$ *a píšeme-li (jednoznačně)*

$$\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}}) = \sum_{i=1}^{m} \vec{\mathbf{w}}_i \lambda^i \qquad \left(\Rightarrow \vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}} - \sum_{i=1}^{m} \vec{\mathbf{v}}_i \lambda^i) = 0\,(!) \right), \tag{6.3}$$

existují jednoznačně určené koeficienty $\mu^1, \ldots, \mu^k$ *takové, že*

$$\vec{\mathbf{v}} - \sum_{i=1}^{m} \vec{\mathbf{v}}_i \lambda^i = \sum_{j=1}^{k} \vec{\mathbf{z}}_j \mu^j. \tag{6.4}$$

---

[1] Obor hodnot, námi značený jako <u>image</u> (obraz), se mnohdy značí $R(f)$ jako zkratka slova <u>range</u>. Naším značením se vyhneme nedorozuměním pramenícím z faktu, že $R(f) = \mathbb{S}(\mathbf{A})$ a nikoliv $R(f) = \mathbb{R}(\mathbf{A})$.

<u>Označení.</u> Pro matici $\mathbf{A}$ zřídíme symboly

$$\vec{\mathbf{r}}^j = \left(a^j{}_1, a^j{}_2, \ldots, a^j{}_n\right) \quad \text{a} \quad \vec{\mathbf{s}}_i = \begin{pmatrix} a^1{}_i \\ a^2{}_i \\ \vdots \\ a^m{}_i \end{pmatrix} \tag{6.5}$$

pro její j-tý řádek a i-tý sloupec (zkratka slovenského riadok a stĺpec). Prostory

$$\mathbb{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{L}(\{\vec{\mathbf{r}}^1, \ldots, \vec{\mathbf{r}}^m\}) \subseteq \mathbb{R}^n, \tag{6.6}$$

$$\mathbb{S}(\mathbf{A}) = \mathcal{L}(\{\vec{\mathbf{s}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{s}}_n\}) \subseteq \mathbb{R}^m \tag{6.7}$$

nazýváme **řádkovým** resp. **sloupcovým prostorem** matice $\mathbf{A}$.

<u>Definice.</u> Mějme lineární zobrazení $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ s maticí $\mathbf{A}$ vůči basím $\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n$ a $\vec{\mathbf{w}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{w}}_n$. Označme symboly

$$h = h_f = \dim \mathbb{I}\mathrm{m}\,(f); \tag{6.8}$$

$$h_r = h_r(\mathbf{A}) = \dim \mathbb{R}(\mathbf{A}); \quad h_s = h_s(\mathbf{A}) = \dim \mathbb{S}(\mathbf{A}). \tag{6.9}$$

<u>Věta.</u> $h_r = h_s = h$. Společnou hodnotu budeme nazývat **hodností** matice $\mathbf{A}$ resp. zobrazení f. Vzhledem k důležitosti tohoto tvrzení uvedeme dva důkazy vztahu $h_r = h_s$ (a souvislosti s h si necháme na konec).

<u>Lemma, základ prvého způsobu.</u> Nechť matice $\mathbf{A}'$ vznikne z matice $\mathbf{A}$ vynecháním sloupce, který je lineární kombinací ostatních. Potom samozřejmě $h_s(\mathbf{A}) = h_s(\mathbf{A}')$ (proč?), ale také

$$h_r(\mathbf{A}) = h_r(\mathbf{A}'). \tag{6.10}$$

(Platí zajisté i lemma, kde zaměníme slovo „řádka", písmeno „r" atd. slovem „sloupec", písmenem „s" apod.)

Nejprve ukážeme, jak z daného lemmatu plyne vysněné $h_r = h_s$. Vynechávejme sloupce a řádky matice $\mathbf{A}$ a dojděme k jakési „podmatici" $\mathbf{A}^-$, ze které se již nic nedá vynechat. Potom je matice $\mathbf{A}^-$ čtvercová; kdyby měla více sloupců než řádků, nebyly by sloupce nezávislé, a naopak (proč?). *Jelikož podle lemmatu máme $h_r(\mathbf{A}) = h_r(\mathbf{A}^-)$ a $h_s(\mathbf{A}^-) = h_s(\mathbf{A})$, je důkaz* *vztahu $h_r = h_s$ hotov, neboť $h_r(\mathbf{A}^-) = h_s(\mathbf{A}^-)$ (obě se rovnají rozměru této čtvercové matice, z níž už nelze nic vynechat).*

Důkaz lemmatu. *Nechť třeba poslední sloupec je lineární kombinací předchozích:*

$$\vec{\mathbf{s}}_n = \sum_{i=1}^{n-1} \vec{\mathbf{s}}_i \lambda^i \tag{6.11}$$

Označme symbolem $\hat{\mathbf{r}}^j$ „useknutý“ řádek $\vec{\mathbf{r}}^j$ (bez posledního členu $a^j{}_n$).

Tvrdíme, že zobrazením „useknutí“

$$\{\vec{\mathbf{r}} \mapsto \hat{\mathbf{r}}\} : \mathbb{R}(\mathbf{A}) \to \mathbb{R}(\mathbf{A}') \tag{6.12}$$

(které lineárně rozšíříme na celé $\mathbb{R}(\mathbf{A})$) se nemění vztah lineární nezávislosti řádků. Vskutku, označíme-li symbolem F lineární funkci (řádkového vektoru)

$$F\begin{pmatrix} x_1, & \dots, & x_{n-1} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n-1} x_i \lambda^i, \tag{6.13}$$

máme vztah

$$\sum \alpha_i \vec{\mathbf{r}}^i = \begin{pmatrix} \sum \alpha_i \hat{\mathbf{r}}^i, & F(\sum \alpha_i \hat{\mathbf{r}}^i) \end{pmatrix} \tag{6.14}$$

(neboť v řádkovém prostoru $\mathbb{R}(\mathbf{A})$ platí vztah $\vec{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{r}}, & F(\hat{\mathbf{r}}) \end{pmatrix}$; odůvodněte blíže*) a tudíž*

$$\sum \alpha_i \vec{\mathbf{r}}^i = \vec{\mathbf{0}} \Leftrightarrow \sum \alpha_i \hat{\mathbf{r}}^i = \vec{\mathbf{0}}. \tag{6.15}$$

Druhý způsob. Níže napsanou argumentaci je třeba trochu modifikovat v případě prostorů komplexních.

Zaveďme na $\mathbb{R}(\mathbf{A})$ skalární součin indukovaný vnořením do $\mathbb{R}^n$. Všimněme si, že prostor

$$\mathbb{N} = (\mathbb{R}(\mathbf{A}))^\perp \tag{6.16}$$

je jádrem (nulovým prostorem) zobrazení

$$\{\vec{\mathbf{x}} \mapsto \vec{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}\} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m. \tag{6.17}$$

(Toto je fakt samostatné důležitosti, zvl. v teorii řešení soustav rovnic.)

Na jedné straně tedy máme vztah (podle věty u konce kapitoly o skalárním součinu)

$$\dim \mathbb{N} = n - \dim \mathbb{R}(\mathbf{A}) = n - h_r(\mathbf{A}). \tag{6.18}$$

Na druhé straně platí podle prvé věty této kapitoly

$$\dim \mathbb{N} = n - \dim \mathbb{S}(\mathbf{A}) = n - h_s(\mathbf{A}) \tag{6.19}$$

Tedy je $h_r(\mathbf{A}) = h_s(\mathbf{A})$.

<u>DŮKAZ ROVNOSTI HODNOSTI ZOBRAZENÍ.</u>
Vztah $h = h_s$ dokážeme rozkladem $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ na komposici zobrazení

$$\begin{tikzcd} \mathbb{V} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "I"'] & \mathbb{W} \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^m \arrow[u, "J"'] \end{tikzcd}$$

*kde I je isomorfismus přiřazující vektoru $\vec{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{v}}_i x^i$ sloupec souřadnic $(x^{i=1\ldots n})$ vůči basi $\vec{\mathbf{v}}_i$, A je označení zobrazení $\{\vec{\mathbf{x}} \mapsto \vec{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}\}$ a J je isomorfismus přiřazující sloupci souřadnic $(y^{j=1\ldots m})$ vektor $\sum_{j=1}^{m} \vec{\mathbf{w}}_j y^j$. Stačí si nyní uvědomit, že (*odůvodněte podrobněji*)*

$$h = \dim \mathbb{I}\mathrm{m}\,(f) = \dim(A \circ I)(\mathbb{V}) = \dim A(\mathbb{R}^n) = \dim \mathbb{S}(\mathbf{A}). \tag{6.20}$$

6.1 Hodnost součinu, regulární matice

<u>VĚTA.</u> Nechť $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$, $g : \mathbb{W} \to \mathbb{Z}$. Označme symboly h_f, h_g, $h_{g\circ f}$ hodnosti příslušných zobrazení. Pak platí vztahy

$$\mathbb{I}\mathrm{m}\,(g \circ f) \subseteq \mathbb{I}\mathrm{m}\,(g), \qquad \mathbb{K}\mathrm{er}\,(f) \subseteq \mathbb{K}\mathrm{er}\,(g \circ f) \tag{6.21}$$

$$\text{a tudíž i } \; h_{g\circ f} \leq \min(h_f, h_g).$$

<u>POZNÁMKA.</u> Zatímco vztah $h_{g\circ f} \leq h_g$ je v této formulaci vidět triviálně, implikaci $\mathbb{K}\mathrm{er}\,(f) \subseteq \mathbb{K}\mathrm{er}\,(g \circ f) \Rightarrow h_{g\circ f} \leq h_f$ je vhodné zformulovat i v řeči matic:

<u>VĚTA.</u> $\mathbb{R}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \subseteq \mathbb{R}(\mathbf{A})$, $\qquad \mathbb{S}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \subseteq \mathbb{S}(\mathbf{B})$

$$\text{a tedy také } \; h(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \leq \min(h(\mathbf{A}), h(\mathbf{B})).$$

<u>DŮKAZ.</u> *Vztah $c^j{}_i = \sum b^j{}_k a^k{}_i$ znamená, že*

$$\vec{\mathbf{r}}^j(\mathbf{C}) = \sum b^j{}_k \vec{\mathbf{r}}^k(\mathbf{A}) \;\; \text{a} \;\; \vec{\mathbf{s}}_i(\mathbf{C}) = \sum \vec{\mathbf{s}}_k(\mathbf{B}) a^k{}_i. \tag{6.22}$$

<u>DEFINICE REGULARITY.</u> Čtvercovou matici $n \times n$ nazveme **regulární**, má-li hodnost n, v opačném případě říkáme matici **singulární**.

<u>PRVÝ DŮSLEDEK.</u> Pro každou regulární matici $\mathbf{A}$ existuje tzv. **inversní** matice $\mathbf{B}$ taková, že

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{1} \ldots \text{to je jednotková matice} \quad \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \circ \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.23}$$

(Stačila by jedna podmínka k úplné charakterisaci $\mathbf{B}$, objasněte.) Značíme ji $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

<u>DŮKAZ.</u> *Pro regulární matici $\mathbf{A}$ je zobrazení*

$$\{\vec{\mathbf{x}} \mapsto \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}\} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \tag{6.24}$$

bijekcí (prosté a „na"). Inversní maticí je pak prostě matice inversního zobrazení. Toto je také regulární.

<u>DRUHÝ DŮSLEDEK.</u> Regulární matice tvoří <u>grupu vůči násobení</u>, *poněvadž $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ je zřejmě inversní maticí k $\mathbf{AB}$, která je tím pádem regulární (pro regulární $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$).*

<u>KTERÉ MATICE JSOU URČITĚ REGULÁRNÍ.</u>

- Trojúhelníková matice s nenulovými prvky na diagonále.
- Permutační matice.
- Vandermondova matice, jsou-li všechny $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ různé.
- Exponenciála matice (nakoukni do kapitoly o exponenciále).
- Matice tvaru

$$\mathbf{A} = \mathbf{1} + \mathbf{B} \tag{6.25}$$

s takovou maticí $\mathbf{B}$, aby výraz (právě $\mathbf{C}$ je $\mathbf{A}^{-1}$)

$$\mathbf{C} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mathbf{B}^n \tag{6.26}$$

byl dobře definován: to zaručíme třeba malostí všech elementů $\mathbf{B}$ (aby suma konvergovala na všech posicích) nebo kupříkladu **nilpotentností** $\mathbf{B}$ (to jest požadavkem, aby $\mathbf{B}^n = \mathbf{0}$ pro všechna n počínaje nějakým n_0).

6.2 Ekvivalentní řádkové úpravy

Objasníme konkrétní postup při určování hodnosti matice, při výpočtu matice inversní a při řešení soustav rovnic. Základní metodou je zde Gaussova eliminace (zapomnětliví ať nahlédnou do úvodní kapitoly).

DEFINICE. **Ekvivalentní řádkovou úpravou** matice rozumíme

- přičtení násobku jednoho řádku k jinému
- výměnu dvou řádků
- vynásobení nějakého řádku nenulovou konstantou

a také konečnou posloupnost uvedených úprav.

TVRZENÍ. Ekvivalentní řádkové úpravy nemění prostor $\mathbb{R}(\mathbf{A})$ – tedy ani hodnost matice. *Důkaz si proveďte sami, je to jednoduché.*

VĚTA. Matici $\mathbf{A}'$ vzniklou z matice $\mathbf{A}$ řádkovou úpravou lze získat vynásobením matice $\mathbf{A}$ nějakou maticí $\mathbf{M}$ zleva,[2] kde matice $\mathbf{M}$ je

- jednotková matice, která má navíc na posici $\binom{i}{j}$ číslo λ, chceme-li přičíst λ-násobek j-tého řádku k řádku i-tému
- permutační matice, odpovídají transposici prvků i, j, chceme-li zaměnit i-tý a j-tý řádek
- jednotková matice, která má na posici $\binom{i}{i}$ číslo λ (místo jednotky), chceme-li i-tý řádek vynásobit číslem λ

nebo součinem $\mathbf{M}_n \cdot \ldots \cdot \mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{M}_1$, chceme-li postupně provést úpravy odpovídající maticím $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2 \ldots$

VÝPOČET INVERSNÍ MATICE.

[2] Tímto vždy máme na mysli, že tato matice $\mathbf{M}$ stojí vlevo: $\mathbf{A}' = \mathbf{M} \cdot \mathbf{A}$.

Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová regulární matice $n \times n$.

Napišme si dvojici matic $(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{1})$ (chápejme ji jako jednu matici rozměru $n \times 2n$) a provádějme její řádkové úpravy tak dlouho, až dostaneme „ekvivalentní" matici $(\mathbf{1}\,|\,\mathbf{B})$.

(Jde o dvojí provedení Gaussovy eliminace: nejprve vynulujeme členy pod diagonálou $\mathbf{A}$, poté členy nad diagonálou.)

V souladu s poslední větou je ($\mathbf{M}$ representuje úpravy)

$$\mathbf{M} \cdot (\mathbf{A}\,|\,\mathbf{1}) = (\mathbf{1}\,|\,\mathbf{B}) \quad \text{neboli} \quad \mathbf{M} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{1},\ \mathbf{M} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{B} \tag{6.27}$$

a matice $\mathbf{B}$ je tudíž hledanou inversní maticí k $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}. \tag{6.28}$$

<u>Varianta řešící soustavu.</u> Jde o postup známý z úvodní kapitoly pro regulární $\mathbf{A}$. Soustavu

$$\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}} \tag{6.29}$$

vyřešíme prováděním řádkových úprav **rozšířené matice**

$$\left(\mathbf{A}\,|\,\vec{\mathbf{b}}\right) \tag{6.30}$$

do té doby, než dostaneme matici tvaru

$$(\mathbf{1}\,|\,\vec{\mathbf{x}})\,; \tag{6.31}$$

vektor $\vec{\mathbf{x}}$ je pak hledaným řešením $\vec{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1}\vec{\mathbf{b}}$, *protože matice úprav* $\mathbf{M}$ *je opět právě* $\mathbf{A}^{-1}$.

<u>Kombinovaná varianta.</u> Můžeme najednou najít $\mathbf{A}^{-1}$ i vyřešit soustavu $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ tak, že upravujeme matici

$$\left(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{1}\,|\,\vec{\mathbf{b}}\right) \tag{6.32}$$

až do chvíle, kdy se na místě, kde byla původně $\mathbf{A}$, objeví matice jednotková. Na místech, kde sídlila $\mathbf{1}$ resp. $\vec{\mathbf{b}}$, si přečteme hledané $\mathbf{A}^{-1}$ resp. $\vec{\mathbf{x}}$.

<u>Sloupcová analogie.</u> Píšeme-li matice vedle sebe, je třeba provádět <u>řádkové</u> úpravy (aby se obě matice měnily zároveň). Chceme-li používat <u>sloupcové</u> úpravy, matice je třeba zapsat pod sebe. Ještě jedna změna proběhne: sloupcové úpravy se dají psát jako násobení vhodnou maticí tentokrát <u>zprava</u>.

6.3 Frobeniova věta, řešitelnost soustavy

Soustava $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ je řešitelná právě když $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A} \mid \vec{\mathbf{b}})$.

<u>DŮKAZ.</u> *Řešitelnost znamená, že* $\exists x^1, \dots, x^m$ *tak, že*

$$\vec{\mathbf{b}} = \sum_{i=1}^{m} \vec{\mathbf{s}}_i x^i. \tag{6.33}$$

To však existuje právě tehdy, když $\vec{\mathbf{b}} \in \mathbb{S}(\mathbf{A})$, *tedy když* $h_s(\mathbf{A}) = h_s(\mathbf{A} \mid \vec{\mathbf{b}})$.

<u>ŘEŠENÍ NEŘEŠITELNÉ SOUSTAVY, LINEÁRNÍ REGRESE.</u> V mnoha praktických úlohách se setkáváme se situací, kdy rovnice pro dané neznámé známe pouze přibližně, většinou díky nepřesnosti měření, zato je obvykle větší počet rovnic než neznámých.

V obecnějším případě řešíme soustavu

$$\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}, \tag{6.34}$$

kde $\vec{\mathbf{b}} \notin \mathbb{S}(\mathbf{A})$. Za zobecněné řešení $\vec{\mathbf{x}}$ pak pokládáme řešení soustavy, v níž proti poslední nahradíme pravou stranu k ní nejbližším možným vektorem ležícím ve sloupcovém prostoru, to jest ortogonální projekcí $\vec{\mathbf{b}}$ do $\mathbb{S}(\mathbf{A})$.

U **lineární regrese** hledáme dvě neznámé a, b podle řady nepřesných údajů (x^i, y^i), aby „platilo"

$$y^i = ax^i + b. \tag{6.35}$$

Hledaný vektor $\vec{\mathbf{x}}$, matice $\mathbf{A}$ a pravá strana nabudou tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x^1 & 1 \\ x^2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x^n & 1 \end{pmatrix} \quad \vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}. \tag{6.36}$$

Metoda nese název **metoda nejmenších čtverců**, protože hledáme a, b taková, aby byl minimální výraz

$$\sum_{i=1}^{n} (y^i - ax^i - b)^2. \tag{6.37}$$

Vypočítejte tedy koeficienty a, b takové, aby vektor

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} - b \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{byl kolmý na} \quad \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6.38}$$

a porovnejte výsledky se vzorci známými z praktik či odjinud.

<u>Příklad první.</u> Najděte inversní matici k matici $n \times n$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \circ & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \circ & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \circ & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}. \tag{6.39}$$

<u>Řešení.</u>

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \circ & \circ & \circ & \circ \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \circ & 1 & \circ & \circ & \circ \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \circ & \circ & 1 & \circ & \circ \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & \circ & \circ & \circ & 1 & \circ \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \circ & \circ & \circ & \circ & 1 \end{array}\right) \sim \tag{6.40}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} n-1 & n-1 & n-1 & n-1 & n-1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \circ & 1 & \circ & \circ & \circ \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \circ & \circ & 1 & \circ & \circ \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & \circ & \circ & \circ & 1 & \circ \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \circ & \circ & \circ & \circ & 1 \end{array}\right) \sim \tag{6.41}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} \\ \circ & -1 & \circ & \circ & \circ & -\frac{1}{n-1} & 1-\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n-1} & -\frac{-1}{n-1} \\ \circ & \circ & -1 & \circ & \circ & -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n-1} & 1-\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n-1} \\ \circ & \circ & \circ & -1 & \circ & -\frac{-1}{n-1} & -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n-1} & 1-\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n-1} \\ \circ & \circ & \circ & \circ & -1 & -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n-1} & 1-\frac{1}{n-1} \end{array}\right) \sim \tag{6.42}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & \circ & \circ & \circ & \circ & \frac{n-2}{1-n} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} \\ \circ & 1 & \circ & \circ & \circ & \frac{1}{n-1} & \frac{n-2}{1-n} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} \\ \circ & \circ & 1 & \circ & \circ & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{n-2}{1-n} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} \\ \circ & \circ & \circ & 1 & \circ & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{n-2}{1-n} & \frac{1}{n-1} \\ \circ & \circ & \circ & \circ & 1 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{n-2}{1-n} \end{array}\right) \tag{6.43}$$

Výsledek tedy zní

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{n-1} \begin{pmatrix} 2-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2-n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2-n \end{pmatrix}. \tag{6.44}$$

ZOBECNĚNÍ. Chceme-li najít inversní matici k matici, která má na diagonále číslo $a+b$ a mimo diagonálu b, tj. k matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a+b & b & \cdots & b \\ b & a+b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a+b \end{pmatrix} = a\mathbf{1} + b\mathbf{U}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{6.45}$$

a napoví-li nám intuice, že inversní matice bude téhož tvaru

$$\mathbf{A}^{-1} = c\mathbf{1} + d\mathbf{U}, \tag{6.46}$$

lehce dopočteme koeficienty c, d z toho, že

$$\mathbf{1} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = (a\mathbf{1} + b\mathbf{U})(c\mathbf{1} + d\mathbf{U}) = ac\mathbf{1} + (ad+bc)\mathbf{U} + bd\mathbf{U}^2, \tag{6.47}$$

a protože $\mathbf{U}^2 = n\mathbf{U}$, je $ac = 1$, $ad + bc + nbd = 0$, z čehož $c = 1/a$ a $d = -b/(a \cdot (a+nb))$.

PŘÍKLAD DRUHÝ. Vyřešíme soustavu zadanou první maticí a provedeme diskusi.

$$\left(\begin{array}{rrrr|c} 5 & -3 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & 3 & 7 & 1 \\ 8 & -6 & -1 & -5 & 9 \\ 7 & -3 & 7 & 17 & \lambda \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|c} 1 & -1 & -1 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & 3 & 7 & 1 \\ 8 & -6 & -1 & -5 & 9 \\ 7 & -3 & 7 & 17 & \lambda \end{array}\right) \sim \tag{6.48}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 19 & -7 \\ 0 & 2 & 7 & 19 & -7 \\ 0 & 4 & 14 & 38 & \lambda - 14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 19 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{array}\right) \tag{6.49}$$

DISKUSE.

- $\lambda = 0$: volíme x^3, x^4 libovolně, z prvních dvou rovnic dopočteme x^2 a x^1.
- $\lambda \neq 0$: podle Frobeniovy věty nemá řešení. Hledejme zobecněné řešení, to jest pravou stranu nahradíme ortogonální projekcí do sloupcového prostoru matice $\mathbf{A}$. Najděte tedy taková x^1, x^2, x^3, x^4, aby následující vektor byl kolmý ke všem sloupcům $\mathbf{A}$, což vede ke čtyřem (ale jen ke dvěma nezávislým) rovnicím, které dopočtete.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 9 \\ \lambda \end{pmatrix} - x^1 \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} - x^2 \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} - x^3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} - x^4 \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -5 \\ 17 \end{pmatrix} \tag{6.50}$$

Kontrolou vám bude, že dosazením $\lambda = 0$ musíte dostat řešení předchozího bodu.

<u>PŘÍKLAD TŘETÍ.</u> Najděte nejmenší kladné celé n pro které

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{1} \quad \text{kde} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos 2^\circ & \sin 2^\circ & \circ & \circ \\ -\sin 2^\circ & \cos 2^\circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \cos 3^\circ & \sin 3^\circ \\ \circ & \circ & -\sin 3^\circ & \cos 3^\circ \end{pmatrix}. \tag{6.51}$$

<u>ŘEŠENÍ.</u> Všimnu si, že pro **blokovou** matici tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \circ \\ \circ & \mathbf{C} \end{pmatrix} \tag{6.52}$$

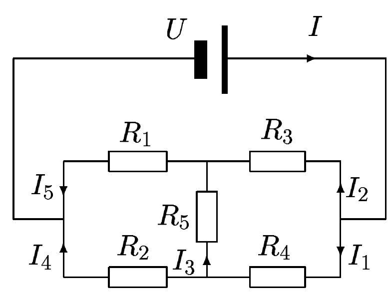
$$\text{platí} \quad \mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^n & \circ \\ \circ & \mathbf{C}^n \end{pmatrix}.$$

Dále si uvědomím, že

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}. \tag{6.53}$$

Hledáme tedy nejmenší n, aby $2n$ i $3n$ bylo dělitelné 360, tím je $n = 360$ jako největší společný násobek 180 a 120.

Poznámka. Existuje samozřejmě nepřeberné množství úloh z fyziky i odjinud, vedoucích k řešení nějaké soustavy lineárních rovnic. Jako příklad si napište např. Kirchhoffovy zákony pro nějaký složitější elektrický obvod, obsahující pouze zdroj stejnosměrného napětí a odpory. Spočtěte velikosti proudů v jednotlivých větvích obvodu.



Kapitola 7

Operátory v různých basích, stopa

7.1 Podobné matice, matice v různých basích

<u>VĚTA.</u> Nechť $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ má

1. matici $\mathbf{A}$ vůči basím $\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n$ a $\vec{\mathbf{w}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{w}}_m$
2. matici $\mathbf{B}$ vůči basím $\widetilde{\vec{\mathbf{v}}_1}, \ldots, \widetilde{\vec{\mathbf{v}}_n}$ a $\widetilde{\vec{\mathbf{w}}_1}, \ldots, \widetilde{\vec{\mathbf{w}}_m}$.

$$\text{Nechť } \widetilde{\vec{\mathbf{v}}_i} = \textstyle\sum_{i'} \vec{\mathbf{v}}_{i'} c^{i'}_{\ i}, \ \widetilde{\vec{\mathbf{w}}_j} = \sum_{j'} \vec{\mathbf{w}}_{j'} d^{j'}_{\ j}.$$

$$\text{Pak} \quad \mathbf{B} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}. \tag{7.1}$$

+

Speciálně, máme-li pokaždé jednu basi ($\mathbb{V} = \mathbb{W}$), $\vec{\mathbf{v}}_i = \vec{\mathbf{w}}_i$,

$$\text{máme vzorec} \quad \mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}. \tag{7.2}$$

Matici $\mathbf{C}$ říkáme **matice přechodu** od base $\vec{\mathbf{v}}_i$ (staré) k basi $\widetilde{\vec{\mathbf{v}}_i}$ (nové). Pro lepší zapamatování detailně: Ve sloupcích má matice zapsány souřadnice vektorů nové base ($\widetilde{\vec{\mathbf{v}}_i}$) vůči staré basi ($\vec{\mathbf{v}}_i$). Obsahuje-li tedy nová base delší vektory než stará, matice přechodu od staré k nové obsahuje „velká čísla“. Jsou-li x^i souřadnice vektoru $\vec{\mathbf{x}}$ v basi $\vec{\mathbf{v}}_j$ (staré), tj. $\vec{\mathbf{x}} = \sum_i \vec{\mathbf{v}}_i x^i$ a obdobně

$\widetilde{x^i}$ souřadnice v basi $\widetilde{\vec{\mathbf{v}}_j}$ (nové), jsou svázány vztahem

$$x^i = \sum_j {c^i}_j \widetilde{x^j} \quad \text{čili} \quad \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \mathbf{C} \begin{pmatrix} \widetilde{x^1} \\ \widetilde{x^2} \\ \vdots \\ \widetilde{x^n} \end{pmatrix}. \tag{7.3}$$

<u>DŮKAZ.</u> *Přechod od nevlnkované basi k vlnkované napíšeme takto (všimněte si, že – podle obvyklých pravidel – násobíme maticí řádek, jehož prvky nejsou čísla, ale vektory!):*

$$(\widetilde{\vec{\mathbf{v}}_1}, \ldots, \widetilde{\vec{\mathbf{v}}_n}) = (\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n)\mathbf{C} \text{ a } (\widetilde{\vec{\mathbf{w}}_1}, \ldots, \widetilde{\vec{\mathbf{w}}_m}) = (\vec{\mathbf{w}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{w}}_m)\mathbf{D} \tag{7.4}$$

Vztah $\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}}_i) = \sum \vec{\mathbf{w}}_j {a^j}_i$ *zapisuji*

$$(\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}}_1), \ldots, \vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}}_n)) = (\vec{\mathbf{w}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{w}}_m)\mathbf{A} \tag{7.5}$$

$$\text{a podobně} \quad (\vec{\mathbf{f}}(\widetilde{\vec{\mathbf{v}}_1}), \ldots, \vec{\mathbf{f}}(\widetilde{\vec{\mathbf{v}}_n})) = (\widetilde{\vec{\mathbf{w}}_1}, \ldots, \widetilde{\vec{\mathbf{w}}_m})\mathbf{B}. \tag{7.6}$$

Zkombinujeme-li poslední rovnost s druhou rovností první řádky důkazu, máme

$$(\vec{\mathbf{f}}(\widetilde{\vec{\mathbf{v}}_1}), \ldots, \vec{\mathbf{f}}(\widetilde{\vec{\mathbf{v}}_n})) = (\vec{\mathbf{w}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{w}}_m)\mathbf{DB}. \tag{7.7}$$

Naopak, přiložíme-li funkci k rovnosti

$$\widetilde{\vec{\mathbf{v}}_i} = \sum_{k=1}^n \vec{\mathbf{v}}_k c^k_i \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{f}}(\widetilde{\vec{\mathbf{v}}_i}) = \sum_{k=1}^n \vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}}_k) c^k_i, \tag{7.8}$$

máme

$$(\vec{\mathbf{f}}(\widetilde{\vec{\mathbf{v}}_1}), \ldots, \vec{\mathbf{f}}(\widetilde{\vec{\mathbf{v}}_n})) = (\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}}_1), \ldots, \vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}}_n))\mathbf{C} = (\vec{\mathbf{w}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{w}}_m)\mathbf{AC} \tag{7.9}$$

a získáme tak dokazovanou rovnost

$$\mathbf{AC} = \mathbf{DB} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{AC}. \tag{7.10}$$

<u>DEFINICE.</u> Matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, pro něž existuje matice $\mathbf{C}$, že

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}, \tag{7.11}$$

nazýváme **podobné** a značíme $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

<u>UROB SI SÁM:</u>

1. $\mathbf{A} \sim \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A}^n \sim \mathbf{B}^n$, $\mathbf{A}^{-1} \sim \mathbf{B}^{-1}$ (existuje-li).

2. Podobné matice mají <u>stejnou</u> hodnost (ale i stejnou stopu a determinant, ba dokonce stejný charakteristický polynom, jak uvidíme později).

3. Pro $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ existuje v $\mathbb{R}^n$ base $\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n$, v níž má zobrazení $\{\vec{\mathbf{x}} \mapsto \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}\} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ matici $\mathbf{B}$.

7.2 Stopa

Důležitost tohoto pojmu oceníme až později.

<u>DEFINICE.</u> Nechť operátor $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ má vůči nějaké basi $\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n$ matici $\mathbf{A}$. **Stopou** matice[1] $\mathbf{A}$ resp. operátoru f nazveme součet diagonálních prvků:

$$\operatorname{Tr} f = \operatorname{Tr} \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} a^i{}_i \tag{7.12}$$

Korektnost definice (nezávislost na basi) stopy pro operátor vyplývá z následujícího

<u>TVRZENÍ.</u> Stopy podobných matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{A}'$ jsou stejné.

Tvrzení je důsledkem obecnějšího faktu, tzv. **cykličnosti** stopy (platí i když $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$):

$$\operatorname{Tr} \mathbf{AB} = \operatorname{Tr} \mathbf{BA}, \tag{7.13}$$

protože

$$\operatorname{Tr}(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}) = \operatorname{Tr}(\mathbf{ACC}^{-1}) = \operatorname{Tr} \mathbf{A}. \tag{7.14}$$

Cykličnost stopy dokážeme prostou změnou pořadí sumace a přejmenováním sumačních indexů:

$$\operatorname{Tr} \mathbf{AB} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a^i{}_j b^j{}_i \quad \equiv \quad \operatorname{Tr} \mathbf{BA} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b^i{}_j a^j{}_i. \tag{7.15}$$

---

[1] Zkratka „Tr“ je z anglického „trace“; používá se též zkratky „Sp“ z německého „Spur“.

```
            A B A B A
          A B A B A B A
        A B A B A B A B A
      A B A B A B A B A B A
      B A B A B A B A B A B
    B A B A B A B A B A B A B
    A B A B A B A B A B A B A
  A B A B A B A B A B A B A B A
  B A B A B A B A B A B A B A B
  A B A B A B A B A B A B A B A B
A B A B A B A B A B A B A B A B A
B A B A B A B A B A B A B A B A B A
A B A B A B A B A B A B A B A B A B
B A B A B A B A B A B A B A B A B A
A B A B A B A B A B A B A B A B A B A
B A B A B A B A B A B A B A B A B A B
A B A B A B A B A B A B A B A B A B A
B A B A B A B A B A B A B A B A B A B
A B A B A B A B A B A B A B A B A B A
B A B A B A B A B A B A B A B A B A B
A B A B A B A B A B A B A B A B A B A
  A B A B A B A B A B A B A B A B A B
  B A B A B A B A B A B A B A B A B A
    B A B A B A B A B A B A B A B A
      B A B A B A B A B A B A B A B
      A B A B A B A B A B A B A B A
        A B A B A B A B A B A B A
        B A B A B A B A B A B A B
          B A B A B A B A B A B A
          A B A B A B A B A B A
            A B A B A B A B A B
            B A B A B A B A B
              B A B A B A B
              A B A B A B A
              B A B A B A B
              A B A B A B A
              B A B A B A B
              A B A B A B A
          B A B A B A B A B A
          A B A B A B A B A B
          B A B A B A B A B A
          A B A B A B A B A B
          B A B A B A B A B A
          A B A B A B A B A B
          B A B A B A B A B A
          A B A B A B A B A B
          B A B A B A B A B
          A B A B A B A B A
          B A B A B A B A B
          A B A B A B A B
            A B A B A B A
              A B A B A
```

Kapitola 8

Determinant

Teorie determinantů vznikla v souvislosti s řešením soustavy

$$\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}} \tag{8.1}$$

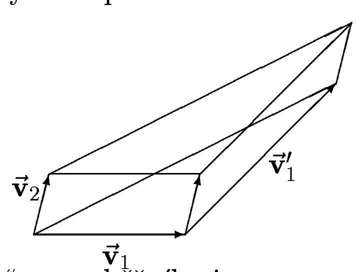
pro regulární **A**. Jak jsme již naznačili v úvodní kapitole, lze těmto otázkám dáti i geometrickou interpretaci. Uvidíme totiž, že teorii determinantů je možno chápat jako teorii měření objemů v $\mathbb{R}^n$. Omezme se pro konkrétnost na případ dimense tři a podívejme se, jaké vlastnosti má mít veličina zvaná **objem tělesa**. Učiňme následující pozorování pro vektory z $\mathbb{R}^3$.

Označme symbolem

$$V(\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \vec{\mathbf{v}}_3) \tag{8.2}$$

objem rovnoběžnostěnu $R(\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \vec{\mathbf{v}}_3) = \{\sum_{i=1}^3 \vec{\mathbf{v}}_i \lambda^i \mid \lambda^i \in (0,1)\}$.

ADITIVITA. Objem sjednocení disjunktních množin by měl být roven součtu objemů částí. Obrázek (nakreslený jen v dvourozměrné situaci) vás snad přesvědčí, že by mělo platit



(obsah „velkého“ rovnoběžníka je roven součtu obsahů menších rovnoběžníků – stačí přesunout „dlouhý“ trojúhelník)

$$V(\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \vec{\mathbf{v}}_3) + V(\vec{\mathbf{v}}_1', \vec{\mathbf{v}}_2, \vec{\mathbf{v}}_3) = V(\vec{\mathbf{v}}_1 + \vec{\mathbf{v}}_1', \vec{\mathbf{v}}_2, \vec{\mathbf{v}}_3) \tag{8.3}$$

a podobné vztahy pro druhou a třetí proměnnou.

My víme podrobněji ze základní školy, že objem je dán vzorcem „základna krát výška“ a že výška na základnu $\mathcal{L}(\{\vec{\mathbf{v}}_2, \vec{\mathbf{v}}_3\})$ se nemění přičtením násobků $\vec{\mathbf{v}}_2$ a $\vec{\mathbf{v}}_3$ k $\vec{\mathbf{v}}_1$, tedy

$$V(\vec{\mathbf{v}}_1 + \vec{\mathbf{v}}_2\alpha^2 + \vec{\mathbf{v}}_3\alpha^3, \vec{\mathbf{v}}_2, \vec{\mathbf{v}}_3) = V(\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \vec{\mathbf{v}}_3) \tag{8.4}$$

pro libovolné α^2, α^3 a podobně pro druhou a třetí proměnnou.

Znaménko objemu, pojem orientace

Konsistence (8.3) vede k požadavku (objasněte!)

$$V(-\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \vec{\mathbf{v}}_3) = -V(\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \vec{\mathbf{v}}_3). \tag{8.5}$$

To znamená, že už nelze chápat V jako vždy nezápornou veličinu. Musíme vybrat správné znaménko pro V. Jak ho určíme? Zde přicházíme ke klíčovému pojmu „orientace base $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \vec{\mathbf{v}}_3$“. Tato orientace může být buď **souhlasná** s kanonickou basí daného prostoru či **nesouhlasná**. Představíme-li si kanonickou basi

$$\vec{\mathbf{e}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \circ \\ \circ \end{pmatrix} \quad \vec{\mathbf{e}}_2 = \begin{pmatrix} \circ \\ 1 \\ \circ \end{pmatrix} \quad \vec{\mathbf{e}}_3 = \begin{pmatrix} \circ \\ \circ \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8.6}$$

orientovanou podle pravidla pravé ruky, např. $\vec{\mathbf{e}}_1$ dozadu (tj. za vaše záda), $\vec{\mathbf{e}}_2$ vpravo a $\vec{\mathbf{e}}_3$ nahoru, obecněji pohybuje-li se pravá ruka[1] ve směru ukazováčku od $\vec{\mathbf{e}}_1$ k $\vec{\mathbf{e}}_2$, míří palec ve směru $\vec{\mathbf{e}}_3$, lze mluviti o **pravotočivosti** (např. $\vec{\mathbf{e}}_{1\ldots3}$) nebo **levotočivosti** dané base. Pojmu **souhlasné orientace dvou basí** věnujeme rozšiřující poznámku níže. Zatím se spokojíme s konstatováním, že base

$$\vec{\mathbf{v}}_{p(1)}, \vec{\mathbf{v}}_{p(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_{p(n)} \tag{8.7}$$

je souhlasně orientována s basí

$$\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n \tag{8.8}$$

právě když je p sudá permutace. Takže je přirozené chtít, aby platil vztah (všimněme si, že $-\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \vec{\mathbf{v}}_3$ má jinou orientaci než $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \vec{\mathbf{v}}_3$)

$$V(\vec{\mathbf{v}}_{p(1)}, \vec{\mathbf{v}}_{p(2)}, \vec{\mathbf{v}}_{p(3)}) = \operatorname{znak} p \cdot V(\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \vec{\mathbf{v}}_3). \tag{8.9}$$

[1] S prsty ohnutými na kružnici se středem v počátku.

Cejch

Zbývá ocejchovat veličinu V třeba vztahem

$$V(\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3) = 1 \tag{8.10}$$

pro kanonickou basi v $\mathbb{R}^3$.

Je-li nyní $\mathbf{A}$ matice 3×3, pišme

$$\det \mathbf{A} \quad \text{místo} \quad V(\vec{\mathbf{s}}_1(\mathbf{A}), \vec{\mathbf{s}}_2(\mathbf{A}), \vec{\mathbf{s}}_3(\mathbf{A})). \tag{8.11}$$

(Pročpak asi volíme toto označení? Viz níže.)

Požadavky výše lze nyní zformulovat takto:

- $\det \mathbf{A}$ je lineární funkcí každého sloupce

- Je-li $\mathbf{p}$ matice tvaru
$$p^i{}_j = \delta^i{}_{\pi(j)} \tag{8.12}$$
pro vhodné zobrazení $\pi : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$, tak je (viz výše)
$$\det \mathbf{p} = \operatorname{znak} \pi \tag{8.13}$$
s tím, že není-li π permutace, dodefinujme jeho znak na nulu[2] (pak totiž má $\mathbf{p}$ nějaké dva sloupce stejné a proto musí být –viz výše– $\det \mathbf{p} = -\det \mathbf{p}$).

Rozpis do sloupců

Rozepišme nyní sloupec

$$\begin{pmatrix} a^1{}_1 \\ a^2{}_1 \\ a^3{}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1{}_1 \\ \circ \\ \circ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \circ \\ a^2{}_1 \\ \circ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \circ \\ \circ \\ a^3{}_1 \end{pmatrix} \tag{8.14}$$

a podobně zbylé dva. Z požadavku linearity v každém sloupci plyne vztah (rozepište podrobně)

$$\det \mathbf{A} = \sum_p \det \mathbf{A}_p, \tag{8.15}$$

[2] Tohoto označení budeme užívat i později.

kde sčítáme přes všech 27 zobrazení $p : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$ a matice $\mathbf{A}_p$ má na posici (i,j) prvek $a^i{}_j$, pokud $i = \pi(j)$, a jinak nulu. Užitím vztahu pro determinant permutační matice a linearity máme

$$\det \mathbf{A}_p = \prod_{i=1}^{3} a_i^{p(i)} \operatorname{znak} p \tag{8.16}$$

a tudíž dospíváme k závěru.

$$\det \mathbf{A} = \sum_p \operatorname{znak} p \prod_{i=1}^{3} a_i^{p(i)} \tag{8.17}$$

Shrňme obsah tohoto odstavce: induktivními úvahami jsme dospěli k závěru, že existuje-li „rozumný" pojem objemu mnohostěnu, musí být pro rovnoběžnostěn dán[3] formulí (psanou obecně[4] pro $\mathbb{R}^n$)

Definice determinantu

$$\det \mathbf{A} = \sum_p \operatorname{znak} p \prod_{i=1}^{n} a_i^{p(i)} \tag{8.18}$$

Poznámka o permanentu. Pokud bychom vynechali násobení znakem permutace a tedy všechny příspěvky sčítali, dostali bychom **permanent** dané matice. Na rozdíl od determinantu matice $n \times n$, který lehce spočteme například úpravou matice na trojúhelníkový tvar již po asymptoticky cn^3 operacích (potřebujeme vynulovat cca. $n^2/2$ elementů matice a každé takové vynulování je spojeno s přičtením násobku jedné řádky k jiné, což obnáší $2n$ operací), permanent se s nejvyšší pravděpodobností takto rychle počítat nedá a nauky o NP-úplnostech mají promyšleny postupy, jak modifikovat případný algoritmus pro jeho polynomiálně rychlý výpočet na řešení většiny výpočetně náročných kombinatorických problémů.

Před systematické zkoumání pojmu determinantu vložíme ještě

informativní vsuvku o pojmu orientace v $\mathbb{R}^n$. Místo o orientaci n-tice sloupců matice mluvme přímo o orientaci reálné matice. (Komplexní matice má obecně komplexní determinant, a tak není vhodné mluviti o jeho znaménku.)

[3] Až na znaménko a případný koeficient související s volbou jednotkového objemu.

[4] Všimněte si, že úvahy mohly být provedeny pro jakékoli n.

<u>Definice.</u> Dvě matice $\mathbf{A}, \mathbf{A}'$ nazveme **souhlasně orientované**, pokud existuje spojité zobrazení

$$\{t \mapsto \mathbf{A}(t)\} : \langle 0,1\rangle \to \mathcal{M}_{n\times n} \tag{8.19}$$

do prostoru $\mathcal{M}_{n\times n}$ matic $n \times n$ takové, že

$$\mathbf{A}(0) = \mathbf{A}, \quad \mathbf{A}(1) = \mathbf{A}' \quad \text{a pro všechna } t \in \langle 0,1\rangle \text{ je } \mathbf{A}(t) \text{ regulární.} \tag{8.20}$$

<u>Homotopie.</u> To je název pro takovýto „spojitý přechod“ od jedné n-tice vektorů (sloupců $\mathbf{A}$) k druhé (sloupců $\mathbf{A}'$), při kterém nedojde nikdy k „splácnutí“ měněné base $\mathbb{R}^n$ (regularita $\mathbf{A}(t)$).

<u>Věta.</u> Jsou pouze dvě **třídy ekvivalence** v relaci „být souhlasně orientován“: třída $\mathcal{M}_+$ souhlasně a třída $\mathcal{M}_-$ nesouhlasně orientovaných s $\mathbf{1}$. Zobrazení

$$\{\mathbf{A} \mapsto \mathbf{B} \circ \mathbf{A}\} : \mathcal{M} \to \mathcal{M} \tag{8.21}$$

převádí $\mathcal{M}_\pm$ na $\mathcal{M}_\pm$ resp. na $\mathcal{M}_\mp$ podle toho, zda $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_+$ resp. $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_-$.

Permutační matice $\mathbf{p}_\pi$ patří do $\mathcal{M}_{\text{znak}\,\pi}$.

Důkaz jen naznačíme. Připomeňme, že Gaussovou eliminací lze každou regulární matici $\mathbf{A}$ *vyjádřit jako komposici elementárních matic typu* $\mathbf{M}_i^{\,j} = \mathbf{1} + \lambda \mathbf{E}_i^{\,j}$ *(indexy* i, j *neoznačují posici v matici, nýbrž konkrétní matici* $\mathbf{M}$*; matice* $\mathbf{E}_i^{\,j}$ *má jedničku jen v místě na* i*-té řádce a v* j*-tém sloupci, jinde nuly,* $(\mathbf{E}_i^{\,j})^k_{\ l} = \delta_i^k \delta_l^j$*) nebo typu jednotkové matice, v níž jednu* 1 *nahradíme* -1 *(nebo lze vzít typ matice prohazující dva řádky) nebo typu, kde se proti jednotkové násobí jeden řádek kladnou konstantou* λ*.*

Přitom matice vzniklá „zapomenutím činitelů“ tvaru $\mathbf{M}_i^{\,j}$ *v tomto součinu je souhlasně orientována s* $\mathbf{A}$*: není problém spojitě přejít od* $\mathbf{A}$ *k* $\mathbf{A}'$ *spojitou změnou* λ*, resp. názorně rozpisem na součin mnoha matic s* $\lambda \to 0$*. Takže máme součin matic typu* $\mathbf{J}_{<ji>}$ *prohazujících dva řádky a* $\mathbf{J}_{k,\lambda}$ *násobící* k*-tý řádek číslem* λ *a ptáme se, kdy je tento součin (ne)souhlasně orientován s* $\mathbf{1}$*.*

Ukazuje se, že závisí pouze na tom, zda je činitelů $\mathbf{J}_{<ji>}$ *a* $\mathbf{J}_{k,\lambda}$ *se záporným* λ *sudý nebo lichý počet, přesněji (jak dokážeme) komposice dvou matic typu* $\mathbf{J}_{<ij>}$ *nebo* $\mathbf{J}_{k,\lambda}$ *je souhlasně orientována s* $\mathbf{1}$*. Prozkoumáme jen součiny dvou transposičních matic (podrobnější zkoumání součinů typu* $\mathbf{J}_{<ji>}\mathbf{J}_{k,\lambda}$*,* $\mathbf{J}_{k,\lambda}\mathbf{J}_{<ji>}$ *a* $\mathbf{J}_{k,\lambda}\mathbf{J}_{k',\lambda'}$ *přenecháme čtenáři) a rozlišíme přitom dva případy:*

- $\mathbf{J}_{<ij>}\mathbf{J}_{<kl>}$, *přičemž množiny* $\{i,j\}$ *a* $\{k,l\}$ *nejsou disjunktní. V případě, že jsou dokonce stejné, je součinem přímo jednotková matice, v opačném dostaneme součin typu*

$$\begin{pmatrix} \circ & 1 & \circ \\ 1 & \circ & \circ \\ \circ & \circ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \circ & \circ & 1 \\ \circ & 1 & \circ \\ 1 & \circ & \circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \circ & 1 & \circ \\ \circ & \circ & 1 \\ 1 & \circ & \circ \end{pmatrix}, \tag{8.22}$$

  což je otočení o $120°$ *kolem osy prvého oktantu, takže dostaneme souhlasnost s* $\mathbf{1}$.

- *Disjunktní případ, tedy situace typu*

$$\begin{pmatrix} \circ & 1 & \circ & \circ \\ 1 & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & 1 \\ \circ & \circ & 1 & \circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \circ & -1 & \circ & \circ \\ 1 & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & -1 \\ \circ & \circ & 1 & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \circ & \circ & \circ \\ \circ & -1 & \circ & \circ \\ \circ & \circ & 1 & \circ \\ \circ & \circ & \circ & -1 \end{pmatrix}, \tag{8.23}$$

  což je komposice otočení prvé a druhé osy o $90°$, *otočení třetí a čtvrté osy o* $90°$ *a otočení druhé a čtvrté osy o* $180°$, *z čehož plyne souhlasnost.*

<u>Poznámka.</u> Idea tohoto důkazu (rozložit matici na součin mnoha „jednodušších“ matic) se nám bude hodit i jindy, a to nejlépe v následujícím tvaru (promyslete si jej): každou regulární matici souhlasně orientovanou s $\mathbf{1}$ lze rozložit na součin (mnoha) matic „jen malinko se lišících od jednotkové matice“.

<u>Cvičení.</u> V $\mathbb{R}^2$ sestrojte homotopii od

$$(-\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2) \quad \text{do} \quad (\vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_1). \quad (\text{„Otočte to!“}) \tag{8.24}$$

Nahlédněte, že homotopii od $(\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2)$ do $(\vec{\mathbf{e}}_1, -\vec{\mathbf{e}}_2)$ sestrojit nelze.

8.1 Základní vlastnosti determinantů

<u>Věta.</u> Funkce

$$\{\mathbf{A} \mapsto \det \mathbf{A}\} : \mathcal{M}_{n\times n} \to \mathbb{R} \ (\text{nebo } \mathbb{C}\dots) \tag{8.25}$$

má tyto vlastnosti:

1. Je to **multilineární** funkce, tedy lineární funkce každého sloupce (fixujeme-li sloupce zbývající).

2. Změní znaménko po výměně dvou sloupců, obecněji pro libovolnou permutaci

$$\det\left(\vec{\mathbf{s}}_{\pi(1)}, \quad \cdots, \quad \vec{\mathbf{s}}_{\pi(n)} \right) = \operatorname{znak}\pi \cdot \det\left(\vec{\mathbf{s}}_1, \quad \ldots, \quad \vec{\mathbf{s}}_n \right) \tag{8.26}$$

   Z toho také plyne, že determinant matice se dvěma stejnými sloupci je nulový, protože je roven „minus sobě“.

3. Nezmění se přičtením lineární kombinace ostatních sloupců k sloupci danému.

4. $\det \mathbf{A} \neq 0 \Leftrightarrow \mathbf{A}$ je regulární; $\det \mathbf{1} = 1$.

<u>Důkaz.</u>

1. *Pišme (uvnitř sumujeme přes ty permutace, pro které $p(1) = j$)*

$$\det \mathbf{A} = \sum_j f^j(\vec{\mathbf{s}}_1) \sum_p^{p(1)=j} \operatorname{znak} p \prod_{i=2}^n a^{p(i)}{}_i, \tag{8.27}$$

   kde $f^j(\vec{\mathbf{s}}_k) = a^j{}_k$ označuje j-tou souřadnici sloupce $\vec{\mathbf{s}}_k$, což je lineární funkce tohoto sloupce, vnitřní suma na prvém sloupci vůbec nezávisí a proto je celý determinant lineární funkcí prvého (analogicky však také jakéhokoli jiného) sloupce.

2. *Platí (sumujeme přes všechny permutace κ)*

$$\det(\vec{\mathbf{s}}_{\pi(1)}, \ldots, \vec{\mathbf{s}}_{\pi(n)}) = \sum_\kappa \operatorname{znak}\kappa \prod_{i=1}^n a^{\kappa(i)}_{\ \pi(i)} = \tag{8.28}$$

$$= \sum_\kappa \operatorname{znak}\kappa \prod_{j=1}^n a^{\kappa(\pi^{-1}(j))}{}_j = \operatorname{znak}\pi \sum_\lambda \operatorname{znak}\lambda \prod_{j=1}^n a^{\lambda(j)}{}_j, \tag{8.29}$$

   uvědomíme-li si, že sumace přes všechny permutace $\lambda = \kappa\pi^{-1}$ je totéž, co sumace přes všechny permutace κ (permutace tvoří grupu) a že $\operatorname{znak}\kappa = \operatorname{znak}\lambda \cdot \operatorname{znak}\pi$, je důkaz hotov.

3. *Toto poměrně snadno plyne z předchozích dvou bodů. Využijeme linearity ve sloupci, ke kterému přičítáme, a sečteme determinant původní matice s determinantem matice, která má dva sloupce stejné.*

4. *Plyne z toho, že Gaussovou eliminací (která podle (1), (3) nemění (ne)nulovost determinantu) lze dospět od regulární matice k jednotkové matici.*

Cvičení. Spočtěte determinant Vandermondovy matice.

Nejprve odečtete první řádek od druhého, třetího atd. a získáte tak nuly v prvém sloupci (vyjma první řádky). Pak zjistíte, že z druhého řádku lze vytknout $(\alpha_1 - \alpha_0)$, ze třetího ... až z $(n+1)$-vého lze vytknout $(\alpha_n - \alpha_0)$. (Využijete při tom vztahy typu $\alpha_3^3 - \alpha_0^3 = (\alpha_3 - \alpha_0)(\alpha_3^2 + \alpha_3\alpha_0 + \alpha_0^2)$.) Získáte tím faktor $\prod_{j=1}^{n}(\alpha_j - \alpha_0)$, který vyskočí před determinant. Pak odečtete od posledního sloupce α_0-násobek předposledního, od předposledního ... od třetího α_0-násobek druhého, čímž dostanete menší Vandermondovu matici (v níž chybí α_0).

Výsledek je $\prod_{i<j}(\alpha_j - \alpha_i)$, tedy pokud jsou všechny α_i různé, je matice regulární.

Věta. Nechť matice $\mathbf{A}$ má tvar (tzv. **blokové matice**)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}'' \end{pmatrix}, \tag{8.30}$$

kde v levém dolním rohu jsou samé nuly a v podtabulce $\mathbf{C}$ cokoli. Pak

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}' \cdot \det \mathbf{A}''. \tag{8.31}$$

`Pokud blok „0" není nulový, neplatí žádný vzorec typu (!)`

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}' \det \mathbf{A}'' - \det \mathbf{C} \det \mathbf{O}. \tag{8.32}$$

Důkaz. *Nechť má matice $\mathbf{A}'$ resp. $\mathbf{A}''$ rozměr $m \times m$ resp. $(n-m) \times (n-m)$. Determinant matice $\mathbf{A}$ získáme jako sumu přes všechny permutace množiny indexů od jedné do n, ale je třeba si uvědomit, že nenulový příspěvek dají jen permutace* **rozložitelné**, *to jest takové, které lze zapsat jako komposici permutací $\pi' \circ \pi''$, přičemž π' resp. π'' účinkují pouze na množině indexů $\{1, \ldots, m\}$ resp. $\{m+1, \ldots, n\}$: nerozložitelné permutace* *nutně obsahují cyklus, jehož se účastní indexy obou skupin, tedy tyto permutace nutně přiřadí některému indexu prvé skupiny nějaký index skupiny druhé, stejně tak jako naopak, a proto členy odpovídající těmto permutacím obsahují činitel z levého dolního rohu (kde jsou nuly).*

Uvědomíme-li si navíc, že $\operatorname{znak}\pi = \operatorname{znak}\pi' \cdot \operatorname{znak}\pi''$, *můžeme již psát* $\det \mathbf{A}$ *jako*

$$\sum_{\pi} \operatorname{znak}\pi \prod_{i=1}^{n} a^{\pi(i)}{}_{i} = \sum_{\pi'}\sum_{\pi''} \operatorname{znak}\pi' \operatorname{znak}\pi'' \prod_{i'=1}^{m} a^{\pi'(i')}{}_{i'} \prod_{i''=m+1}^{n} a^{\pi''(i'')}{}_{i''}. \tag{8.33}$$

Poznámka. Větu lze zobecnit i na případ více bloků (zformulujte). Extrémním případem je situace, kdy bloky mají rozměr 1×1. Pak má věta důležitý důsledek.

Důsledek. Determinant trojúhelníkové matice je součin diagonálních prvků.

$$\forall i < j \quad \text{nebo} \quad \forall j < i \quad a^{i}{}_{j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{A} = \prod_{i=1}^{n} a^{i}{}_{i} \tag{8.34}$$

Tento vzorec spolu s Gaussovou eliminací dává nejdůležitější návod k výpočtu determinantů. Původní definici determinantu užíváme jen ve speciálních případech, např. pro matice, které mají „mnoho nul“, nebo pro matice malého rozměru:

O determinantu „matice“ 0×0 je vhodné předpokládat, že je roven jedné. Determinant „matice“ 1×1 je přímo $a^{1}{}_{1}$. Determinant matice 2×2 je $a^{1}{}_{1}a^{2}{}_{2} - a^{1}{}_{2}a^{2}{}_{1}$. Determinant matice 3×3 počítáme pomocí **Sarusova pravidla** (jako součet tří „jihovýchodních“ součinů minus součet tří „severovýchodních“ součinů) a je třeba zdůraznit, že neplatí pro matice jiného rozměru než 3×3.

Zásadní význam v teorii determinantů má

Věta. $\det \mathbf{BA} = \det \mathbf{B} \cdot \det \mathbf{A}$

Poznámky. Před důkazem věty si neodpustíme pár řádek komentáře.

- Označíme-li obvyklým symbolem $\mathbb{GL}(n)$ (**obecnou lineární**) grupu všech regulárních matic rozměru $n \times n$, pak uvedená věta říká „pouze“ to, že následující zobrazení je homomorfismus grup:

$$\{\mathbf{A} \mapsto \det \mathbf{A}\} : \mathbb{GL}(n) \to (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot) \tag{8.35}$$

- Věta má i geometrickou interpretaci: $\det \mathbf{A}$ označuje, jak víme, koeficient, s nímž se mění objem tělesa při zobrazení $\{\vec{\mathbf{x}} \mapsto \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}\} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (toto konstatování se nebudeme snažit více precisovat). Provedeme-li nejprve zobrazení dané maticí $\mathbf{A}$ a pak $\mathbf{B}$, násobí se nám objem nejprve koeficientem $\det \mathbf{A}$ a pak ještě koeficientem $\det \mathbf{B}$, ale z druhé strany jsme provedli zobrazení $\{\vec{\mathbf{x}} \mapsto \mathbf{BA}\vec{\mathbf{x}}\}$ a objem se tedy změnil s koeficientem $\det \mathbf{BA}$.

- Věta o součinu determinantů umožňuje zavést pojem **determinantu libovolného operátoru** $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ předpisem

$$\det f = \det \mathbf{A},$$

  kde $\mathbf{A}$ je maticové vyjádření f v nějaké bázi prostoru $\mathbb{V}$. Je-li totiž $\mathbf{A}' = \mathbf{CAC}^{-1}$ maticové vyjádření f v jiné bázi, je $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}'$. Uvědomte si totiž, že $\det(\mathbf{A}^{-1}) = (\det \mathbf{A})^{-1}$.

- Dokažte úvodní věty této sekce jako důsledek věty právě diskutované.

Důkaz. *Nejprve si uvědomme, že vztah platí pro (např. horní) trojúhelníkové matice, protože součin dvou trojúhelníkových matic je opět trojúhelníková matice, která má na i-tém místě na diagonále součin prvků matic, které násobíme, na tomtéž místě, a determinant trojúhelníkové matice je součinem diagonálních prvků, jak jsme nedávno ukázali.*

Obecné matice $\mathbf{B}$ resp. $\mathbf{A}$ převedeme takovými řádkovými resp. sloupcovými úpravami, kterými se nemění determinant (to jest přičtení řady jedné k řadě jiné nebo výměna dvou řad spojená se změnou znaménka jedné z nich – tato úprava mj. lze získat jako komposice předchozích) na matice $\mathbf{B}'$ resp. $\mathbf{A}'$ (horního) trojúhelníkového tvaru.

$$\mathbf{B} = \mathbf{R}_1 \cdot \ldots \cdot \mathbf{R}_N \mathbf{B}', \qquad \mathbf{A} = \mathbf{A}'\mathbf{S}_1 \cdot \ldots \cdot \mathbf{S}_M \tag{8.36}$$

Stačí již napsat

$$\det \mathbf{BA} = \det(\mathbf{R}_1 \cdot \ldots \cdot \mathbf{R}_N \mathbf{B}'\mathbf{A}'\mathbf{S}_1 \cdot \ldots \cdot \mathbf{S}_M) = \det \mathbf{B}'\mathbf{A}' = \tag{8.37}$$

$$= \det \mathbf{B}' \det \mathbf{A}' = \det \mathbf{B} \det \mathbf{A}. \tag{8.38}$$

Někteří z vás prahnou po abstraktnějším důkazu, tak ho mají mít.

<u>LEMMA.</u> Každá matice $\mathbf{B}$ lze zapsat jako jakási správně uzávorkovaná „suma“ matic téměř permutačních

$$\mathbf{B} = \bigoplus \mathbf{B}_\pi, \tag{8.39}$$

kde matice $\mathbf{B}_\pi$ mají všude nuly, kromě míst $(\pi(i), i)$, kde mají odpovídající element matice $\mathbf{B}$, totiž $b^{\pi(i)}{}_i$.

Nejde však o obyčejné sčítání, ale o (pro znalejší říkáme „v jistém kontextu tensorové“) sčítání dvou matic, které se liší jen v jednom sloupci; součet pak má tento sloupec roven součtu (těch různých) sloupců sčítanců a ostatní sloupce má stejné jako sčítanci (na rozdíl od obyčejného součtu, který by měl i tyto sloupce rovny součtům, čili dvojnásobné). Pokud jsou oba sčítanci úplně stejné matice, nevíme, který sloupec máme zdvojnásobit; alespoň se dohodněme, že vybereme nulový sloupec, je-li nějaký.

Tento rozpis jsme diskutovali již na úvodu kapitoly; sčítanců bude celkem n^n, ovšem jen $n!$ z nich bude regulárních. Pro opakování: nejprve rozepíšeme $\mathbf{B}$ podle prvního sloupce, pak sčítance podle druhého atd. Např.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ \circ & d \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \circ & b \\ c & d \end{pmatrix} = \tag{8.40}$$

$$= \left(\begin{pmatrix} a & b \\ \circ & \circ \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} a & \circ \\ \circ & d \end{pmatrix} \right) \oplus \left(\begin{pmatrix} \circ & b \\ c & \circ \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ c & d \end{pmatrix} \right) \tag{8.41}$$

<u>DRUHÉ LEMMA.</u> Pro rozklad $\mathbf{B} = \bigoplus \mathbf{B}_\pi$ platí také

$$\mathbf{AB} = \bigoplus \mathbf{AB}_\pi. \tag{8.42}$$

Důkaz stačí provést pro případ

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}_1 \oplus \mathbf{B}_2) = \mathbf{AB}_1 \oplus \mathbf{AB}_2 \tag{8.43}$$

a indukcí spatřit, že $\mathbf{A}$ lze „nasoukat“ do stále hlubších závorek, až výraz zcela „roznásobíme“.

Ale tento případ je očividný. Nechť je různý sloupec matic $\mathbf{B}_1$ a $\mathbf{B}_2$ ten prvý. Pak jsou elementy prvého sloupce matice $\mathbf{AB}$ „skalárním součinem“ (bez hvězdičky) řádků $\mathbf{A}$ s prvním sloupcem $\mathbf{B}$, takže vskutku

$$\vec{\mathbf{s}}_1(\mathbf{A}(\mathbf{B}_1 \oplus \mathbf{B}_2)) = \vec{\mathbf{s}}_1(\mathbf{AB}_1) + \vec{\mathbf{s}}_1(\mathbf{AB}_2) \tag{8.44}$$

a ostatní sloupce matic $\mathbf{AB}_1$, $\mathbf{AB}_2$ a tedy i $\mathbf{AB}_1 \oplus \mathbf{AB}_2$, ale také $\mathbf{A}(\mathbf{B}_1 \oplus \mathbf{B}_2)$ jsou stejné.

Dále si všimneme, že vztah

$$\det \mathbf{AB}_\pi = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}_\pi \tag{8.45}$$

je snadným zobecněním vztahu nedávno dokázaného

$$\det \mathbf{A} \det \mathbf{P}_\pi = \det \mathbf{A}\mathrm{znak}\, \pi, \tag{8.46}$$

protože sloupce (např. i-tý) matice $\mathbf{AB}_\pi$ jsou jen číslem $b^{\pi(i)}{}_i$ (které lze vytknout) pronásobené sloupce matice $\mathbf{AP}_\pi$.

Nyní již lze upravovat $\det \mathbf{AB}$*: nejprve dosadíme z prvého lemmatu, pak upravíme podle druhého a nakonec užijeme dvakrát vztahu*

$$\det(\mathbf{C} \oplus \mathbf{D}) = \det \mathbf{C} + \det \mathbf{D}, \tag{8.47}$$

vyjadřujícího linearitu determinantu jako funkce kteréhokoliv sloupce.

$$\begin{gathered} \det \mathbf{AB} = \det \mathbf{A}(\bigoplus \mathbf{B}_\pi) = \det(\bigoplus \mathbf{AB}_\pi) = \\ = \det \mathbf{A}(\sum \det \mathbf{B}_\pi) = \det \mathbf{A} \cdot \det(\bigoplus \mathbf{B}_\pi) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}. \end{gathered} \tag{8.48}$$

8.2 Výpočet cirkulantu

Spočteme zde jeden význačný determinant, zvaný **cirkulant**, jako ilustraci vzorce $\det \mathbf{AB} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$. Nejde jen o ze stovky jiných namátkou vybraný příklad; metoda níže použitá je ve skutečnosti základem celého matematického oboru – **harmonické analýzy** (teorie Fourierových trigonometrických řad atp.).

Příklad. Máme pro libovolná $a_0, a_1, \ldots, a_n$ spočítat

$$\det \mathbf{C}, \text{ kde } \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_0 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n & a_0 \end{pmatrix} \tag{8.49}$$

(řádek $(a_0, \ldots, a_n)$ se točí dokola, na diagonále všude a_0).

Řešení. Použijeme tento „malý trik“. (Pozor, přecházíme do komplexních prostorů!) Označme symbolem

$$\varepsilon = \exp \frac{2\pi i}{n+1} \equiv \cos \frac{2\pi}{n+1} + i \sin \frac{2\pi}{n+1} \tag{8.50}$$

tzv. **primitivní hodnotu** $\sqrt[n+1]{1}$. Pišme $\varepsilon_j \equiv \varepsilon^j$, $j = 0, 1, \ldots, n$. „Zkusme" vyjádřit matici operátoru

$$\{\vec{\mathbf{x}} \mapsto \mathbf{C}\vec{\mathbf{x}}\} \tag{8.51}$$

v basi dané[5] <u>sloupcovými</u> vektory tvaru (číslíčka nahoře jsou exponenty)

$$\vec{\mathbf{v}}_j = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon_j & \varepsilon_j^2 & \ldots & \varepsilon_j^n \end{pmatrix}^T. \tag{8.52}$$

Platí následující význačný vztah ($\vec{\mathbf{v}}_j$ je „vlastní vektor"):

$$\mathbf{C}\vec{\mathbf{v}}_j = \omega_j \vec{\mathbf{v}}_j, \tag{8.53}$$

kde $\omega_j = a_0 + a_1\varepsilon_j + a_2\varepsilon_j^2 + \ldots + a_n\varepsilon_j^n$.

(Ověřte podrobně.)

Máme tedy výsledek! Determinant onoho zobrazení je v nové basi vyjádřen jako determinant diagonální matice s prvky ω_j na diagonále, je tedy součinem ω_j:

$$\det \mathbf{C} = \prod_{j=0}^{n} \omega_j = \prod_{j=0}^{n} (\sum_{i=0}^{n} a_i \varepsilon_j^i). \tag{8.54}$$

Na podobné téma budeme ještě mluvit v podkapitole o duální grupě.

8.3 Rozvoj determinantu podle sloupce

Označme symbolem $\mathbf{A}_i^{\ j}$ matici vzniklou vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce (podle něhož matici rozvíjíme) z matice $\mathbf{A}$. Pak platí následující věta.[6]

$$\forall j \quad \det \mathbf{A} = \sum_i (-1)^{i+j} a^i{}_j \, \det \mathbf{A}_i^{\ j} \tag{8.55}$$

<u>DŮKAZ.</u> *Označme symbolem $\mathbf{A}_{<ij>}$ matici vzniklou z $\mathbf{A}$ vynulováním všech prvků j-tého sloupce s výjimkou $a^i{}_j$. Linearita determinantu jako funkce sloupce dává vztah*

$$\forall j \quad \det \mathbf{A} = \sum_i \det \mathbf{A}_{<ij>}. \tag{8.56}$$

[5] O převodu souřadnic vektoru do této base se mluví jako o **diskrétní Fourierově transformaci.**

[6] V Kopáčkových skriptech je brána za <u>definici</u> determinantu indukcí podle rozměru, suma přes permutace je tam tedy větou.

Stačí nyní dokázat

LEMMA. $\det \mathbf{A}_{<ij>} = (-1)^{i+j} a^i{}_j \det \mathbf{A}_i^{\ j}$

Pro $i = j = 1$ je lemma zřejmé, jinak „přestěhujeme" prvek $a^i{}_j$ na místo $(1,1)$ postupnou aplikací

- *transposic sloupců v pořadí $i \leftrightarrow i-1,\ i-1 \leftrightarrow i-2,\ \dots,\ 2 \leftrightarrow 1$;*
- *transposic řádků v pořadí $j \leftrightarrow j-1,\ j-1 \leftrightarrow j-2,\ \dots,\ 2 \leftrightarrow 1$.*

Jelikož transposice sloupců, ale i řádků (jak ukazujeme dále) mění znaménko determinantu, bude výsledná matice (značme ji $\mathbf{A}'_{<ij>}$) splňovat vztah

$$\det \mathbf{A}'_{<ij>} = (-1)^{i-1+j-1} \det \mathbf{A}_{<ij>}. \tag{8.57}$$

Důkaz lemmatu plyne nyní ze zřejmého vztahu

$$\det \mathbf{A}'_{<ij>} = a^i{}_j \det \mathbf{A}_i^{\ j} \tag{8.58}$$

(bloková matice, první sloupec nulový až na první člen, pravý spodek matice $\mathbf{A}'_{<ij>}$ je právě matice $\mathbf{A}_i^{\ j}$). Použití řádkových úprav se bylo možno vyhnout; nebylo by to však účelné vzhledem k platnosti vztahu níže, jehož důsledkem je (všimněte si přehození indexů i a $\pi(i)$ proti dřívějším formulím)

$$\det \mathbf{A} = \sum_{\pi} \operatorname{znak} \pi \prod_{i=1}^{n} a^i{}_{\pi(i)} \tag{8.59}$$

PRINCIP. Zaměníme-li v jakémkoli platném tvrzení slovo „řádek" za slovo „sloupec" a naopak (a eventuálně invertujeme pořadí násobení matic, je-li o něm řeč), dostaneme opět platné tvrzení.

Důkaz plyne ihned z triviálního vztahu

$$\operatorname{znak} \pi \operatorname{znak} \pi^{-1} = 1 \tag{8.60}$$

pro inversní permutaci chápanou jako $\pi^{-1}(j) = i$ pokud $\pi(i) = j$. Proto je determinant **transponované matice**, *to jest matice převrácené přes hlavní diagonálu, stejný jako determinant matice původní.*

Výpočet inversní matice

Označme $\mathbf{B}$ matici s prvky $b^j{}_i = (-1)^{i+j} \det \mathbf{A}_i^{\ j}$. Pak je

$$\sum_k b^j{}_k a^k{}_i = \sum_k (-1)^{j+k} a^k_i \det \mathbf{A}_k^{\ j} = \delta^j_i \det \mathbf{A}, \tag{8.61}$$

kde $\delta_i^j = 1$ resp. 0 pokud $i = j$ resp. $i \neq j$ (v prvém případě jde o rozvoj $\det \mathbf{A}$, v druhém jde o nulovost determinantu se stejnou i-tou a j-tou řádkou). Takže platí

$$\mathbf{BA} = \det \mathbf{A} \cdot \mathbf{1}, \tag{8.62}$$

a tedy $\mathbf{CA} = \mathbf{1}$, kde matice $\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}$ má prvky

$$c^j{}_i = (-1)^{i+j} \det \mathbf{A}_i{}^j (\det \mathbf{A})^{-1}. \tag{8.63}$$

(Všimněte si přehození pořadí indexů i, j.)

8.4 Cramerovo pravidlo, řešení soustavy

Soustavu níže můžeme vyřešit také touto úvahou:

$$\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}} \ \text{ či } \ \vec{\mathbf{b}} = \sum \vec{\mathbf{s}}_i x^i \ \ (\vec{\mathbf{s}}_i \text{ je } i\text{-tý sloupec } \mathbf{A}) \tag{8.64}$$

Označme symbolem $\mathbf{A}_{j\vec{\mathbf{b}}}$ matici vzniklou nahražením j-tého sloupce matice $\mathbf{A}$ sloupcem $\vec{\mathbf{b}}$. Pak je

$$\det \mathbf{A}_{j\vec{\mathbf{b}}} = \det \mathbf{A}_{j\Sigma\vec{\mathbf{s}}_i x^i} = \Sigma_i \det \mathbf{A}_{j\vec{\mathbf{s}}_i} x^i = x^j \det \mathbf{A} \tag{8.65}$$

(kde prostřední rovnítko je oprávněné linearitou determinantu, $\mathbf{A}_{j\vec{\mathbf{s}}_i} = \mathbf{A}$ pro $i = j$, $\det \mathbf{A}_{j\vec{\mathbf{s}}_i} = 0$ pro $i \neq j$), tedy

$$x^j = \frac{\det \mathbf{A}_{\mathrm{j}\vec{\mathbf{b}}}}{\det \mathbf{A}}. \tag{8.66}$$

Geometrickou interpretaci této úvahy jsme již uvedli v odstavci (1.2). Ve srovnání s metodou odstavce (6.2) se nabízí otázka, která z těchto dvou metod je účinnější a rychlejší. To závisí na konkrétním případě. Výhoda vzorce (8.66) je v jeho přehlednosti, což umožní leckteré jeho netriviální aplikace i v úlohách, kdy nám nejde vysloveně o numerické hodnoty veličin x^j, ale třeba jen o postihnutí některých vlastností řešení. Viz třeba odstavec (17.3) – Jacobi-Sylvesterova metoda.

Ale i v jiných problémech, třeba pro tzv. pásové matice (jejichž nenulové členy jsou soustředěny poblíž diagonály; takovýto typ se vyskytuje velmi často v aplikacích při náhradě diferenciálních rovnic diferenčními) se někdy ukazuje, že užitečnou informaci o hodnotě x^i lze odvodit i pro velmi velké matice.

CVIČENÍ. Mějme soustavu rovnic

$$x_n + \alpha(n)x_{n-1} + \beta(n)x_{n+1} = b_n, \tag{8.67}$$

kde n je hodně velké (představme si třeba $n = 10^{23}$, jak je ve statistické fysice běžné) a kde většina koeficientů $\alpha(n)$ a $\beta(n)$ je nulová. (Řekněme, že méně než deset procent koeficientů $\alpha(n)$ i $\beta(n)$ je nenulových.)

Potom pro většinu hodnot $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ má řešení rovnice (8.67) s pravou stranou $b_n = \delta_{kn}$ alespoň polovinu složek nulových! Dokažte. (Prozkoumejte ten cyklus libovolné permutace přispívající k determinantu v čitateli, který obsahuje sloupec k. Může být vůbec příspěvek permutace s takovým cyklem nenulový?)

Alternativní formulace

Uveďme ještě následující „homogenní" versi Cramerova pravidla:

VĚTA. Mějme homogenní soustavu

$$\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}} \tag{8.68}$$

n rovnic o $n+1$ neznámých, s maticí hodnosti n. Pak její řešení je dáno (až na násobek) vzorcem

$$\vec{\mathbf{x}}_i = (-1)^i \det \mathbf{A}_i, \tag{8.69}$$

kde $\mathbf{A}_i$ označuje matici, vzniklou z $\mathbf{A}$ vynecháním i-tého sloupce. Důkaz lze provést pomocí následující úvahy:

Doplňme matici $\mathbf{A}$ nahoře ještě jedním řádkem – označme jej $\vec{\mathbf{y}}$ – voleným z řádkového prostoru $\mathbf{A}$. Determinant takto rozšířené matice je samozřejmě nulový; jeho rozpisem podle prvního řádku $\mathbf{y}$ dostaneme

$$\sum_i (-1)^i y_i \det \mathbf{A}_i = 0, \tag{8.70}$$

tedy $\vec{\mathbf{x}}$ z rovnice (8.69) je vskutku kolmé k $\vec{\mathbf{y}}$. (Vzpomeňte si na charakterisaci homogenního řešení jako ortogonálního doplňku k řádkovému prostoru matice.) Vyjasněte vztah tohoto tvrzení ke Cramerově pravidlu!

Kapitola 9

Vlastní čísla a vektory operátoru

Přicházíme nyní k jednomu z nejdůležitějších pojmů lineární algebry.

DEFINICE. Nechť $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ je lineární operátor a

$$\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}}) = \lambda\vec{\mathbf{v}}, \qquad \vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{0}}. \tag{9.1}$$

Pak λ nazveme **charakteristickým** neboli **vlastním číslem**[1] operátoru f a $\vec{\mathbf{v}}$ jeho **vlastním vektorem**. (V případě, že jde o prostor funkcí $\mathbb{V}$, mluvíme o **vlastní funkci**.) Souboru vlastních čísel operátoru říkáme **spektrum**. Zformulujte si sami pojem vlastního čísla a vektoru matice.

NUTNOST ZAVEDENÍ KOMPLEXNÍCH LINEÁRNÍCH PROSTORŮ. Chceme-li využívat mocné techniky vlastních čísel a vektorů rozvinuté dále, uvažme, že algebraická rovnice s koeficienty z $\mathbb{R}$ nemusí mít kořen z $\mathbb{R}$, zatímco pro $\mathbb{C}$ existuje

ZÁKLADNÍ VĚTA ALGEBRY. Ta tvrdí, že každý polynom alespoň prvního stupně s libovolnými koeficienty z $\mathbb{C}$ má v komplexním oboru alespoň jeden kořen.

INTUITIVNÍ DŮKAZ. (Pro ty, co již třeba slyšeli něco o logaritmu komplexního čísla. Jinak, prosím, text přeskočte.) *Polynom*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \tag{9.2}$$

[1] Německy „Eigenwert“, rusky „sobstvěnnoje značenie“, anglicky „eigenvalue“ (germanismus svědčí o vedoucí roli německé matematiky té doby).

se pro velká komplexní $x = re^{i\varphi}$, *kde* $r \to \infty$ *chová jako* $a_n x^n$. *Lze najít dostatečně velké* r, *aby se argument (úhel) při objetí kružnice změnil celkově o* $2\pi n$.

Pokud je polynom v celé Gaussově rovině nenulový, lze ho všude logaritmovat (logaritmus komplexního čísla je logaritmem jeho absolutní hodnoty plus i*-krát argument, který vybereme třeba z intervalu* $(-\pi, \pi >)$, *logaritmus pak bude stejně jako polynom sám spojitou funkcí a po objetí*[2] *po libovolné křivce se vrátí na výchozí hodnotu, aniž by se změnil byť jen o násobek* $2\pi i$, *což je v rozporu se závěrem minulého odstavce.*

<u>DŮSLEDEK.</u> Každý polynom stupně n lze napsat ve tvaru

$$p(x) = a_n \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i) \tag{9.3}$$

nebo ve tvaru

$$p(x) = a_n \prod_{j=1}^{k} (x - \alpha_j)^{n(j)}, \tag{9.4}$$

kde α_j jsou vzájemně různé a $n(j)$ je **stupeň** neboli **násobnost** kořene α_j.

<u>NÁZNAK DŮKAZU.</u> Je-li α kořen polynomu, pak[3]

$$p(x) = p(x) - p(\alpha) = (x - \alpha)q(x), \tag{9.5}$$

kde $q(x)$ je jakýsi polynom stupně $n-1$, jehož kořeny mají stejnou násobnost jako u p kromě kořenu α, jenž ji má o jednu menší. Iterováním poslední vysazené formule dostáváme požadovaný rozklad.

<u>VĚTA.</u> λ je vlastním číslem $f \Leftrightarrow \lambda$ řeší rovnici $\det(f - \lambda\mathbf{1}) = 0$.

<u>DŮKAZ.</u> $\exists\vec{\mathbf{v}},\ \vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}}) = \lambda\vec{\mathbf{v}} \Leftrightarrow (f - \lambda\mathbf{1})$ *není bijekcí, a to není právě když* $\det(f - \lambda\mathbf{1}) = 0$. Poslední rovnice je tzv. **charakteristická rovnice operátoru.** (Zopakujte si pojem determinantu operátoru!)

<u>VĚTA O DIAGONALISACI.</u> Nechť charakteristická rovnice $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ má všechny kořeny různé, tj. jednonásobné. Pak lze f diagonalisovat, podrobněji f má diagonální matici vzhledem k basi $\mathbb{V}$ tvořené vlastními vektory f.

[2]Imaginární část logaritmu přitom měníme spojitě, nikoli v intervalu $(-\pi, \pi >$.

[3]Zde využíváme rovností typu $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$.

DŮKAZ. *Stačí ukázat, že vlastní vektory tvoří basi $\mathbb{V}$; jelikož jejich počet odpovídá stupni charakteristické rovnice tzn. dimensi $\mathbb{V}$, ukážeme již jen jejich nezávislost, třeba takto: Kdyby pro vhodnou nenulovou sadu koeficientů μ_i platilo*

$$\sum \mu_i \vec{\mathbf{v}}_i = 0, \tag{9.6}$$

kde $\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}}_i) = \lambda_i \vec{\mathbf{v}}_i$, tak by pro každé kladné celé N platilo

$$0 = f^N(\sum \mu_i \vec{\mathbf{v}}_i) = \sum \mu_i \lambda_i^N \vec{\mathbf{v}}_i, \tag{9.7}$$

a to je příliš (nekonečně mnoho) nezávislých rovnic pro neznámé μ_i na to, aby šly řešit. Dumejte podrobněji, viz též kapitolu o Jordanově tvaru.

Použili jsme jednoduché TVRZENÍČKO. Je-li $\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}}) = \lambda \vec{\mathbf{v}}$, je také

$$\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{N} \equiv f^N(\vec{\mathbf{v}}) = \lambda^N \vec{\mathbf{v}}. \tag{9.8}$$

VĚTA. Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ jsou prvky spektra f; každý prvek píšeme tolikrát, kolik je jeho násobnost. Pak

$$\det f = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \ \ a \ \ \mathrm{Tr}\, f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i. \tag{9.9}$$

V případě jednonásobných kořenů plyne z minulé věty, obecný důkaz rozvádět nebudeme, neboť vyplyne z detailnějších úvah o Jordanově formě matice, ale můžete si jej provést již teď, uvědomíte-li si, že stopa a determinant jsou (až na znaménko) koeficienty a_{n-1}, a_0 charakteristického polynomu.

VĚTA. Nereálná vlastní čísla a vektory reálné matice $\mathbf{A}$ (zatím nemluvme o obecném operátoru) lze sdružit do párů:

$$\text{Je-li} \ \ \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \lambda \vec{\mathbf{x}} \ \ \text{tak platí i} \ \ \mathbf{A}\overline{\vec{\mathbf{x}}} = \overline{\lambda \vec{\mathbf{x}}}. \tag{9.10}$$

DŮKAZ. *Druhá rovnost je komplexně sdružená s první, a že lze pruh „roztrhnout“ při násobení $\overline{ab} = \overline{a}\overline{b}$, asi ještě víte.*

PŘÍKLAD. Ověřením vztahu

$$(\mathbf{1} - \mathbf{BA})^{-1} = \mathbf{1} + \mathbf{B}(\mathbf{1} - \mathbf{AB})^{-1}\mathbf{A}, \tag{9.11}$$

pokud inverse existuje alespoň na jedné straně, dokažte, že nenulové části spektra $\mathbf{AB}$ i $\mathbf{BA}$jsou stejné.

Tento fakt je ještě mnohem jednodušeji vidět z rovnosti (ukazující podobnost $\mathbf{AB}$ a $\mathbf{BA}$ a platné pokud $\mathbf{A}$ resp. $\mathbf{B}$ je regulární, což je silný požadavek v případě nekonečné dimense, kde tedy bývá užitečnější vztah výše uvedený)

$$\mathbf{AB} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{BA} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{BA} \cdot \mathbf{B}. \tag{9.12}$$

Z tohoto plyne, že rovnice $\mathbf{AB} - \mathbf{BA} = \mathbf{1}$ nemá řešení pro matice konečné velikosti[4] (srovnej se sekcí Kvantová mechanika). Uvedenou nemožnost je možno dokázati i jednodušeji užitím cykličnosti stopy. Proveďte!

9.1 Charakterisace isometrií ve třech rozměrech

<u>DŮSLEDEK.</u> Nechť $f : \mathbb{E}_3 \to \mathbb{E}_3$ je lineární zobrazení zachovávající délky vektorů. Pak platí $|\det f| = 1$ a

- je-li navíc $\det f = +1$, je f otočením kolem vhodné osy
- je-li $\det f = -1$, lze f vyjádřit jako komposici otočení a zrcadlení; protože jsme v liché dimensi, můžeme za zrcadlící matici vzít minus jednotkovou matici; to má tu výhodu, že nezávisí na tom, zda ji napíšeme vlevo či vpravo – komutuje se všemi maticemi (pro $-f$ platí minulý bod); v sudorozměrném případě je třeba vzít matici vzniklou z jednotkové nahrazením jedné (lichého počtu) jednotky minus jednotkou

<u>DŮKAZ.</u> *Nejprve poznamenejme, že vlastnosti „zachovává velikost vektoru" a „zachovává skalární součin" jsou v důsledku kosinové věty ekvivalentní.*

$$\left\|\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}})\right\| = \|\vec{\mathbf{v}}\| \iff \mathbf{b}(\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}}), \vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{w}})) = \mathbf{b}(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}) \tag{9.13}$$

Podle první věty máme, že buď jsou všechna vlastní čísla zobrazení f $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ reálná, nebo musí být dvě vzájemně komplexně sdružená (řekněme $\lambda_2 = \overline{\lambda_3}$). Jelikož

$$\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}}_i) = \lambda_i \vec{\mathbf{v}}_i \,\&\, \left\|\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}}_i)\right\| = \|\vec{\mathbf{v}}_i\| \implies |\lambda_i| = 1 \tag{9.14}$$

[4] Uvědomme si, že spektrum matice $\mathbf{C} + \mathbf{1}$ je oproti spektru matice $\mathbf{C}$ posunuto o jedničku doprava.

Tedy je $\lambda_2\overline{\lambda_2} = \lambda_3\lambda_2 = 1$, *a tak* $\pm 1 = \det f = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$, *čili* $\lambda_1 = \pm 1$.

Našli jsme vlastní vektor příslušející vlastnímu číslu ± 1, *v kladném případě tedy osu otáčení. Řekneme už jen, že označíme-li tuto osu jako* z, *jsou další vlastní vektory (*ϕ *je úhel otočení kolem osy* z*; lehce se o všem přesvědčíte přímým výpočtem)*

- $\vec{\mathbf{e}}_x + i\vec{\mathbf{e}}_y$ *s vlastním číslem* $e^{i\phi}$
- $\vec{\mathbf{e}}_x - i\vec{\mathbf{e}}_y$ *s vlastním číslem* $e^{-i\phi}$.

9.2 Přehled grup, Cartaniáda

Na závěr první části knihy uvádíme přehled grup, zvláště **grup Lieových** (to jest spojitých grup matic). Je trochu náhoda, že se ocitl v této kapitole. Začátečníkům doporučujeme čtení této kapitoly odložit na pozdější dobu (po seznámení se s úvodem kapitoly Lieova algebra).

Mezi obvyklé symboly pro grupy patří:

- $\mathbb{S}_n$, grupa všech permutací n-prvkové množiny (má $n!$ prvků).
- $\mathbb{A}_n$, její normální podgrupa všech sudých permutací (má $n!/2$ prvků pro $n > 1$).
- Δ_n, podgrupa $\mathbb{S}_n$, grupa všech symetrií pravidelného n-úhelníka ($2n$ prvků).
- nám již známé aditivní komutativní grupy $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_n$.

To byly grupy **diskrétní** (nespojité), v prvých třech případech konečné. Další položky budou grupy Lieovy. Čtete-li text poprvé, následující seznamy přeskočte nebo čtěte v pořadí od nejjednodušších grup (ty ale určitě):

$$\mathbb{GL}, \mathbb{SL}, \mathbb{O}, \mathbb{SO}, \mathbb{U}, \mathbb{SU}\dots \tag{9.15}$$

Pro čtenáře, kteří zatím nebudou číst níže uvedený text, uvádíme telegraficky nejdůležitější informace. $\mathbb{GL}$ je grupou všech regulárních matic, $\mathbb{SL}$ je podgrupou všech matic s determinantem jedna (zopakujte větu o násobení determinantů!), $\mathbb{O}$ je grupou všech tzv. ortogonálních matic; pojem ortogonální matice můžeme definovat nejméně třemi ekvivalentními způsoby:

- Matice, jejichž řádky mají normu jednotkovou a jsou vzájemně kolmé. (Ukažte, že potom platí totéž pro sloupce.)

- Matice, pro které platí vztah $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$. Jinými slovy, $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{1}$ (což je ekvivalentní se vztahem $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{1}$). Ukažte. (Tato vlastnost se nejlépe hodí k důkazu uzavřenosti na komposici a inversi. Proveďte podrobně.)
- Matice, které zachovávají skalární součin: $\mathbf{b}(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \mathbf{b}(\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}, \mathbf{A}\vec{\mathbf{y}})$.
- Matice, které zachovávají velikost vektoru.

Konečně, grupou $\mathbb{SO}$ rozumíme grupu všech ortogonálních matic, jejichž determinant má hodnotu jedna.

<u>CVIČENÍ.</u> Determinant ortogonální matice je roven ± 1.

Grupy $\mathbb{U}$ a $\mathbb{SU}$ tzv. unitárních matic jsou analogií grup $\mathbb{O}$ a $\mathbb{SO}$; jsou užitečné v komplexních prostorech. Pojem unitární matice lze opět definovat několika ekvivalentními způsoby: unitární matice zachovávají skalární součin v <u>komplexním</u> prostoru a další ekvivalentní podmínky lze formulovat analogicky jako nahoře. Proveďte patřičnou modifikaci, pracujte s maticí $\mathbf{A}^* = \overline{\mathbf{A}^T}$ a podobně.

<u>CVIČENÍ.</u> Determinant unitární matice je komplexní jednotkou.

Cartan (♯) ve své disertaci provedl klasifikaci prostých kompaktních spojitých grup a odpovídajících algeber (viz kapitolu o exponenciále). (Grupě říkáme **kompaktní**, pokud každá posloupnost jejích prvků obsahuje konvergentní podposloupnost; v případě grup matic lze říci, že kompaktní grupy jsou grupy matic, jejichž prvky jsou matice se stejně omezenými složkami a navíc jsou tyto grupy uzavřené jako podmnožiny patřičného vektorového prostoru.

V dalším uvádíme některá základní data o tom, jak mohou obecně vypadat kompaktní grupy matic; uvedené výsledky i (gotická) označení pocházejí od Cartana. Použité indexy označují tzv. **rank** grupy, což je (podobně jako **dimense** grupy) pojem, který zavedeme podrobněji až v kapitole o Lieových algebrách. (Čtenář hlouběji studující níže uvedený text, hledající více než jen počáteční seznámení s názvy některých význačných grup, by měl nejprve prostudovat úvodní partie dotyčné kapitoly). Zhruba řečeno, rank grupy udává, kolik vzájemně komutujících a nezávislých kružnic („kružnicí“ rozumíme jednoparametrickou podgrupu; přesné vysvětlení zde použitého pojmu „nezávislosti“ je možno podat také až v kapitole Lieova algebra) jsme schopni v grupě objevit – zatímco dimense grupy je číslo, které udává, do kolikadimensionálního euklidovského prostoru jsme schopni danou grupu lokálně vzájemně jednoznačně a hladce zobrazit.

CVIČENÍ. ($\flat$) Rank grupy všech otočení v $\mathbb{E}^3$ (tuto grupu dále značíme jako $\mathbb{SO}(3)$) je roven jedné, tzn. neexistují dvě různá otočení prostoru podle neidentických os, která by komutovala. Uvědomte si to! ($\heartsuit$)

- Algebra $\mathfrak{A}_l$ a jí odpovídající grupa $\mathbb{SU}(l+1)$ mají dimensi $(l+1)^2-1$; grupa obsahuje všechny **unitární unimodulární** komplexní matice $\mathbf{A}$ rozměru $(l+1)\times(l+1)$, to jest matice, splňující

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{1}, \quad \det\mathbf{A} = 1. \tag{9.16}$$

- Algebra $\mathfrak{B}_l$ a jí odpovídající grupa $\mathbb{SO}(2l+1,\mathbb{R})$ mají dimensi $(2l+1)l$; grupa obsahuje reálné matice rozměru $(2l+1)\times(2l+1)$ splňující

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{1}, \quad \det\mathbf{A} = 1. \tag{9.17}$$

- Algebra $\mathfrak{C}_l$ a jí odpovídající grupa $\mathbb{S}p(2l)$ neboli $\mathbb{US}p(2l)$ mají dimensi $(2l+1)l$; grupa obsahuje komplexní unitární **symplektické** matice rozměru $2l\times 2l$, tj. matice splňující (v sekci o spinorech vysvětlíme, proč grupu vykládáme jako unitární grupu nad kvaterniony $\mathbb{U}(l,\mathbb{H})$, což je důvod, proč mnozí píší $\mathbb{S}p(l)$ místo $\mathbb{S}p(2l)$)

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{1}, \quad \mathbf{A}\mathbf{K}\mathbf{A}^T = \mathbf{K}, \tag{9.18}$$

  kde $\mathbf{K}$ je nějaká regulární antisymetrická[5] matice (antisymetrická matice lichého rozměru je vždy singulární, proto $2l$).

  Ani v tomto případě nečiní potíže ukázat, že jde o grupu (proveďte). Na rozdíl od předchozích grup s jasnou geometrickou interpretací jejich prvků, pojem symplektické grupy lze motivovat (jinak než formálně algebraicky; interpretace jako „unitární grupa nad kvaterniony“ bude asi příliš obtížným soustem pro začátečníka) jen čtenáři s alespoň minimální znalostí analytické mechaniky: viz též odstavec 11.10 níže.

- Algebra $\mathfrak{D}_l$ a odpovídající grupa $\mathbb{SO}(2l,\mathbb{R})$ mají dimensi $(2l-1)l$.

- ($\sharp\sharp$) Další jsou Cartanovy vyňaté grupy (student je může přehlédnout, nezajímají-li ho), u nichž uvádíme dimensi a počet rozměrů fundamentální representace ($\mathbb{E}_6$ má komplexní fundamentální representaci a k ní sdruženou, ostatní mají jen reálné representace).

[5] Taková, že $\mathbf{K} = -\mathbf{K}^T$, někdy se říká **polosymetrická** nebo **kososymetrická**.

- $\mathfrak{E}_6$ a grupa $\mathbb{E}_6$, dimense 78, fund. $27/\overline{27}$.
- $\mathfrak{E}_7$ a grupa $\mathbb{E}_7$, dimense 133, fund. 56.
- $\mathfrak{E}_8$ a grupa $\mathbb{E}_8$, dimense 248, fund. 248. (Fundamentální representace této grupy splývá s přidruženou.)
- $\mathfrak{F}_4$ a grupa $\mathbb{F}_4$, dimense 52, fund. 26.
- $\mathfrak{G}_2$ a grupa $\mathbb{G}_2$, dimense 14, fund. 7. (Jde o grupu symetrií **Cayleyových čísel** jakožto algebry nad $\mathbb{R}$, které dostaneme jako ještě větší „těleso“ (dimense osm) než $\mathbb{H}$, nepožadujeme-li u „tělesa“ asociativitu násobení.) (♡)

Nejen kompaktními grupami živa je teorie grup. (Ačkoli kompaktní grupy mají nesporné přednosti; mají „konečný objem“, tzn. takzvané invariantní integrování po grupě (**Haarova míra**)

$$\int_{g\in\mathbb{G}} f(g)d\mu = \int_{g\in\mathbb{G}} f(gh)d\mu = \int_{g\in\mathbb{G}} f(hg)d\mu \tag{9.19}$$

lze normovat na jednotkový integrál z jednotkové funkce, o čemž nemůže být řeči u nekompaktních grup a což např. zaručuje, že každá lineární representace kompaktní grupy se dá rozepsat jako přímý součet nerozložitelných podprostorů.)

- $\mathbb{GL}(n,\mathbb{R}/\mathbb{C})$ jsou všechny regulární reálné/komplexní matice $n\times n$; zkratka „general linear“. Reálná dimense je n^2 v reálném případě, dvojnásobná v komplexním.
- $\mathbb{SL}(n,\mathbb{R}/\mathbb{C})$ je podgrupa těch, které mají determinant roven jedné (tzv. **unimodulárních**); zkratka „special linear“. Reálná dimense je n^2-1 v reálném a dvojnásobná v komplexním případě.
- $\mathbb{O}(n,\mathbb{R}/\mathbb{C})$ je grupa všech **ortogonálních** matic $\mathbf{A}$ (splňujících $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$); zkratka „orthogonal“. Dimense je $n(n-1)/2$ v reálném a dvojnásobná v komplexním.
- $\mathbb{SO}(n,\mathbb{R}/\mathbb{C})$ je průnik $\mathbb{SL}$ a $\mathbb{O}$; z toho plyne zkratka. Dimense je jako u $\mathbb{O}$. Pro těleso $\mathbb{R}$ je grupa kompaktní a zajímavější než v komplexním případě, kde je lepší studovat kompaktní grupy unitární (viz dále); neudáme-li tedy těleso, míníme tím $\mathbb{SO}(n,\mathbb{R})$.

- $\mathbb{S}pin(n)$, což je grupa téměř isomorfní s $\mathbb{SO}(n)$, ale každému prvku grupy $\mathbb{SO}(n)$ odpovídají dva prvky grupy $\mathbb{S}pin(n)$, např. jednotkovému prvku $\mathbb{SO}(n)$ přísluší prvky, které nazveme „rotace o 0°“ a „rotace o 360°“. V sekci o spinorech ujasníme, proč rozeznáme rotaci o 2π od rotace o 0. Příklad: $\mathbb{S}pin(3)$ je isomorfní $\mathbb{SU}(2)$.
- Grupa $\mathbb{U}(n)$ všech komplexních **unitárních** matic $\mathbf{A}$ rozměru $n \times n$, splňujících $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^* \equiv (\overline{\mathbf{A}})^T$; zkratka „unitary“. Dimense je n^2.
- Grupa $\mathbb{SU}(n)$ všech unitárních unimodulárních matic.
- Grupa $\mathbb{O}(m,n)$ (a odpovídající unimodulární $\mathbb{SO}(m,n)$) reálných **pseudoortogonálních** matic $\mathbf{A}$ rozměru $(m+n) \times (m+n)$, splňujících

  $$\mathbf{AGA}^T = \mathbf{G}, \tag{9.20}$$

  kde $\mathbf{G}$ je matice nulová kromě diagonály, na níž leží m jednotek a n minus jednotek. Vidíme, že $\mathbb{SO}(m,0) \equiv \mathbb{SO}(m)$, a také grupa $\mathbb{SO}(m,n)$ má touž dimensi jako $\mathbb{SO}(m+n)$. Kupříkladu grupa $\mathbb{O}(3,1)$ neboli $\mathbb{O}(1,3)$ je známá **Lorentzova grupa** otočení relativistického časoprostoru, fixující **Minkowského čtverec normy** vektoru $c^2t^2-x^2-y^2-z^2$ (za c si představte jednotku, jak činí i teoretičtí fysici). (Desetirozměrná) Lorentzova grupa obohacená o libovolná posunutí nese jméno dalšího relativistického prince: **grupa Poincaré**.

  Mnozí se rádi dovědí, že **konformní grupa** obsahuje všechny (i nelineární) transformace zachovávající úhly. (Ve dvou dimensích je nekonečněrozměrná, zobrazení odpovídají holomorfním funkcím komplexní proměnné a právě tato skutečnost povyšuje struny nad vícerozměrné objekty.)

  Všimněme si, že i taková grupa $\mathbb{SO}(3,1)$ je nesouvislá; skládá se ze dvou komponent s maticemi s $a^4{}_4 < 0$ resp. > 0 (transformace převracející budoucnost na minulost resp. budoucnost).

  Komplexní analogii nemá smysl uvažovat, neboť by vedla ke grupě isomorfní $\mathbb{SO}(m+n,\mathbb{C})$: matici $\mathbf{A}$ lze zastoupit podobnou maticí $\mathbf{B}$ dle vztahu $\mathbf{A} = \mathbf{CBC}^{-1}$, kde matici $\mathbf{C}$ získáme z $\mathbf{G}$ náhradou -1 za i, takže platí $\mathbf{CGC}^T = \mathbf{1}$ a dosazením za $\mathbf{A}$ získáme $\mathbf{BB}^T = \mathbf{1}$.
- Zato má smysl uvažovat o grupě $\mathbb{U}(m,n)$ a $\mathbb{SU}(m,n)$ komplexních **pseudounitárních** matic (♡)

  $$\mathbf{AGA}^* = \mathbf{G}. \tag{9.21}$$

SYLABUS PŘEDNÁŠKY LA 1/FYZ,ZIMNÍ SEMESTR

1 Pojem grupy, tělesa, lineárního prostoru, homomorfismu.
2 Permutace, transposice, cykly, inverze. Znak permutace.
3 Lineární (ne)závislost, pojem dimense, Steinitzova věta.
4 Isomorfismus. Podprostory lin. prostoru. Reálné a komplexní lineární prostory a vztahy jejich dimensí.
5 Prostory se skalárním součinem. Cauchyova a Minkowského nerovnost.
6 Gramm-Schmidtův ortogonalisační proces. Ortogonální doplněk podprostoru, ortogonální projekce. Dimense doplňku.
7 Lineární zobrazení. Příklady. Vztahy dimense jádra, obrazu a definičního oboru.
8 Vyjádření lineárního zobrazení maticí vůči daným bazím.(Příklad: derivace a posun polynomu) Transformace souřadnic vektoru při lineárním zobrazení.
9 Skládání zobrazení versus násobení matic.
10 Sloupcový a řádkový prostor matice, vztah jejich dimensí. Hodnost matice a zobrazení.
11 Frobeniova věta. Řešení přeurčených soustav.
12 Řádkové úpravy matice, jejich representace jako násobení jistými speciálními maticemi zleva. Důsledky: řešení soustav a výpočet inversní matice.
13 Gaussova eliminace.
14 Hodnost součinu matic. Regulární matice, příklady.
15 Vyjadřování zobrazení maticemi v různých dvojicích basí, způsob zápisu transformačních vztahů. Podobné matice.
16 Stopa matice a zobrazení, vlastnosti.
17 Definice a základní vlastnosti determinantu (chování při řádkových a sloupcových operacích). Objem rovnobežnostěnu.
19 Determinant součinu matic. Důsledky.
18 Rozvoj determinantu podle řádku (sloupce). Důsledek: výpočet inversní matice. Cramerovo pravidlo.
20 Výpočet determinantu speciálních matic (blokové, 3x3,...)
21 Rozklad mnohočlenu na kořenové činitele.
22 Vlastní čísla a vektory matice (operátoru).
23 Charakterisace třídimenzionálních izometrií.
24 Význačné grupy matic: GL,SL,O,SO,U,SU,...

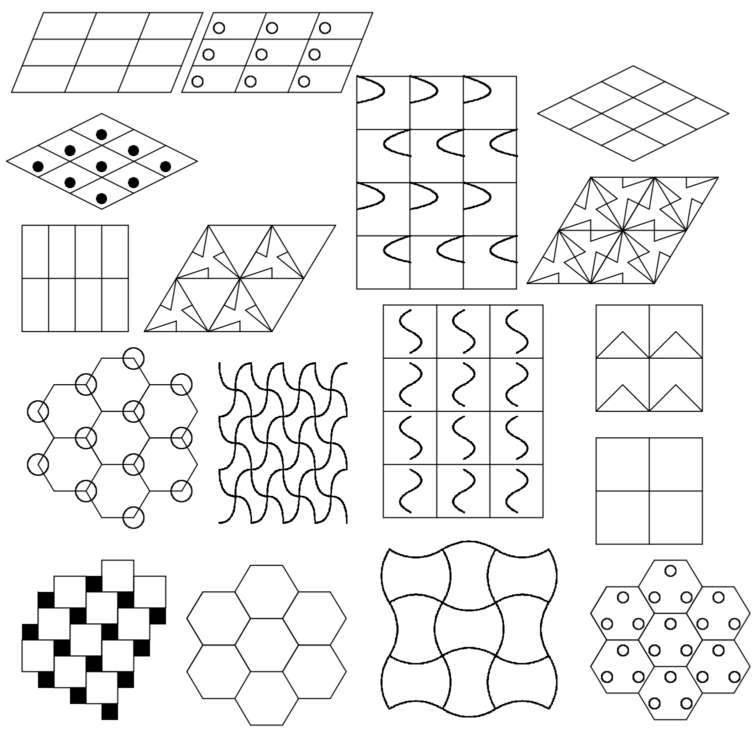
Část II

Letní semestr

Kapitola 10

Dláždění a krystaly

Před tím, než navážeme na přerušený výklad vlastních vektorů kapitolou o Jordanově tvaru a nilpotentních operátorech, zmíníme se, v následujících dvou kapitolách, o dvou tématech, spojených snad pouze pojmem grupy v nejobecnější formě: o krystalech a o exponenciále.



Několik pojmů z krystalografie

Mluvíme-li o symetriích krystalů, můžeme mít na mysli zkoumání vhodné podgrupy $\mathbb{O}(3, \mathbb{R})$, sestávající z isometrií „přemísťujících daný krystal na sebe". Co ale budeme rozumět pojmem krystal? Naivní náhled, ztotožňující pojem krystalu s nějakým konkrétním více či méně pravidelným tělesem (jako je např. krychle v případě kamenné soli) by nás daleko nezavedl. Podstatnější je už pozorování, že každý krystal má cosi jako „soubor povolených ohraničujících ploch", jejichž vzájemné úhly jsou pevně zadány (a můžeme je na skutečných krystalech měřit). Posuneme-li tyto plochy do počátku souřadnic, můžeme hledat **grupu symetrií** tohoto souboru rovin (prvky grupy jsou transformace převádějící každou povolenou rovinu do nějaké jiné povolené roviny). Další zkoumání tohoto problému vedlo krystalografy už v minulém století k zavedení fundamentálního pojmu (tehdy, před experimentálním důkazem existence atomu to byla pouhá užitečná myšlenková konstrukce) **krystalové mříže**: „povolené ohraničující roviny" jsou pak charakterisovány jako „celočíselné" podprostory mříže (tzn. podprostory protínající krystalovou mříž v nějaké podmříži dimense o jedničku menší). Tento „pythagorejský" přístup k problému je obecně od té doby přijímán krystalografy (i když podrobnější porozumění, proč právě celočíselné ohraničující roviny pozorujeme na skutečných krystalech (a to „tím významněji, čím menší jsou celočíselné souřadnice pozorované podmříže") stále chybí).

Takže je třeba studovat symetrie krystalové mříže!

Krystalografické soustavy pak odpovídají různým možným podgrupám $\mathbb{O}(3, \mathbb{R})$.

Zmíníme se krátce o dvojrozměrné versi tohoto problému, místo krystalické mříže upřeme zrak a mysl na <u>dláždění</u> roviny.

<u>DEFINICE.</u> **Přemístěním** roviny rozumíme takové zobrazení $\mathbb{E}^2$ na sebe, které zachovává vzdálenosti (tedy i úhly, dokažte, nepředpokládáme zachování orientace, může tedy jít i o zrcadlení).

<u>POZNÁMKA.</u> Dá se ukázat, že každé přemístění lze vyjádřit jako komposici translace ($\{\vec{\mathbf{x}} \mapsto \vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{a}}\} : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$) a vhodného prvku $\mathbb{O}(2, \mathbb{R})$ v tomto, stejně jako v opačném, pořadí.

<u>DEFINICE.</u> **Prostorovou grupou** $\mathbb{G}$ periodického dláždění rozumíme soubor všech přemístění, zobrazujících dláždění na sebe.

V rovině mohou mít dláždění 17 různých (navzájem neisomorfních) prostorových grup (viz[1] obrázek), trojrozměrná krystalická analogie jich má 230, které se dělí do sedmi základních tříd (jednoklonná,…).

<u>Definice.</u> **Grupa translací** dláždění $\mathbb{T}$ je definována jako podgrupa všech translací z $\mathbb{G}$; je tedy isomorfní $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, mluvíme-li o **periodickém** dláždění.

<u>Definice.</u> **Bodovou grupu** dláždění definujeme jako

$$\mathbb{S} = \{\alpha \in \mathbb{O}(2,\mathbb{R}) \,|\, \exists\, \text{translace } T, \text{ [2] že } T \circ \alpha \in \mathbb{G}\} \tag{10.1}$$

(dokažte, že to je grupa). Tato grupa je základním objektem krystalografického zkoumání, nikoli **stacionární grupa**, což je její podgrupa (ukažte, že nemusí být tatáž)

$$\mathbb{H} = \mathbb{O}(2,\mathbb{R}) \cap \mathbb{G}. \tag{10.2}$$

Význačnou roli v krystalografii hraje následující základní věta, již uvádíme jen pro orientaci, viz poznámku o důkazu této věty na konci kapitoly.

<u>Věta.</u> Je-li $\mathbb{C}$ cyklickou[3] podgrupou $\mathbb{S}$, pak $\mathbb{C}$ může obsahovat pouze

1, 2, 3, 4 nebo 6 prvků.

<u>Důsledek.</u> Žádný krystal s periodickou krystalovou mříží nemůže mít tvar pravidelného dvacetistěnu ani třicetistěnu.[4] Přesněji, žádná periodická krystalická mříž v $\mathbb{E}^3$ ani dláždění v $\mathbb{E}^2$ nemůže mít pětičetnou cyklickou podgrupu symetrií.

<u>Historická poznámka.</u> Když v roce 1984 byly připraveny rychlým ochazením jisté slitiny Al („dural“) první „krystaly“ tvaru třicetistěnu, byly nazvány **kvasikrystaly**. Jak uvidíme níže, poměr četností atomů takové

---

[1] Jsou pro vás tyto abstraktní pojmy španělskou vesnicí? Pak vězte, že v jednom španělském městě, zvaném Granada, znázornili Arabové mozaikami dláždění všech 17 typů již asi před tisíciletím.

[2] Nemusí být nutně z $\mathbb{T}$.

[3] Opakování: jde o grupu generovanou jedním prvkem.

[4] Což je degenerovaný rovnoběžnostěn nad dvanácti vektory tvořícími hlavní osy dvacetistěnu (který je analogicky simplexem nad dotyčnými vektory; obě tělesa mají stejné grupy symetrií). Třicetistěn tedy získáte vztyčením pravidelných „stanů“ nad stěnami dvanáctistěnu nebo dvacetistěnu tak vysokých, aby stěny stanů sousedních stěn Platónova tělesa ležely v rovině a tvořily kosočtvercové stěny třicetistěnu. Ten nepočítáme mezi Platónova tělesa, neb má dva druhy vrcholů.

slitiny není dán zlomky s malými přirozenými čísly, jak jsme zvyklí z chemie, ale iracionálními čísly jako je τ.

Již předtím, v roce 1975, sestrojil matematik Oliver Penrose příklad **kvasiperiodického dláždění** s pětičetnou grupou symetrií. Elegantní popis jeho konstrukce lze podat v pětirozměrném prostoru.

10.1 Penroseho pokrytí

V $\mathbb{E}^5$ uvažujme cyklickou pětičetnou grupu isometrií $\mathbb{G}_5$ isomorfní $(\mathbb{Z}_5,+)$ a generovanou prvkem g,

$$\vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{e}}_1)=\vec{\mathbf{e}}_2,\ \vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{e}}_2)=\vec{\mathbf{e}}_3,\ \vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{e}}_3)=\vec{\mathbf{e}}_4,\ \vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{e}}_4)=\vec{\mathbf{e}}_5,\ \vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{e}}_5)=\vec{\mathbf{e}}_1, \tag{10.3}$$

přičemž $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}$ je kanonická base.

Hledáme tzv. **invariantní podprostory** vůči $\mathbb{G}_5$, to jest podprostory $\mathbb{E}\subseteq\mathbb{E}^5$ takové, že[5]

$$g(\mathbb{E})\subseteq\mathbb{E}\quad\forall g\in\mathbb{G}_5. \tag{10.4}$$

NALEZENÍ INVARIANTNÍCH PODPROSTORŮ.

Snadno si uvědomíme, že „diagonála“

$$\mathbb{D}=\{(t,t,t,t,t)\,|\,t\in\mathbb{R}\} \tag{10.5}$$

je invariantním podprostorem, obal vlastního vektoru $(1,1,1,1,1)$ grupy $\mathbb{G}_5$ (je to vlastní vektor všech jejích prvků).

DALŠÍ PODPROSTORY. Získáme je, že z $\mathbb{E}^5$ přejdeme do $\mathbb{C}^5$ a určíme zbývající čtyři vlastní vektory $\mathbb{G}_5$ (tyto a k nim sdružené):

$$(1,\varepsilon,\varepsilon^2,\varepsilon^3,\varepsilon^4),\quad(1,\varepsilon^2,\varepsilon^4,\varepsilon^6,\varepsilon^8) \tag{10.6}$$

(z rovnic, aby byl vektor vlastním vektorem generujícího prvku grupy, dostaneme, že podíl sousedních souřadnic je vždy stejné ε) a dva vektory s komplexně sdruženými souřadnicemi v kanonické basi. Zde všude je $\varepsilon=\exp 2\pi i/5$, tedy $\varepsilon^5=1$. Invariantní podprostory v $\mathbb{C}^5$ lze dostat jako lineární obal libovolné podmnožiny množiny pěti vlastních vektorů (tedy 32 podprostorů, z toho jeden triviální –jen nulový vektor–, jeden celé $\mathbb{C}^5$ atd.).

[5]Podmínku stačí požadovat právě jen pro ten generátor g; protože g je prosté, tedy zachovává dimensi, lze psát místo značky podmnožiny rovnítko.

Chceme-li se rozumně vrátit do reálného prostoru, všimněme si dvojrozměrného komplexního prostoru $\mathbb{E}_C$ s basí[6]

$$\{(1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4), \quad (1, \overline{\varepsilon}^1, \overline{\varepsilon}^2, \overline{\varepsilon}^3, \overline{\varepsilon}^4)\}. \tag{10.7}$$

Druhý vektor je onen komplexně sdružený k prvnímu (jelikož souřadnice jsou komplexní jednotky, můžeme pruh také posunutím doprava přeměnit na minus v exponentu) a lze zvolit jinou, reálnější basi

$$\begin{aligned} \{(1, \cos 2\pi/5, \cos 4\pi/5, \cos 6\pi/5, \cos 8\pi/5),& \\ (0, \sin 2\pi/5, \sin 4\pi/5, \sin 6\pi/5, \sin 8\pi/5)\}.& \end{aligned} \tag{10.8}$$

Bereme-li jen reálné kombinace těchto vektorů, získáme reálný dvojrozměrný invariantní podprostor $\mathbb{E}$. (Podobně z dalších dvou komplexně sdružených vektorů dostaneme další podprostor.)

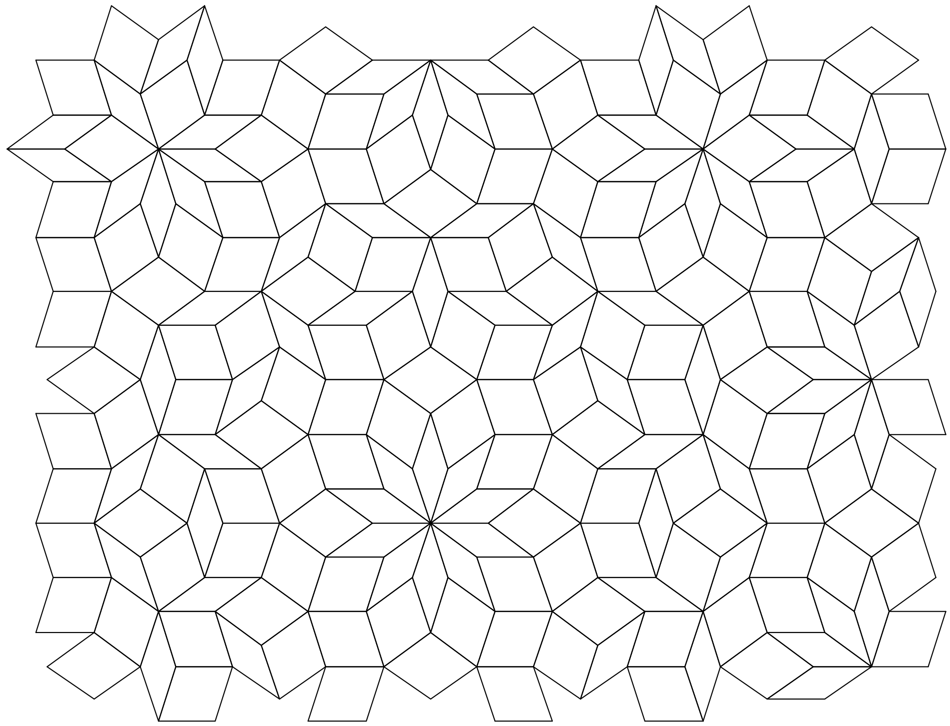
Ortogonální projekce $\vec{\mathbf{e}}_{1\ldots5}$ vypadá asi tak jako na straně 19.

<u>POZNÁMKA.</u> Podobné konstrukce je možno vytvořit i pro libovolná jiná <u>lichá</u> přirozená čísla, případ <u>sudých</u> čísel se odlišuje „dvojrozměrností diagonály“ (promyslete podrobněji). Ortogonální projekce tří-, pěti-, deseti-, jedenadvacetirozměrných krychlí do některého z těchto dvojrozměrných invariantních podprostorů (kromě diagonály!) dávají obrázky znázorněné na obálce knihy. Je možno si je představit také jako výsledek posloupnosti postupných ortogonálních projekcí do prostorů dimensí snižujících se o jedničku, začínající v prostoru $\mathbb{E}^n$, kde $n = 3, 5, 10, 21$, a končících ve zvoleném invariantním podprostoru. Čtenáři necháme k zamyšlení (asi netriviálnímu), jak vypadají „viditelné“ hrany těchto jednotlivých projekcí.

<u>VĚTY.</u> $\mathbb{D} \perp \mathbb{E} \perp \mathbb{E}' \perp \mathbb{D}$ (každý vektor kolmý na každý); projekce každého jednotkového dvojrozměrného čtverce s vrcholy v $\mathbb{Z}^5$ do $\mathbb{E}$ (analogicky do $\mathbb{E}'$) je kosočtvercem s vnitřním úhlem $36°$ nebo $72°$, oba mají stejnou délku strany.

---

[6] Další, funkčně shodný dvojrozměrný prostor vyvstane z druhého vektoru $(1, \varepsilon^2, \varepsilon^4, \varepsilon^6, \varepsilon^8)$ a jeho komplexně sdruženého, odlišme ho čárkou.



KONSTRUKCE PENROSEHO POKRYTÍ. Pozor, je to namáhavé! (♯♯)

Nechť[7] $K = \langle 0, 1\rangle^5$ je jednotková krychle v $\mathbb{E}^5$.

Označme $U = K + \mathbb{E} = \{\vec{\mathbf{k}} + \vec{\mathbf{e}} \,|\, \vec{\mathbf{k}} \in K,\ \vec{\mathbf{e}} \in \mathbb{E}\}$.

Penroseovo pokrytí (jde skutečně o přesné vydláždění roviny dvěma typy kosočtverců, nikde se nepřekrývají a nikde nezbude „díra“) je tvořeno projekcemi všech dvojrozměrných jednotkových čtverců s vrcholy v $\mathbb{Z}^5$, které leží celé v U.

VULGARISACE. (♭) Pro rámcovou představu o konstrukci Penroseova dláždění stačí uvažovat o prostoru $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{E}^3$ kolmém na vektor $(1, 1, 1)$. Přičteme-li k němu jednotkovou krychli, dostaneme pás prostoru a pohledem ve směru $(1, 1, 1)$ na tento pás prostoru spatříme „hranici zubatého poloprostoru“, což se v průmětu jeví jako šestiúhelníková síť, v níž je každý

[7] Otázku, zda krajní body do intervalu patří či ne, nyní nezodpovídejme; je nekonečně málo pravděpodobné, že bychom se do nich trefili. Tato nejasnost se jednodušeji vyřeší po projekci do (trojrozměrného) $\mathbb{E}^\perp$, kde se podmínka, aby čtverec ležel v U, redukuje na to, že průmět jeho středu leží v určitém rovnoběžnostěnu, který vybereme jako kartézský součin tří intervalů, každý uzavřený z jedné a otevřený z druhé strany.

šestiúhelník (stejným způsobem) rozdělen na tři kosočtverce. (♡)

CVIČENÍ. Dokažte pětičetnou symetrii tohoto pokrytí. Ambiciósnější studenti věnují asi deset hodin na důkaz, že pokrytí nemá překryvy a díry.

REFERENCE. Úvodní seznámení např. v *Scientific American, April 1991*, v adresáři `motl` na sítích najdete program jednoho z autorů, který toto dláždění kreslí. Možná vás upoutá, že „tlustých“ kosočtverců je více než „hubených“ právě zlatý-řez-krát (tj. cca 1.618 krát). Ti, kteří toto budou dokazovat, nakonec dojdou k tomu, že je to poměr objemů dvou určitých trojrozměrných rovnoběžnostěnů. (Přesněji řečeno poměr obsahů průniků systému ekvidistantních rovnoběžných rovin – mluvme o nich jako o rovinách $z =$konst. – a dvou rovnoběžnostěnů, každý z nichž je generován vektory se z-ovou složkou rovnou vzdálenosti sousedních rovnoběžných rovin, čili poměr vyjde naštěstí stejný, nezávislý na konkrétním umístění rovin.) V programu také najdete parametr „`posun`“, jehož volbou (0 nebo 1) docílíte globálně odlišné obrázky (v uvedených krajních případech je maximum resp. minimum (žádné) počtu deseticípých hvězd).

VĚTA (BABILONOVA). Poměr četností kosočtverců (resp. rhomboidů ve vícerozměrných kvasiperiodických pokrytích diskutovaných níže) dvou typů je roven poměru jejich obsahů (resp. objemů). Toto je důsledek následujícího tvrzení: (♡♡)

TVRZENÍ. V ortogonální matici $\mathbf{A}$ rozměru $2n\times 2n$, zapsané pomocí $n\times n$ bloků

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{pmatrix} \tag{10.9}$$

jsou spektra tzv. Grammových matic $\mathbf{aa}^T$ a $\mathbf{dd}^T$ stejná. Speciálně, matice $\mathbf{a}$ a $\mathbf{d}$ mají determinant stejný až na případné znaménko. Větu lze zobecnit i pro bloky různých rozměrů, doplníme-li menší blok po diagonále jednotkami (a všude jinde píšeme nuly).

DŮKAZ. Rozepsáním vztahu $\mathbf{AA}^T = \mathbf{1}$ ortogonality $\mathbf{A}$ na bloky dostaneme mimo jiné podmínku

$$\mathbf{cc}^T + \mathbf{dd}^T = \mathbf{1} \tag{10.10}$$

a z ekvivalentní rovnosti $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{1}$ získáme

$$\mathbf{a}^T\mathbf{a} + \mathbf{c}^T\mathbf{c} = \mathbf{1}, \tag{10.11}$$

kombinací kterých dojdeme k závěru, že matice $\mathbf{a}^T\mathbf{a} = \mathbf{1} - \mathbf{c}^T\mathbf{c}$ a $\mathbf{dd}^T = \mathbf{1} - \mathbf{cc}^T$ jsou podobné, poněvadž platí (viz podrobněji kapitolku o polárním rozkladu)

LEMMA. Matice $\mathbf{ef}$ a $\mathbf{fe}$ jsou podobné, je-li alespoň jedna z matic $\mathbf{e}, \mathbf{f}$ regulární. Speciálně, podobné jsou i $\mathbf{c}^T\mathbf{c}$ a $\mathbf{cc}^T$ pro regulární $\mathbf{c}$.

DŮKAZ.

$$\mathbf{ef} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{fe} \cdot \mathbf{e}^{-1} = \mathbf{f}^{-1} \cdot \mathbf{fe} \cdot \mathbf{f}. \tag{10.12}$$

CVIČENÍ.

```
Spočtěte poměr ploch 'tlustého' a 'tenkého' kosočtverce
v~Penroseově pokrytí.
```

Definici Penroseho dláždění lze uplatnit pro libovolný podprostor $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{E}^n$ prostoru libovolné dimense; není-li ovšem $\mathbb{E}$ invariantní podprostor vhodné grupy, nebudeme mít žádné symetrie takto vzniklého kvasiperiodického obecného dláždění.

10.2 Příklad třírozměrného kvasikrystalu

($\sharp$) Zmíníme se ještě o fysikálnější – totiž trojdimensionální – analogii Penroseova pokrytí. Ukážeme, jak lze vyjádřit prostor $\mathbb{E}^3$ jako „kvasiperiodický slepenec **rhomboidů**[8] dvou různých typů“.[9]

Základem porozumění níže uvedené konstrukci, pocházející z poloviny 80.let (Duneau-Katz), bude znalost dvacetistěnu (viz úvod skript); zdůrazňujeme zvláště fakt, že skalární součin jednotkových vektorů ve směru vrcholů je ± 1 nebo $\pm 5^{-1/2}$ (přičemž důležitá je jen ta $\pm$ dichotomie v druhém případě).

Nyní je možno použít následující elegantní šestirozměrnou konstrukci: umístěme v $\mathbb{E}^6$ dvě vzájemně kolmé kopie $\mathbb{E}^3$, $\mathbb{E}^{3\prime}$ a mějme v $\mathbb{E}^3$ resp. v $\mathbb{E}^{3\prime}$ vystavěny dvacetistěny tak, že platí $\forall i \neq j = 1, \ldots, 6$

$$\mathbf{b}(\vec{\mathbf{e}}_i, \vec{\mathbf{e}}_j) = -\mathbf{b}(\vec{\mathbf{e}}'_i, \vec{\mathbf{e}}'_j), \tag{10.13}$$

[8] Jiný název: rhomboedr. Tak se nazývá rovnoběžnostěn, který má všechny hrany stejně dlouhé.

[9] V hodině mineralogie se poklepnutím kladívkem na krystal kamenné soli ukazuje, kterak se tento rozpadá na další menší krychličky. Zde „poklepneme na třicetistěn“ a tento se rozpadne na množství rhomboidů dvou typů podobně, jako by se rozpadly na dva druhy kosočtverců mnohé pravidelné desetiúhelníky, které lze nalézt v Penroseově pokrytí. Dvacetistěn se takto rozbít nedá, takže nás neudiví, že většina experimentálně připravených kvasikrystalů jsou spíše třicetistěny než dvacetistěny.

kde $\pm\vec{\mathbf{e}}_1, \ldots, \pm\vec{\mathbf{e}}_6$, resp. s čarou, jsou zmíněné vrcholy dvacetistěnu v $\mathbb{E}^3$, resp. $\mathbb{E}^{3\prime}$. Je vskutku pozoruhodným faktem, že takové „dvojí očíslování vrcholů dvacetistěnu“ je vůbec možné (přečíslujeme-li pět sousedů vrcholu $\vec{\mathbf{e}}_6$ z pětiúhelníku na hvězdu a vrchol $\vec{\mathbf{e}}_6$ zaměníme s $-\vec{\mathbf{e}}_6$, přejdou nám blízké dvojice vrcholů na vzdálené a naopak). Vektory

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{x}}_1 &= \tfrac{\vec{\mathbf{e}}_1+\vec{\mathbf{e}}'_1}{\sqrt{2}} \\ &\vdots \\ \vec{\mathbf{x}}_6 &= \tfrac{\vec{\mathbf{e}}_6+\vec{\mathbf{e}}'_6}{\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{10.14}$$

jsou nyní kolmé (a jednotkové)!

Vytvoříme nyní následující analogii Penroseovy konstrukce: vezměme „pás“

$$U = K + \mathbb{E}^3 \subseteq \mathbb{E}^6 \tag{10.15}$$

kde K je jednotková krychle vymezená $\vec{\mathbf{x}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{x}}_6$. Vezměme nyní všechny trojrozměrné jednotkové krychle s vrcholy ve mřížce $\mathbb{Z}^6$ (všechny celočíselné kombinace $\vec{\mathbf{x}}_{1\ldots6}$), které leží celé v U, ortogonálně je promítněme do $\mathbb{E}^3$ (projekcí K je potom třicetistěn) a máme ohlášené pokrytí $\mathbb{E}^3$ rhomboidy dvou typů. Případnou detailnější diskusi přenecháme čtenářům.

Nakonec ještě připomeneme, že podobně, jako Penroseovo dláždění mělo pětičetnou symetrii, má nyní diskutované pokrytí trojrozměrné grupu symetrií stejnou jako dvacetistěn (nebo dvanáctistěn či třicetistěn, jde pořád o tutéž grupu).

<u>POZNÁMKA.</u> Důkaz „hlavní krystalografické věty“ je založen na následujícím pozorování (viz podrobněji [22]; jiný důkaz viz [6]). Proveďme ho jen pro stacionární grupu $\mathbb{H}$.

Nechť g generuje nějakou zmíněnou cyklickou podgrupu $\mathbb{C} = \mathbb{Z}_n$. Vezměme nějakou dlaždici D obsahující počátek a označme jako O sjednocení všech obrazů $g(D)$, $g \in \mathbb{C}$ této dlaždice. Periodičnost dláždění znamená, že lze najít dvourozměrnou mříž tvaru

$$M = \{mf_1 + nf_2 \,|\, m,n \in \mathbb{Z},\; f_1, f_2 \in \mathbb{R}^2\} \tag{10.16}$$

takovou, že každý posun dlaždic z O o vektor z M tvoří podmnožinu původního dláždění. Zkuste odůvodnit podrobněji![10]

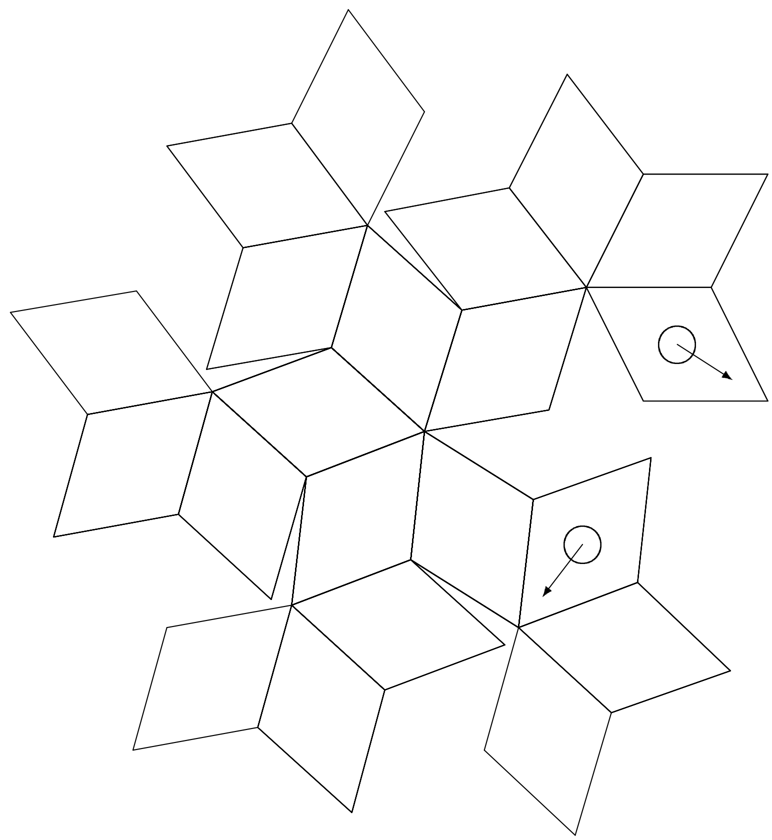
[10] Důkaz není těžký: jde v podstatě o tvrzení, že každá periodická diskrétní podmnožina $\mathbb{R}^2$ obsahující počátek má tvar mříže M uvedené v (10.16).

Takže libovolné otáčení $g \in \mathbb{C}$ přenáší mříž M na sebe, tudíž jeho matice vůči basi f_1, f_2 je tvořena celočíselnými prvky (příslušné sloupce udávají souřadnice vektorů $g(f_1), g(f_2)$). Speciálně stopa otočení g je celočíselná!

Zkonfrontujme to ale s faktem, známým z kapitoly Skalární součin (vztah (4.26)), že stopa otočení o úhel φ je rovna

$$\operatorname{Tr} g = 2\cos\varphi. \tag{10.17}$$

Tedy $2\cos\varphi$ musí být celé číslo, což dává uvedené hodnoty $\varphi = 2\pi/n$. (♡)



Na obrázku je část rozvinutého pláště pravidelného třicetistěnu. Připomeňme, že ostré úhly v kosočtvercích jsou rovny $\arccos 1/\sqrt{5} = \arctan 2$. „Vystřihněte“ naznačený plášť, spojte kruhové otvory (obě nakreslené šipky se budou překrývat) a nakreslete chybějící část povrchu třicetistěnu!

(Odpověď. Chybí pěticípá hvězda s náramkem, tedy 10 kosočtverců.)

Kapitola 11

Exponenciála matice

MOTTO. Jednoho dne kráčely funkce po Václavském náměstí. Najednou se před nimi objevila derivace a všechny funkce zašly plny strachu do musea, pouze sinus běhal periodicky dokola a tak ho derivace zkosila: byl z něho kosinus. Jedna funkce si dále vykračovala kolem svatého Václava.

„Ty se mě nebojíš?“ zeptala se derivace. „Ne, já jsem exponenciála,“ odpověděla exponenciála a zintegrovala derivaci.

O EXPONENCIÁLE. Zavedení veledůležitého pojmu **exponenciály** lze motivovat buď formálně matematicky – „hledáme nejjednodušší příklad spojité grupy matic“ (tím je právě $\{\exp(t\mathbf{A}) \mid t \in \mathbb{R}\}$) nebo fysikálně snahou řešit **vývojové** (nečesky **evoluční**) rovnice.

Mnoho úloh lze totiž formulovat ve tvaru rovnice $\dot{\vec{\mathbf{v}}} = \mathbf{A}\,\vec{\mathbf{v}}$, kde tečka značí derivování podle času, $\vec{\mathbf{v}}$ je z nějakého vektorového prostoru $\mathbb{V}$, na němž účinkuje lineární operátor $\mathbf{A}$, jejíž řešení je (pozor, překvapení) $\vec{\mathbf{v}}(t) = \exp(t\mathbf{A})\vec{\mathbf{v}}_0$. Takto lze zapsat soustavu n lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu (potom je $\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{A}$ je vhodná matice $n \times n$) a připustíme-li složitější (přesněji řečeno nekonečněrozměrné) prostory funkcí $\vec{\mathbf{v}}(t, x, y, z)$, lze do uvedeného schematu (zatím alespoň formálně) zařadit i známé rovnice vedení tepla

$$\frac{\partial}{\partial t}T = \kappa \Delta T \tag{11.1}$$

a Schrödingerovu rovnici

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(\vec{\mathbf{r}})\right)\psi \tag{11.2}$$

(Δ označuje jak známo Laplaceův operátor $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$).

Na to, abychom mohli psát řešení rovnice

$$\dot{\vec{\mathbf{v}}}(t) = \mathbf{A}\vec{\mathbf{v}}(t) \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{v}}(t) = \exp(t\mathbf{A})\vec{\mathbf{v}}_0 \tag{11.3}$$

pro nějaký konstantní počáteční vektor $\vec{\mathbf{v}}_0$ (okrajová podmínka), je třeba umět spočítat exponenciálu čtvercové matice, což bude matice stejných rozměrů.

<u>DEFINICE.</u> Zaveďme **exponenciálu** matice $\mathbf{A}$ jako limitu (pro $N \to \infty$) částečných součtů

$$\exp \mathbf{A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n}{n!}. \tag{11.4}$$

Abychom dokázali konvergenci, mluvme o **normě**

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{i,j}\{\left|a^i{}_j\right|\} \tag{11.5}$$

a o **metrice** na prostoru $\mathcal{M}_k$ všech matic typu $k \times k$

$$d(\mathbf{A}, \mathbf{A}') = \|\mathbf{A} - \mathbf{A}'\|. \tag{11.6}$$

<u>CVIČENÍ NA KONVERGENCI ŘAD, PRVÉ LEMMA.</u>

$$\|\mathbf{A}^n\| \leq k^{n-1}\|\mathbf{A}\|^n \tag{11.7}$$

Dokážeme matematickou indukcí: je-li $a^{n,i}_{\ \ j}$ prvek matice $\mathbf{A}^n$, je

$$\left|a^{n,i}_{\ \ j}\right| \leq \sum_{l=1}^{k} \left|a^i{}_l\right| \cdot \left|a^{n-1,l}_{\ \ \ \ j}\right| \leq k\|\mathbf{A}\| \cdot k^{n-2}\|\mathbf{A}\|^{n-1}; \tag{11.8}$$

pro $n = 1$ (začátek indukce) vztah dává $\|\mathbf{A}\| \leq \|\mathbf{A}\|$, čemuž uvěří mnohý.

<u>DALŠÍ LEMMA.</u> Je-li řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\mathbf{A}_n\| \tag{11.9}$$

konvergentní, konverguje i řada $\sum \mathbf{A}_n$ (na každém místě matice) a

$$\left\|\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}_n\right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|\mathbf{A}_n\|. \tag{11.10}$$

(Platí v libovolném „normovaném“ prostoru.)

<u>MILÝ DŮSLEDEK.</u>

$$\|\exp \mathbf{A}\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^{n-1}\,\|\mathbf{A}\|^n}{n!} = \frac{1}{k}\exp(k\,\|\mathbf{A}\|) \tag{11.11}$$

<u>VĚTA.</u> Je-li $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, tak platí i

$$\exp(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \exp \mathbf{A} \cdot \exp \mathbf{B} = \exp \mathbf{B} \cdot \exp \mathbf{A}. \tag{11.12}$$

<u>DŮKAZ.</u> *Bude užita*[1] *substituce* $m = p - n$. *Všimněte si, že poslední úprava (binomická formule) je možná jen proto, že* $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

$$\exp \mathbf{A} \cdot \exp \mathbf{B} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathbf{B}^m}{m!} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{0 \leq n \leq p} \frac{\mathbf{A}^n \cdot \mathbf{B}^{p-n}}{n!\,(p-n)!} = \tag{11.13}$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \left(\sum_{0 \leq n \leq p} \frac{p!}{n!\,(p-n)!} \mathbf{A}^n \cdot \mathbf{B}^{p-n} \right) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} (\mathbf{A} + \mathbf{B})^p \tag{11.14}$$

<u>DŮSLEDEK.</u> $\exp \mathbf{A}$ je vždy regulární; $(\exp \mathbf{A})^{-1} = \exp(-\mathbf{A})$.

<u>ZOBECNĚNÍ.</u> Vzorec pro exponenciálu součtu lze modifikovat i pro případ, že $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ navzájem nekomutují, ale

$$[\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] = [[\mathbf{A}, \mathbf{B}], \mathbf{B}] = 0 \tag{11.15}$$

oba komutují se svým **komutátorem** $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$ (což je například je-li $\mathbf{A}$ operátor souřadnice a $\mathbf{B}$ operátor derivace). Pak platí

$$\exp \mathbf{A} \cdot \exp \mathbf{B} = \exp(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \exp \frac{1}{2}[\mathbf{A}, \mathbf{B}]. \tag{11.16}$$

<u>CVIČENÍ.</u> Pokud $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ komutuje s $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$, potom

$$\exp(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \frac{1}{2}[\mathbf{A}, \mathbf{B}]) = \exp(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \exp(\frac{1}{2}[\mathbf{A}, \mathbf{B}]) \tag{11.17}$$

[1] Netřeba si dělat příliš starostí s mezemi sumací; lze sčítat přes všechna celá čísla, dohodneme-li se, že $1/k!$ je nula pro záporná celá k.

<u>Důkaz výše uvedeného zobecnění</u> se pohodlněji než roznásobováním řad provede následujícími operacemi:

Vyjádříme $\exp \mathbf{A}$ *a* $\exp \mathbf{B}$ *ve tvaru*

$$e^{\mathbf{A}} = \alpha^N + o(1), \quad e^{\mathbf{B}} = \beta^N + o(1), \tag{11.18}$$

kde $N \to \infty$ *je číslo jdoucí nade všechny meze a*

$$\alpha = \mathbf{1} + \frac{\mathbf{A}}{N}, \quad \beta = \mathbf{1} + \frac{\mathbf{B}}{N}. \tag{11.19}$$

Chceme najít souvislost mezi

$$\exp \mathbf{A} \cdot \exp \mathbf{B} = \alpha^N \beta^N + o(1) \tag{11.20}$$

a výrazem

$$\exp(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = (\alpha\beta)^N + o(1). \tag{11.21}$$

Budeme postupně přesouvat jednu betu za druhou nalevo (začneme s tou nalevo, názorná rovnice je pro $N = 5$*).*

$$\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\beta\beta\beta\beta\beta \to \alpha\beta\alpha\alpha\alpha\alpha\beta\beta\beta\beta \ldots \tag{11.22}$$

Vzhledem k platnosti (přesného) vztahu (K *je mezi* 0 *a* N*)*

$$\alpha^K \beta - \beta \alpha^K = K \alpha^{K-1} [\alpha, \beta] \tag{11.23}$$

(β *také komutuje s* $[\alpha, \beta]$, dokažte*) lze také psát*

$$\alpha^K \beta = \beta \alpha^K \left(\mathbf{1} + K[\alpha, \beta] + o(\frac{1}{N}) \right), \tag{11.24}$$

přičemž závorku lze přesouvat na konec výrazu (komutuje s α *i* β*). V konečném důsledku máme (první betou přeskakujeme* $N - 1$ *alef, druhou* $N - 2$ *alef atd.)*

$$\alpha^N \beta^N = (\alpha\beta)^N (\mathbf{1} + (N-1)[\alpha, \beta] + o(\frac{1}{N}))(\mathbf{1} + (N-2)[\alpha, \beta] + o(\frac{1}{N})) \ldots (\triangle) \tag{11.25}$$

Uvědomíme-li si, že

$$[\alpha, \beta] = \frac{1}{N^2} [\mathbf{A}, \mathbf{B}], \tag{11.26}$$

lze závorky ve (&) psát jako (odchylky $o(1/N)$ již nepíšeme, protože zřejmě po roznásobení dají $o(1)$)

$$(\mathbf{1} + \frac{N-1}{N^2}[\mathbf{A},\mathbf{B}])(\mathbf{1} + \frac{N-2}{N^2}[\mathbf{A},\mathbf{B}])\ldots, \tag{11.27}$$

což se dá se stejnou chybou psát jako

$$(\mathbf{1} + \frac{1}{N^2}[\mathbf{A},\mathbf{B}])^{(N-1)+(N-2)+(N-3)+\ldots}, \tag{11.28}$$

přičemž exponent má zde hodnotu $N^2/2 + o(N^2)$ a výraz se dá napsat jako

$$\exp(\frac{1}{2}[\mathbf{A},\mathbf{B}]), \tag{11.29}$$

čímž je formule dokázána.

VĚTA. Nechť $\mathbf{A}\vec{\mathbf{v}} = \lambda\vec{\mathbf{v}}$. Pak $(\exp\mathbf{A})\vec{\mathbf{v}} = e^\lambda\vec{\mathbf{v}}$.

DŮKAZ.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^n}{n!}\right)\vec{\mathbf{v}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n\vec{\mathbf{v}}}{n!} = e^\lambda\vec{\mathbf{v}} \tag{11.30}$$

VYUŽITÍ. Nechť vlastní vektory $\vec{\mathbf{v}}_{1\ldots k}$ tvoří basi uvažovaného vektorového prostoru $\mathbb{R}^k$. Předchozí věta dává návod k výpočtu $\exp\mathbf{A}$ v tomto případě: vůči této basi vlastních vektorů je totiž operátor

$$\{\vec{\mathbf{x}} \mapsto \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}\} \quad \text{resp.} \quad \{\vec{\mathbf{x}} \mapsto \exp\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}\} \tag{11.31}$$

vyjádřen diagonální maticí

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix} \quad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_k} \end{pmatrix}, \tag{11.32}$$

kde $\lambda_{1\ldots k}$ jsou vlastní čísla příslušející $\vec{\mathbf{v}}_{1\ldots k}$.

ZOBECNĚNÍ. Nechť $\mathbf{A} = \mathbf{CDC}^{-1}$. Pak

$$\exp\mathbf{A} = \mathbf{C}\cdot\exp\mathbf{D}\cdot\mathbf{C}^{-1}. \tag{11.33}$$

DŮKAZ.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{C}^{-1})^n}{n!} = \mathbf{C} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{D}^n}{n!} \mathbf{C}^{-1}. \tag{11.34}$$

<u>POZNÁMKA.</u> Vidíme, že exponenciála lineárního zobrazení f, definovaná samozřejmě jako

$$\exp f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n}{n!} \tag{11.35}$$

nezávisí na volbě base a je tedy dobře definovaná.

<u>PŘÍKLAD.</u> Matice $\mathbf{A}$ má vlastní čísla 1, 2, 3, je-li

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}. \tag{11.36}$$

Najdeme-li příslušné vlastní vektory

$$\mathbf{A}\vec{\mathbf{v}}_1 = \vec{\mathbf{v}}_1, \quad \mathbf{A}\vec{\mathbf{v}}_2 = 2\vec{\mathbf{v}}_2, \quad \mathbf{A}\vec{\mathbf{v}}_3 = 3\vec{\mathbf{v}}_3, \tag{11.37}$$

platí

$$\exp \mathbf{A}\vec{\mathbf{v}}_1 = e\vec{\mathbf{v}}_1, \quad \exp \mathbf{A}\vec{\mathbf{v}}_2 = e^2\vec{\mathbf{v}}_2, \quad \exp \mathbf{A}\vec{\mathbf{v}}_3 = e^3\vec{\mathbf{v}}_3, \tag{11.38}$$

jinými slovy

$$\mathbf{A} = \mathbf{C} \begin{pmatrix} 1 & \circ & \circ \\ \circ & 2 & \circ \\ \circ & \circ & 3 \end{pmatrix} \mathbf{C}^{-1}, \quad \exp \mathbf{A} = \mathbf{C} \begin{pmatrix} e & \circ & \circ \\ \circ & e^2 & \circ \\ \circ & \circ & e^3 \end{pmatrix} \mathbf{C}^{-1}, \tag{11.39}$$

kde matice $\mathbf{C}$ má ve sloupcích souřadnice vlastních vektorů. Proveďte podrobně.

<u>CVIČENÍ.</u> Dokažte, že exponenciála cirkulantu je cirkulant. Obecněji, jakákoliv funkce daná konečnou či nekonečnou mocninnou řadou, kde proměnná je cyklickou záměnou souřadnic, je „cirkulantem“ (konvolučním operátorem ve smyslu kapitoly (16.7)).

<u>CVIČENÍ.</u> Spočtěte derivaci maticové funkce $\exp(t\mathbf{A})$ podle proměnné t. (Výsledek vypadá stejně jako pro číselné $\mathbf{A}$.)

CVIČENÍ. Dokažte následující formuli pro výpočet inversní matice: Jsou-li reálné části vlastních čísel matice $\mathbf{A}$ kladné, tak platí

$$\mathbf{A}^{-1} = \int_0^\infty \exp(-t\mathbf{A})dt \tag{11.40}$$

NÁVOD. Aplikujte matici $\mathbf{A}$ na integrál napravo a zaměňte pořadí aplikace integrálu a matice $\mathbf{A}$; to dává integrál z derivace. Použitím Newton-Leibnizovy formule (výše uvedený předpoklad o vlastních číslech zajišťuje exponenciálně rychlé ubývání integrandu!) dostaneme hledaný výsledek.

Všimněte si, že tato formule je spojitou analogií výpočtu $(\mathbf{1}-\mathbf{A})^{-1}$ pomocí nekonečné geometrické řady $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}^n$.

Poznamenejme, že výše uvedená formule je často používána, třeba v teorii pravděpodobnosti při zkoumání Brownova pohybu nebo kupříkladu při výpočtech propagátorů pomocí Feynmanova integrálu v kvantové teorii. ($\mathbf{A}$ pak označuje ve většině případů Laplaceův operátor).

11.1 Aplikace na soustavu diferenciálních rovnic

Soustava lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty typu

$$\dot{\vec{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}, \quad \vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \tag{11.41}$$

nebo ve složkách

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= a^1{}_1 x^1 + \ldots + a^1{}_n x^n \\ &\vdots \\ \dot{x}^n &= a^n{}_1 x^1 + \ldots + a^n{}_n x^n \end{aligned} \tag{11.42}$$

má řešení

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = \exp(t\mathbf{A})\vec{\mathbf{x}}_0, \tag{11.43}$$

kde $\vec{\mathbf{x}}_0 = (x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n)^T$ (správně pod sebou) je sloupec počátečních podmínek v čase t=0: $\vec{\mathbf{x}}(0) = \vec{\mathbf{x}}_0$.

Podrobnější diskusi výpočtu $\exp \mathbf{A}$ odložíme na konec kapitoly o Jordanově tvaru matice.

11.2 Heisenbergův obraz

V této podsekci vás pouze informujeme, že operátorová rovnice

$$\mathbf{L}'(t) = [\mathbf{L}(t), \mathbf{I}] \tag{11.44}$$

$$\text{má řešení} \quad \mathbf{L}(t) = \exp(-t\mathbf{I})\mathbf{L}(0)\exp(t\mathbf{I}), \tag{11.45}$$

o čemž se lehce přesvědčíte, umíte-li derivovat součin operátorů.

Uvedené zobrazení $f(t) : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ na prostoru matic

$$\mathbf{K} \mapsto \exp(-t\mathbf{I})\mathbf{K}\exp(t\mathbf{I}) \tag{11.46}$$

je exponenciálou t-násobku jiného zobrazení $g : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$

$$f = \exp tg, \quad g : \mathbf{K} \mapsto [\mathbf{K}, \mathbf{I}]. \tag{11.47}$$

Nadpis je volen podle pojmu v kvantové mechanice, kterou lze (kromě Schrödingerova pojetí s proměnným stavovým vektorem a konstantními operátory) formulovat ekvivalentně v jazyce Heisenberga: stavový vektor je konstantní a operátory se vyvíjejí podle

$$i\hbar \frac{d}{dt}\mathbf{L}(t) = [\mathbf{L}, \mathbf{H}] \tag{11.48}$$

s týmž hamiltoniánem, jako u Schrödingera. (Naše $\mathbf{I}$ bylo $\mathbf{H}/i\hbar$.)

<u>Záměna exponenciál.</u> Nedávno jsme ukázali, že pokud $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ komutují se svým komutátorem, platí

$$\exp \mathbf{A} \exp \mathbf{B} = \exp(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \exp \frac{1}{2}[\mathbf{A}, \mathbf{B}]. \tag{11.49}$$

Pouhým dosazením z této rovnice ověříte, že za daných předpokladů platí

$$\exp(\mathbf{A}) \exp(\mathbf{B}) \exp(-\mathbf{A}) \exp(-\mathbf{B}) = \exp[\mathbf{A}, \mathbf{B}]. \tag{11.50}$$

Tento vzorec má celkem jednoduché zobecnění i v obecném případě, tj. aniž předpokládáme cokoli o komutátorech:

$$e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}} e^{-\mathbf{A}} = \exp(\mathbf{B} + \frac{1}{1!}[\mathbf{A}, \mathbf{B}] + \frac{1}{2!}[\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] + \frac{1}{3!}[\mathbf{A}, [\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]]] + \ldots). \tag{11.51}$$

Vzorec lehce dokážete, uvědomíte-li si, že v závorce na pravé straně je matice přiřazená matici $\mathbf{B}$ exponenciálou zobrazení „komutátor matice $\mathbf{A}$ s danou maticí“, pro které jsme právě našli explicitní vyjádření

$$\exp([\mathbf{A},\ldots])(\mathbf{B}) = \exp(\mathbf{A})\mathbf{B}\exp(-\mathbf{A}), \tag{11.52}$$

pomocí něhož dokazované tvrzení převedeme na

$$\exp(\mathbf{A})\exp(\mathbf{B})\exp(-\mathbf{A}) = \exp(\exp(\mathbf{A})\mathbf{B}\exp(-\mathbf{A})), \tag{11.53}$$

což je vzorec nám známější v označení $\mathbf{C} = \exp\mathbf{A}$ tj. $\mathbf{C}^{-1} = \exp(-\mathbf{A})$

$$\mathbf{C}(\exp\mathbf{B})\mathbf{C}^{-1} = \exp(\mathbf{CBC}^{-1}) \tag{11.54}$$

a tento vzorec užíváme k výpočtu exponenciály matice $\mathbf{M}$ vyjádřené jako $\mathbf{CBC}^{-1}$ s podobnou maticí $\mathbf{B}$ (pokud možno v Jordanově tvaru). (Je pravdivý proto, že při rozpisu pravé strany do řady se vykrátí všechny vnitřní páry $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}$ a zbudou jen ty vnější.)

11.3 Vztah stopy a determinantu

$$\det\exp\mathbf{A} = \exp\operatorname{Tr}\mathbf{A}. \tag{11.55}$$

<u>Krásné tvrzení, není-liž pravda?</u>

<u>Hlavní pozorování.</u> $\det\exp(t\mathbf{A}) = 1 + t\operatorname{Tr}\mathbf{A} + o(t), \quad t\to 0,$

$$\text{obecněji}\quad \det(\mathbf{1} + t\mathbf{A} + \mathbf{o}(t)) = 1 + t\operatorname{Tr}\mathbf{A} + o(t). \tag{11.56}$$

(Symbol $\mathbf{o}(t)$ označuje matici, jejíž všechny prvky jsou $o(t)$, to jest nějaké funkce takové, že platí následující vztah.)

$$\lim_{t\to 0}\frac{o(t)}{t} = 0 \tag{11.57}$$

<u>Důkaz lemmatu.</u> Sami jistě ověříte $\exp(t\mathbf{A}) = \mathbf{1} + t\mathbf{A} + \mathbf{o}(t)$. Dále si uvědomíme, že neidentické permutace přispějí k determinantu polynomem, z něhož lze vytknout t^2, abychom provedli tyto úpravy:

$$\det(\mathbf{1} + t\mathbf{A} + \mathbf{o}(t)) = \sum_\pi \operatorname{znak}\pi \prod_{j=1}^n \left(\delta^{\pi(j)}_j + ta^{\pi(j)}_j + o^{\pi(j)}_j(t)\right) = \tag{11.58}$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \left(1 + ta^j_{\ j} + o^j_{\ j}(t)\right) + t^2 \cdot \text{jakýsi polynom} = 1 + t\ \mathrm{Tr}\,\mathbf{A} + o(t). \quad (11.59)$$

<u>DŮKAZ VĚTY NYNÍ DOKONČÍME DVĚMA ZPŮSOBY.</u>

- $\det\exp\mathbf{A} = (\det\exp(\mathbf{A}/N))^N = (1+\mathrm{Tr}\,\mathbf{A}/N+o(1/N))^N \to \exp\mathrm{Tr}\,\mathbf{A}$, $N \to \infty$
- Označme $f(t) = \det\exp t\mathbf{A}$. Platí zřejmě

$$f'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\det\exp(t+h)\mathbf{A} - \det\exp t\mathbf{A}}{h} = \quad (11.60)$$

$$= \det\exp t\mathbf{A} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\det\exp h\mathbf{A} - 1}{h} = \quad (11.61)$$

$$= \det\exp t\mathbf{A} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{h\ \mathrm{Tr}\,\mathbf{A} + o(h)}{h} = \mathrm{Tr}\,\mathbf{A} \cdot f(t). \quad (11.62)$$

A jsme u cíle, neboť tato diferenciální rovnice

$$f'(t) = \mathrm{Tr}\,\mathbf{A}\ f(t) \quad (11.63)$$

má řešení

$$f(t) = \exp t\ \mathrm{Tr}\,\mathbf{A}c, \quad c = f(0) = 1. \quad (11.64)$$

<u>CVIČENÍ.</u> Dokažte formuli

$$\ln\det(\mathbf{1} - \mathbf{A}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mathrm{Tr}\,\mathbf{A}^n. \quad (11.65)$$

<u>NÁVOD.</u> Pište $\mathbf{1}-\mathbf{A} = \exp\mathbf{B}$ a nahlédněte do odstavce logaritmus matice níže.

<u>POZNÁMKA.</u> Na nekonečněrozměrných prostorech se často obtížně sčítá přes všechny permutace, a tak je vztah

$$\det\exp\mathbf{A} = \exp\mathrm{Tr}\,\mathbf{A} \quad (11.66)$$

nadějnějším kandidátem pro definici determinantu, alespoň pro některé matice; stopa se počítá i v nekonečné dimensi jednodušeji. Verse uvedená ve cvičení je zvlášť často používána, nověji třeba v teorii chaosu.

Náhrada komplexního čísla maticí

Opravdu, množina komplexních čísel je isomorfní množině matic 2×2 níže uvedeného tvaru:

$$a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \tag{11.67}$$

Ověřte, že jde o isomorfismus; zejména, že obraz součinu dvou komplexních čísel je (maticový) součin obrazů těchto čísel.

Pomocí našeho vztahu determinantu a stopy lze dokázat i tuto větu.

<u>Věta.</u> Nechť $\mathbf{C}^{II}$ označuje „zrealisovanou" matici $2n \times 2n$, která vznikne z komplexní matice $\mathbf{C}$ rozměru $n \times n$ uvedenou náhradou. Potom

$$\det \mathbf{C}^{II} = |\det \mathbf{C}|^2 . \tag{11.68}$$

Všimněte si, že zrealisováním matice hermitovsky sdružené k $\mathbf{C}$ dostanete matici transponovanou vůči zrealisování $\mathbf{C}$:

$$(\mathbf{C}^*)^{II} = (\mathbf{C}^{II})^T . \tag{11.69}$$

<u>Důkaz.</u> Vyjádříme-li matici $\mathbf{C}$ jako $\mathbf{C} = \exp \mathbf{L}$, lze psát (díky isomorfnosti)

$$\mathbf{C}^{II} = \exp \mathbf{L}^{II} . \tag{11.70}$$

Nyní už jen stačí dopočítat

$$\det \exp \mathbf{L}^{II} = \exp \operatorname{Tr} \mathbf{L}^{II} = \exp(2 \Re \operatorname{Tr} \mathbf{L}) = \tag{11.71}$$

$$= \exp(\operatorname{Tr} \mathbf{L}) \cdot \exp \overline{(\operatorname{Tr} \mathbf{L})} = \det \exp \mathbf{L} \cdot \overline{(\det \exp \mathbf{L})} . \tag{11.72}$$

11.4 Taylorův vzorec

Nechť p je polynom. Známý Taylorův vzorec můžeme psát

$$p(x+t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^{(n)}(x)}{n!} t^n \tag{11.73}$$

(suma je ve skutečnosti konečná, je-li p polynom; volíme prostor polynomů nikoli proto, že by to byla nejpřirozenější možná volba, ale proto, že chceme zůstat na půdě konečněrozměrných prostorů, kde lze vše formulovat rigorosně velmi snadno). Značíme-li obvyklým $\frac{d}{dx}$ operátor derivování (na vhodném prostoru polynomů) a symbolem $\hat{P}_t$ translaci (tamtéž)

$$\left[\hat{P}_t p\right](x) := p(x+t), \tag{11.74}$$

lze psát vzorec jako

$$\hat{P}_t = \exp(t\frac{d}{dx}). \tag{11.75}$$

V sekci o Lieových algebrách budeme mluvit o derivaci jako o basi **infinitesimálního generátoru** grupy všech posunutí.

Teprve teď vidíme, jak se kriminalita dramatisuje; exponenciála derivaci na Václavském náměstí nezintegrovala, nýbrž pouze odsunula.

11.5 Poissonovo rozdělení

($\sharp$) Studujme model porodnosti v Praze (stejně tak ale lze mluvit o dopravních nehodách, překlepech písařky, počtech částic kosmického záření zaznamenaných přístrojem atd.), kdy se za čas t narodí průměrně αt dětí;[2] jednotlivá narození jsou nezávislými jevy.

Začněme se znalostí pravděpodobností f_n, že do času $t = 0$ už bylo narozeno n dětí, je tedy známa nějaká posloupnost $\{f_n, n \in \mathbb{Z}\}$, kterou můžeme normovat vztahem $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n = 1$. Podobně pravděpodobnost, že v čase t bylo narozeno n dětí, pišme jako $f_n(t)$. Mluvíme tedy o prostoru posloupností a operátorech na něm.

Chceme-li spočítat pravděpodobnost $f_n(t+dt)$, že do času $t+dt$ bude již narozeno n dětí, dostaneme ji jako součet pravděpodobností, že do času t bylo narozeno $n-1$ dětí ($f_{n-1}(t)$) a v době $(t, t+dt)$ se dítě narodilo (αdt) a že do času t bylo narozeno n dětí ($f_n(t)$) a v intervalu $(t, t+dt)$ se nic nenarodilo ($1-\alpha dt$). Je-li čas dt krátký, lze totiž zanedbat možnost, že se může narodit více dětí než jedno. Požadavek, že průměrně se za t narodí αt dětí, se transformuje na pravděpodobnost αdt, že se nějaké narodí za čas dt. Máme tedy

$$f_n(t+dt) = f_n(t)(1-\alpha dt) + f_{n-1}(t)\alpha dt \tag{11.76}$$

nebo v matematičtějším hávu

$$f_n'(t) = -\alpha(f_n(t) - f_{n-1}(t)). \tag{11.77}$$

[2] Kdo sleduje jen matematické úvahy, nechť si myslí pod α všude jednotku.

Zavedením operátoru diference $\hat{D}$ tentokrát jako

$$[\hat{D}f]_n = f_n - f_{n-1} \tag{11.78}$$

přepíšeme rovnici jako

$$\vec{\mathbf{f}}'(t) = -\alpha\hat{D}\vec{\mathbf{f}}(t) \tag{11.79}$$

a řešení pomocí exponenciály

$$\vec{\mathbf{f}}(t) = \exp(-\alpha\hat{D}t)\vec{\mathbf{f}} \tag{11.80}$$

nabude konkrétního tvaru

$$f_n(t) = e^{-\alpha t}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\alpha^m t^m}{m!}f_{n-m}. \tag{11.81}$$

Navíc, pro počáteční stav $f_n = \delta_{n0}$ dostáváme přímo **Poissonovo rozdělení**

$$f_n(t) = e^{-\alpha t}\frac{\alpha^n t^n}{n!}. \tag{11.82}$$

<u>Důkaz.</u> *V čase $t = 0$ je $f_n(t) = f_n$, stačí tedy ověřit, že zadané $f_n(t)$ splňuje diferenciální rovnici výše. Opravdu, obě strany se rovnají:*

$$f_n'(t) = -\alpha\cdot e^{-\alpha t}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha^m t^m}{m!} - \frac{\alpha^{m-1}t^{m-1}}{(m-1)!}\right)f_{n-m} \tag{11.83}$$

$$[-\alpha\hat{D}f(t)]_n = -\alpha\cdot e^{-\alpha t}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\alpha^m t^m}{m!}(f_{n-m} - f_{n-m-1}) \tag{11.84}$$

<u>Cvičení.</u> Ukažte, že

$$\forall t \quad \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) = 1 \quad \text{pro} \quad p_n(t) = e^{-\alpha t}\frac{\alpha^n t^n}{n!}. \tag{11.85}$$

Mimo jiné, platí i rovnost

$$\forall n \quad \int_0^{\infty} \alpha\cdot dt\cdot p_n(t) = 1. \tag{11.86}$$

Gauss by po nás mohl hodit houbu, kdybychom se v této souvislosti nezmínili také o Gaussově normálním rozdělení.

11.6 Gaussova křivka

Řešíme-li rovnici[3] vedení tepla (místo laplaciánu píšeme jen druhou derivaci podle x)

$$\frac{\partial}{\partial t}T = \frac{\kappa}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2}T, \tag{11.87}$$

dostaneme řešení (v $t > 0$) pro danou počáteční podmínku $T(0, x')$ ve tvaru

$$T(t,x) = \frac{1}{\sqrt{\pi\kappa t}}\int_{-\infty}^{\infty} dx' \exp(-\frac{(x-x')^2}{\kappa t})T(0,x'). \tag{11.88}$$

Je také vidět, že není možné hledat teplotu v záporných časech; souvisí to s tím, že zatímco růstem času se teplota „zahlazuje", jeho poklesem by se „rozrůzňovala" do neúnosných mezí. Někdo možná již cosi slyšel o **ireversibilitě** rovnice vedení tepla.

Můžeme se také podívat (pro změnu opět zcela rigorosně) na diskrétní odnož druhé derivace: prozkoumejme operátor Δ na prostoru posloupností

$$(\Delta f)_n = f_{n-1} + f_{n+1} - 2f_n. \tag{11.89}$$

Operátor Δ lze tedy psát jako

$$\hat{T}^1 + \hat{T}^{-1} - 2\cdot\mathbf{1} = \hat{T}^{-1}\hat{D}^2, \tag{11.90}$$

kde $\hat{D}$ je operátor prvé diference

$$\hat{D} = \hat{T}^1 - \mathbf{1}, \quad [\hat{D}f]_n = f_{n+1} - f_n. \tag{11.91}$$

Exponenciálu t-násobku tohoto operátoru analyzuje následující věta.

Věta. Nechť $\hat{T}^k$ označuje operátor posunutí (posloupnosti) o k, tzn. $(\hat{T}^k f)_n = f_{n+k}$. Potom platí vztah

$$\exp t\Delta = \sum_{k\in\mathbb{Z}} F_k(t)\hat{T}^k, \tag{11.92}$$

kde posloupnost F s časově proměnnými prvky $F_k(t)$ řeší diferenciální rovnici

$$F'(t) = \Delta F(t) \tag{11.93}$$

při počáteční podmínce $F_k(0) = \delta_{k0}$.

[3] Pod κ si opět můžete představit nějaké kladné číslo, třeba 1 nebo 4.

<u>DŮKAZ.</u> *Z platnosti diferenciální rovnice vyplývá*

$$\frac{d}{dt}\exp t\Delta = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\Delta F(t))_k \hat{T}^k = \Delta \sum_{k\in\mathbb{Z}} F_k(t)\hat{T}^k \tag{11.94}$$

a v posledním tvaru lze také přesunout Δ za sumu, protože komutuje s každým $\hat{T}^k$. Vidíme, že derivace (levá strana) vyšla tak, jak měla.

11.7 Logaritmus matice

Hledáme matici $\mathbf{A}$ splňující

$$\exp \mathbf{A} = \mathbf{B} \tag{11.95}$$

pro danou regulární matici $\mathbf{B}$. Omezíme se na případ, kdy se $\mathbf{B}$ dosti málo liší od $\mathbf{1}$; v ostatních případech vyjádříme $\mathbf{B} = \mathbf{B}'^n$ s dostatečně velkým n a bude $\ln \mathbf{B} = n \ln \mathbf{B}'$.

Abychom to mohli provést, měli bychom ještě vysvětlit, jak spočítat n-tou odmocninu z $\mathbf{B}$, ale to ponechme na jindy.

Krátce řečeno, logaritmus matice $\mathbf{B}$ získáme pomocí Taylorovského vztahu pro logaritmus čísla

$$\ln(1+y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{n+1}}{n+1}. \tag{11.96}$$

Za y totiž dosadíme $\mathbf{C} = \mathbf{B} - \mathbf{1}$.

Co se týče konvergence, pocvičte se z analýzy: je-li pro $0 < q < 1$

$$\|\mathbf{C}\| < \frac{q}{k}, \quad \text{je také} \quad \|\mathbf{C}^n\| < \frac{q^n}{k} \le q^n \tag{11.97}$$

a tudíž je řada pro logaritmus absolutně konvergentní ve smyslu

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\mathbf{C}^{n+1}}{n+1} \right\| \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n+1}}{n+1} \le \ln(\frac{1}{1-q}) \tag{11.98}$$

a dosadíme-li za $\mathbf{A}$ hodnotu

$$\mathbf{A} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\mathbf{C}^n}{n+1}, \tag{11.99}$$

pak platí $\exp \mathbf{A} = \mathbf{1} + \mathbf{C} = \mathbf{B}$.

Protože dobře víme, že pro čísla udávají řady dvě navzájem inversní funkce, musí vyjít rovnost dosazením řad do sebe, ale poněvadž pro výpočty při dosazování řad matic do sebe platí zcela stejná pravidla jako pro řady číselné, vyjde uvedený vztah i pro matice.

V blízkém okolí autorů neumí nikdo dokázat inversní charakter obou řad přímým dosazením jedné do druhé, problém však vyřešil Jan Vybíral v Obrázcích žlutých růží č.18.

PŘÍKLADY.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin \exp \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) \tag{11.100}$$

Nepatří proto, že mají nekladná vlastní čísla (druhá z matic je dokonce singulární).

11.8 Hamiltonovy rovnice pro oscilátor

Z mechaniky už možná znáte Hamiltonovy rovnice pro soustavu hmotných bodů ve tvaru

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \tag{11.101}$$

kde $p_i, q_i \in \mathbb{R}; \quad i = 1, \ldots, n$.

Vyšetříme zde případ, kdy hamiltonián $H(p,q)$ je *kvadratickou funkcí* proměnných q („souřadnice“) a p („impuls“). Jde o tzv. harmonický oscilátor (přesněji o soustavu spřažených oscilátorů – představujte si třeba soustavu hmotných bodů všelijak propojených nehmotnými pružinami). Případ nekvadratického hamiltoniánu vede již mimo lineární algebru (do geometrie – viz také učebnice mechaniky či třeba knihu autorů DFN[6]).

Předpokládáme tedy Hamiltonovu funkci ve tvaru

$$H(p,q) = \sum b_{ij} q^i q^j + c_{ij} q^i p^j + d_{ij} p^i p^j, \tag{11.102}$$

kde $\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ jsou nějaké matice, přičemž můžeme předpokládat symetrii matic $\mathbf{B}$ a $\mathbf{D}$ (nakoukni do úvodu ke kapitole Kvadratické formy). Potom lze rovnice nahoře napsat ve tvaru

$$\dot{\vec{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\ \vec{\mathbf{x}}, \tag{11.103}$$

kde $x = (q, p)$ a matice $\mathbf{A}$ je dána vztahem

$$\mathbf{A} = 2 \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ -\mathbf{B} & -\mathbf{C}^T \end{pmatrix}, \tag{11.104}$$

neboli splňuje vztah (ověřte, procvičte se trochu v násobení matic!)

$$\mathbf{AK} \ = -\mathbf{KA}^T, \quad \text{kde} \quad \mathbf{K} \ = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{11.105}$$

tzn. $\mathbf{AK}$ je symetrická matice. Matice $\mathbf{M} = \exp \mathbf{A}$ (obecněji $\exp(t\mathbf{A})$ je potom **symplektická matice** (viz příklady grup na závěr zimního semestru a též následující kapitolu), což ukážeme takto: vztah

$$\mathbf{AK} \ = -\mathbf{KA}^T \tag{11.106}$$

přepíšeme jako

$$-\mathbf{A} \ = \mathbf{KA}^T\mathbf{K}^{-1}. \tag{11.107}$$

Vezmeme exponenciálu

$$\exp(-\mathbf{A}) = \mathbf{K} \exp(\mathbf{A}^T)\mathbf{K}^{-1}, \tag{11.108}$$

vynásobíme to maticí $\mathbf{M}$ zleva, pak maticí $\mathbf{K}$ zprava a vskutku dostáváme požadovaný vztah

$$\mathbf{MKM}^T = \mathbf{K}. \tag{11.109}$$

Jednoparametrická symplektická grupa $\exp(t\mathbf{A})$ tedy popisuje vývoj oscilátoru v čase.

V typické aplikaci je $\mathbf{C} = \mathbf{0}$, $\mathbf{D} = \mathbf{1}$ a $\mathbf{B}$ je positivně definitní matice (nakoukni do kapitoly o kvadratických formách ohledně positivní definitnosti). Není pak těžké ukázat, že všechna vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ jsou *ryze imaginární* (neboť vlastní čísla matice $-\mathbf{B}$ a tedy i $\mathbf{A}^2$ jsou negativní!). Dostáváme potom tzv. **kvasiperiodický** pohyb (periodický v případě jednoho hmotného bodu), kde jednotlivé frekvence jsou dány příslušnými vlastními čísly matice $\mathbf{B}$. Podrobnější informaci viz učebnice mechaniky. (♡)

Úloha 1.

- a) Zjednodušte předchozí postup pro případ, kdy $\mathbf{D} = \mathbf{1}$. (Což je i případ následující úlohy, bereme-li kartézské souřadnice.)
- b) Modifikujte předchozí postup pro případ, kdy hamiltonián obsahuje i lineární člen (v proměnné x, jako v další úloze)

Úloha 2. Závaží visí u stropu místnosti připevněno k němu n gumičkami (či pružinkami), kde $n = 1, 2, \dots$ Další provázek vede od závaží k osobě u podlahy, která se zatáhnutím za provázek snaží závaží *periodicky* rozhýbat. Z kolika míst na podlaze resp. stěně se jí to může podařit? `Závisí tento počet na` n? Spočtěte příslušné periody a určete příslušná místa.

Úlohu lze zobecnit i pro více závaží a provázků (a osob).

Kapitola 12

Lieova algebra

Místo složitých objektů, jakými jsou grupy $\mathbb{SU}(n)$ a další, je možné zkoumat objekty jednodušší, totiž lineární, nezajímáme-li se právě o rozdíly mezi $\mathbb{O}(n,\mathbb{R})$ a $\mathbb{SO}(n,\mathbb{R})$: druhá z nich je **souvislá**, lze se plynule dostat od jednoho jejího prvku ke kterémukoli jinému, první z nich je nesouvislá, skládá se ze dvou oddělených **komponent** (zrcadlící a nezrcadlící transformace).

<u>Definice.</u> Lineární prostor $\mathfrak{g}$, na němž je definována další bilineární operace $[A,B]$, dále zvaná **komutátor**, splňující vztahy

$$[A,B]=-[B,A],\quad [A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]]=0 \tag{12.1}$$

(druhému se říká **Jacobiho identita**) nazveme **Lieovou algebrou**.

<u>Úkol.</u> Ukažte, že v Lieově algebře matic s komutátorem definovaným jako $[A,B]=AB-BA$ je splněna (kromě triviálního vztahu $[A,B]=-[B,A]$) také Jacobiho rovnost.

<u>Příklad.</u> Zkoumejme Lieovu algebru, které říkejme $\mathfrak{so}_3$, jejíž prvky pišme jako antisymetrické matice s obvyklým komutátorem

$$A=\begin{pmatrix} \circ & -c & b \\ c & \circ & -a \\ -b & a & \circ \end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} \circ & -f & e \\ f & \circ & -d \\ -e & d & \circ \end{pmatrix}. \tag{12.2}$$

Ověřte podrobněji, že

$$[A,B]:=AB-BA=\begin{pmatrix} \circ & bd-ae & cd-af \\ ae-bd & \circ & ce-bf \\ af-cd & bf-ce & \circ \end{pmatrix}. \tag{12.3}$$

Vzpomeneme-li si nyní na definici vektorového součinu $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$, najdeme zajímavý isomorfismus

$$\left\{ (a,b,c) \mapsto \begin{pmatrix} \circ & -c & b \\ c & \circ & -a \\ -b & a & \circ \end{pmatrix} \right\} : (\mathbb{R}^3, +, \times) \to (\mathfrak{so}_3, +, [,]). \qquad (12.4)$$

Znáte Jacobiho totožnost (identita) pro vektorový součin?

Je vidět role dimense (3) na hladký průběh. Lze samozřejmě mluvit i kupř. o šestirozměrném prostoru antisymetrických matic 4×4, ale přec jen již nebude isomorfní $\mathbb{R}^4$ $(4 \neq 6)$. V řeči funkcionální analýzy je možné dát doslovný smysl komutátoru dvou matic i vektorovému součinu vektoru nabla $(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ s vektorem $\vec{\mathbf{v}} = (v_x, v_y, v_z)$, čemuž říkáme **rotace vektoru**, pouze však s použitím nekonečnědimensionálních prostorů.

Podívejme se na pár daších příkladů Lieových algeber a začněme přemýšlet o jejich vazbách na stejnojmenné Lieovy grupy.

- $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}/\mathbb{C}) = \{$reálné/komplexní matice $n \times n\}$
- $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}/\mathbb{C}) = \{\mathbf{A} \in \mathfrak{gl} \,|\, \mathrm{Tr}\,\mathbf{A} = 0\}$
- $\mathfrak{o}(n, \mathbb{R}/\mathbb{C}) = \mathfrak{so}(n, \mathbb{R}/\mathbb{C}) = \{\mathbf{A} \in \mathfrak{gl} \,|\, \mathbf{A} = -\mathbf{A}^T\}$
- $\mathfrak{u}(n) = \{\mathbf{A} \in \mathfrak{gl}(\mathbb{C}) \,|\, \mathbf{A} = -\mathbf{A}^*\}$
- $\mathfrak{su}(n) = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \cap \mathfrak{u}(n)$
- $\mathfrak{sp}(n) = \{\mathbf{A} \in \mathfrak{u}(n) \,|\, (\mathbf{Ak}) = (\mathbf{Ak})^T\}$ v případě sudého n; $\mathbf{k}$ je zde nějaká antisymetrická regulární matice $n \times n$
- $\mathfrak{so}(m, n) = \{\mathbf{A} \in \mathfrak{gl}(m+n, \mathbb{R}) \,|\, \mathbf{AG} = -(\mathbf{AG})^T\}$, $\mathbf{G}$ je diagonální matice obsahující m jednotek a n minus jednotek

<u>VĚTA.</u> Uvedené lineární prostory jsou uzavřené na operaci komutování.

<u>DŮKAZ.</u> Tedy přesvědčte nejen sebe, ale i své nevěřící kamarády, že platí např. implikace

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T, \mathbf{B} = -\mathbf{B}^T \Rightarrow [\mathbf{A}, \mathbf{B}] := \mathbf{AB} - \mathbf{BA} = -[\mathbf{A}, \mathbf{B}]^T. \qquad (12.5)$$

<u>POJEM.</u> ($\sharp$) Nechť $\mathbb{G}$ je grupa matic. **Infinitesimálním generátorem** grupy $\mathbb{G}$ nazveme množinu[1] $\mathfrak{g} = \mathfrak{L}(\mathbb{G})$ matic $\mathbf{A}$, pro něž

$$\{\exp t\mathbf{A} \,|\, t \in \mathbb{R}\} \quad \text{je podgrupou} \quad \mathbb{G}. \tag{12.6}$$

<u>POZNÁMKA.</u> V pokročilejších kursech geometrie se $\mathfrak{g}$ obvykle definuje abstraktněji jako „tečný prostor ke $\mathbb{G}$ v $\mathbf{1}$" v prostoru všech matic: prvky grupy, které mají infinitesimálně blízko k jednotkové matici, se dají napsat jako ($\mathbf{g}_i$ je base generátoru)

$$\mathbf{1} + \sum_i \mathbf{g}_i \cdot d\lambda^i. \tag{12.7}$$

<u>SOUVISLOST.</u> Vtip je v tom, že infinitesimální generátor grupy matic $\mathbb{G}$ je Lieova algebra (a v uváděných případech právě ta stejnojmenná, psaná švabachem, gotickým písmem neboli německou frakturou) a že lze navíc dobře vyložit roli komutátoru.

<u>DŮKAZ PRO OBECNOU GRUPU.</u> *Je třeba ukázat dvě zásadní věci: uzavřenost na sčítání a komutování.*

- $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{g} \;\Rightarrow\; \mathbf{A} + \mathbf{B} \in \mathfrak{g}$ *(není triviální!)*
- $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{g} \;\Rightarrow\; [\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA} \in \mathfrak{g}$

1. *Zkoumejme výrazy typu ($N \to \infty$)*

$$(\exp \frac{t\mathbf{A}}{N} \cdot \exp \frac{t\mathbf{B}}{N})^N = (\mathbf{1} + t\frac{\mathbf{A}+\mathbf{B}}{N} + o(\frac{1}{N}))^N \to \exp t(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \tag{12.8}$$

a uvědomme si, že $\{\exp t(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ tedy je podgrupa $\mathbb{G}$, poněvadž pro každé t jde exponenciála aproximovat s libovolnou přesností (pomocí dostatečně velkého N) součinem prvků typu $\exp t\mathbf{A}/N$, které leží (přesně) v $\mathbb{G}$ (a předpokládáme cosi jako uzavřenost grupy v obvyklé topologii dané např. metrikou $d(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sup_{i,j} \left| a^i{}_j - b^i{}_j \right|$).

[1] Zvykněme si, že někdy se generátorem míní base tohoto prostoru nebo i její jeden prvek, někde jsou prvky vynásobené i, aby byly (např. u $\mathbb{SU}(n)$) hermitovské a nikoli antihermitovské, i se pak musí připsat i ke komutátoru.

2. *Podívejme se na výrazy typu ($N \to \infty$)*

$$(\exp\frac{\sqrt{t}\mathbf{A}}{N}\cdot\exp\frac{\sqrt{t}\mathbf{B}}{N}\exp\frac{-\sqrt{t}\mathbf{A}}{N}\cdot\exp\frac{-\sqrt{t}\mathbf{B}}{N})^{N^2} = \tag{12.9}$$

$$= (\mathbf{1}+\frac{t}{N^2}[\mathbf{A},\mathbf{B}]+\mathbf{o}(\frac{1}{N^2}))^{N^2} \to \exp(t[\mathbf{A},\mathbf{B}]). \tag{12.10}$$

Lze tedy opět $\exp(t[\mathbf{A},\mathbf{B}])$ *vyjádřit s jakoukoliv přesností pomocí součinu prvků z* $\mathbb{G}$*; pokud je* $t<0$*, stačí vyměnit písmena* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$ *nalevo.*

PŘÍKLAD. Ilustrujme si to na příkladě algebry $\mathfrak{so}_3$: otočíme-li systém o malý úhel α kolem osy x, poté o malý úhel β kolem osy y a pak zpět, ovšem v tomtéž pořadí (nejprve o $-\alpha$ kolem x a pak o $-\beta$ kolem y), systém se nám otočí o malinký úhel $\alpha\beta$ (až na konvenční znaménko) kolem osy z.

CVIČENÍ. Generátorem grupy otáčení kolem nějaké zvolené osy je (lineární obal) otočení o pravý úhel (podél zmíněné osy). Propočtěte (stačí toto dokázat v euklidovské rovině; dostáváme takto i vztahy mezi exponenciálou matice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ a funkcemi $\cos$ a $\sin$, tedy vlastně definici komplexní exponenciály jaksi „bez“ zavedení komplexních čísel.

CVIČENÍ. Určete generátor grupy všech regulárních horních trojúhelníkových matic.

(Prostor všech horních trojúhelníkových matic: Na jednu stranu je jasné, že exponenciála trojúhelníkové matice je regulární trojúhelníková matice; na druhé straně generátor může obsahovat pouze horní trojúhelníkové matice, což nahlédneme snadno, napíšeme-li si první člen rozvoje $\exp t\mathbf{A}$ pro malé t.)

SOUVISLOST ALGEBER SE STEJNOJMENNÝMI GRUPAMI. Abychom ukázali, v jakém smyslu Lieovy algebry odpovídají grupám stejného jména, předefinujme infinitesimální generátor grupy matic $\mathbb{G}$ jako množinu všech možných $\dot{\mathbf{A}}(0)$, kde pro $t\in\mathbb{R}$ je $\mathbf{A}(t)\in\mathbb{G}$, tj. $\mathbf{A}(t)$ je derivovatelná křivka po grupě, a $\mathbf{A}(0)=\mathbf{1}$. (Ekvivalence plyne z toho, že za tuto křivku lze vždy zvolit $\mathbf{A}(t)=\exp(t\dot{\mathbf{A}}(0))$.)

Tak například, křivka $\mathbf{A}(t)$ po grupě $\mathbb{SO}(n)$ matic splňujících $\mathbf{A}(t)\mathbf{A}(t)^T = \mathbf{1}$ po zderivování a dosazení $t=0$ dá

$$\dot{\mathbf{A}}(0)\mathbf{A}^T(0)+\mathbf{A}(0)\dot{\mathbf{A}^T}(0)=\dot{\mathbf{A}}(0)+\dot{\mathbf{A}}^T(0)=\mathbf{0}, \tag{12.11}$$

tj. nutnou podmínku antisymetrie $\dot{\mathbf{A}}(0)$, která je zároveň postačující.

$$\mathbf{B} = -\mathbf{B}^T \quad \Rightarrow \quad \exp \mathbf{B} = \exp(-\mathbf{B}^T) = \exp(\mathbf{B}^T)^{-1} = ((\exp \mathbf{B})^T)^{-1} \tag{12.12}$$

CVIČENÍ. Zderivováním kritérií pro členství v dalších Lieových grupách (viz Cartaniáda) získejte rovnice stejnojmenných Lieových algeber. Připomenete si kupř. též následující vzorec, s nímž se v pozměněných tvarech znáte.

$$\frac{d}{dt} \det \mathbf{A}|_{t=0} = \operatorname{Tr} \dot{\mathbf{A}}(0) \tag{12.13}$$

12.1 Killingova forma a metrika

Mějme lineární prostor $\mathfrak{gl}(n)$ všech matic n krát n. Přirozený isomorfismus do $\mathbb{E}^{n^2}$ dává následující předpis pro *skalární součin dvou matic*:

$$\mathbf{b}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sum a^i{}_j b^i{}_j \tag{12.14}$$

CVIČENÍ.

$$\mathbf{b}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \operatorname{Tr} \mathbf{A}\mathbf{B}^T. \tag{12.15}$$

Z tohoto druhého vyjádření pro $\mathbf{b}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ vidíme některé význačné vlastnosti takto zavedeného skalárního součinu, např. vztahy (které použijeme později v odstavci polární rozklad)

$$\mathbf{b}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathbf{b}(\mathbf{OA}, \mathbf{OB}) = \mathbf{b}(\mathbf{AO}, \mathbf{BO}). \tag{12.16}$$

pro libovolnou ortogonální matici $\mathbf{O}$. (Dokažte s použitím cykličnosti stopy). Tento vztah říká, že metrika

$$\rho(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|, \tag{12.17}$$

kde $\|\mathbf{A}\|^2 = \mathbf{b}(\mathbf{A}, \mathbf{A})$ je *invariantní* vůči grupě $\mathbb{O}(n)$. Chápeme-li ji jako metriku na grupě $\mathbb{O}(n) \subseteq \mathfrak{gl}(n)$, nazývá se *Killingovou metrikou.*

A co je Killingova forma na Lieově *algebře?*

Ta je opět, v konkrétním příkladě $\mathfrak{o}(n)$, dána vztahem

$$\mathbf{b}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = -\operatorname{Tr} \mathbf{AB}. \tag{12.18}$$

(Nezapomeňme, že $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$ platí pro všechny $\mathbf{A} \in \mathfrak{o}(n)$.)

Ukazuje se, že nejde o jen tak ledajaký skalární součin na $\mathfrak{o}(n)$ (máme ho koneckonců stále na celém $\mathfrak{gl}(n)$), neboť tento skalární součin na $\mathfrak{o}(n)$ „respektuje navíc strukturu Lieovy algebry" ve smyslu následujících tvrzení (které jsou ekvivalentní):

TVRZENÍ 1.
Pro všechna $\mathbf{X} \in o(n)$ a všechna $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{o}(n)$ platí

$$\mathbf{b}([\mathbf{X}, \mathbf{A}], \mathbf{B}) + \mathbf{b}(\mathbf{A}, [\mathbf{X}, \mathbf{B}]) = 0 \tag{12.19}$$

(říkáme, že Killingova forma je antisymetrická vůči operaci komutování s $\mathbf{X}$; uvedená rovnost se ostatně bere za základ definice Killingovy formy i v případě obecné Lieovy algebry)

TVRZENÍ 2. Zobrazení

$$\mathbf{A} \mapsto \exp(-\mathbf{X})\mathbf{A} \exp \mathbf{X} : \mathfrak{o}(n) \to \mathfrak{o}(n) \tag{12.20}$$

je isometrie pro každé $\mathbf{X} \in \mathfrak{o}(n)$.

CVIČENÍ. Dokažte tvrzení 1 (prostě dosaďte za $\mathbf{b}(.\because., .\because.)$ i za komutátor a využívejte toho, že $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$ apod.).

Dokažte i tvrzení 2: zde je účelné konsultovat též odstavec 11.2 o Heisenbergově obrazu a příslušné analytické úvahy (ať již provedení limit či sestavení diferenciální rovnice) okopírovat z důkazu věty o determinantu exponenciály.

12.2 Teorie representací

POJMY ANALOGICKÉ GRUPĚ. (♯♯) Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ nazýváme **komutativní**, pokud $\forall x, y \in \mathfrak{g} \quad [x, y] = 0$ a taková algebra odpovídá komutativní grupě. Tento případ není příliš zajímavý.

Centrum algebry Lieovy je (analogicky centru grupy) množina $\mathbb{Z}(\mathfrak{g})$ těch prvků $s \in \mathfrak{g}$, že $\forall t \in \mathfrak{g} \quad [s, t] = 0$, tj. komutují se všemi prvky algebry.

Lieovou podalgebrou nazýváme (analogicky podgrupě) podprostor $\mathfrak{g}$ uzavřený na komutování. Máme dokonce analogii normální podgrupy – říká se mu **ideál** Lieovy algebry a je to podprostor $\mathbb{I}$ takový, že $\forall i \in \mathbb{I}\ \forall j \in \mathfrak{g} \quad [i, j] \in \mathbb{I}$. Elementárním příkladem ideálu je centrum algebry; jiným důležitým příkladem je **komutant** dané Lieovy algebry, což je množina všech prvků tvaru $[x, y]$, $x, y \in \mathfrak{g}$. Ideál je to proto, že $[[x, y], j]$ opět leží v komutantu, protože je tvaru komutátoru dvou prvků.

<u>Věty.</u> Zavedené pojmy mimo jiné implikují, že pokud je $\mathbb{H}$ normální podgrupou grupy $\mathbb{G}$, pak je $\mathfrak{L}(\mathbb{H})$ ideálem v $\mathfrak{L}(\mathbb{G})$. Jestliže je $\mathbb{G}$ souvislá, pak

$$\mathfrak{L}(\mathbb{Z}(\mathbb{G})) = \mathbb{Z}(\mathfrak{L}(\mathbb{G})). \tag{12.21}$$

Pro dvě grupy $\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2$ je

$$\mathfrak{L}(\mathbb{G}_1 \times \mathbb{G}_2) = \mathfrak{L}(\mathbb{G}_1) \oplus \mathfrak{L}(\mathbb{G}_2) \tag{12.22}$$

infinitesimálním generátorem jejich direktního součinu direktní součet jejich infinitesimálních generátorů – kde prvky $\mathfrak{L}(\mathbb{G}_1)$ komutují s prvky z $\mathfrak{L}(\mathbb{G}_2)$, a tak jsou $\mathfrak{L}(\mathbb{G}_i)$ ideály v $\mathfrak{L}(\mathbb{G}_1 \times \mathbb{G}_2)$.

<u>Representace.</u> Nechť Λ označuje jedno z klasických těles $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ nebo $\mathbb{H}$ (kvaterniony) a $\mathbb{G}$ je nějaká grupa. Pak **lineární representací**[2] grupy $\mathbb{G}$ nazýváme konečněrozměrný lineární prostor $\mathbb{V}$ nad tělesem Λ, na němž je pro každý prvek $g \in \mathbb{G}$ definována (stejně značená) funkce, splňující

- $1_G\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}$ a $g(g'\vec{\mathbf{v}}) = (gg')\vec{\mathbf{v}}$
- $g\vec{\mathbf{v}}$ je Λ-lineární funkce $\vec{\mathbf{v}}$
- $g\vec{\mathbf{v}}$ je spojitá funkce g a $\vec{\mathbf{v}}$

Jinými slovy, je zadán morfismus grup

$$\theta = \theta_{\mathbb{V}} : \mathbb{G} \to \operatorname{Aut} \mathbb{V}. \tag{12.23}$$

Vybereme-li basi ve $\mathbb{V}$, lze si představit, že θ nabývá hodnot ve $\mathbb{GL}(n, \Lambda)$. V tomto případě mluvíme o **maticové representaci**.

Píšeme-li v případě kvaternionů matice vlevo od $\vec{\mathbf{v}}$, je rozumné mít ve $\mathbb{V}$ násobení skalárem zprava ($\mathbb{V}$ je pak **pravý modul** nad $\mathbb{H}$). Naštěstí lze ale definovat i násobení skalárem zleva (pruh musíme přidat na to, aby platilo $q(q'\vec{\mathbf{v}}) = (qq')\vec{\mathbf{v}}$)

$$q\vec{\mathbf{v}} := \vec{\mathbf{v}}\bar{q} \tag{12.24}$$

[2] Representace (rusky predstavlenie) nemusí být jenom lineární. Tak například komplexní rovina spolu s nevlastním bodem v nekonečnu je bezvadnou nelineární representací grupy $\mathbb{SL}(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ (grupa isomorfní Lorentzově $\mathbb{SO}(1,3)$), bereme-li na ní všechna konformní (zachovávající úhly, v komplexní rovině jsou jimi analytické funkce) zobrazení, která jsou vzájemně jednoznačná. Těmito zobrazeními jsou totiž $z \to (\alpha z + \beta)/(\gamma z + \delta)$ pro nenulové $\alpha\delta - \beta\gamma$, kde komplexní čísla $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ lze bez újmy na obecnosti vybrat tak, aby $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, přesto však záměna na $-\alpha, -\beta, -\gamma, -\delta$ dává tutéž transformaci, a proto jsme napsali faktor $\mathbb{Z}_2$. Podgrupou převádějící horní polorovinu (s nevlastním bodem) komplexní roviny na sebe je grupa $\mathbb{SL}(2, \mathbb{R})$ s reálnými $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

a tak lze levý modul převrátit na pravý a naopak. Využijeme toho, že $\overline{qq'} = \overline{q'}\overline{q}$, kde $\overline{q}$ je obvyklé sdružení kvaternionu

$$\overline{\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k} = \alpha - \beta i - \gamma j - \delta k. \tag{12.25}$$

Máme-li representace $\mathbb{V}_i$, lze generovat složitější representace ve tvaru direktního součtu dvou (či více) prostorů, na nichž grupa účinkuje podle

$$g(\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2) = (g\vec{\mathbf{v}}_1, g\vec{\mathbf{v}}_2) \tag{12.26}$$

a podobně lze získat representaci ve formě tensorového (resp. symetrisovaného resp. antisymetrisovaného) součinu dvou prostorů, na který grupa účinkuje dle pravidla

$$g(\vec{\mathbf{v}}_1 \otimes \vec{\mathbf{v}}_2) = (g\vec{\mathbf{v}}_1 \otimes g\vec{\mathbf{v}}_2). \tag{12.27}$$

(Zde nejde o nic jiného, než jak se transformují spinory – resp. tensory – s více indexy.) Ale také lze získat representaci na duálním prostoru $\mathbb{V}'$ podle vzorce (zde zase jde – v řeči budoucího jazyka – o transformaci tensorů/spinorů s indexy dole/nahoře)

$$[g(\vec{\mathbf{v}}')]\vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{v}}' \circ g^{-1}\vec{\mathbf{w}}. \tag{12.28}$$

<u>Strukturní zobrazení.</u> Nyní se podíváme, proč stačí pracovat s komplexními representacemi. Reálnou representaci $\mathbb{R}^n$ lze převést na komplexní $\mathbb{C}^n$, přičemž působení grupy je podle přirozené formule ($\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^n$)

$$g(\vec{\mathbf{v}} + i\vec{\mathbf{w}}) = g(\vec{\mathbf{v}}) + ig(\vec{\mathbf{w}}). \tag{12.29}$$

Zdá se, že se ale o cosi okrádáme. Již „malý“ prostor $\mathbb{R}^n$ byl uzavřen na působení grupy a my jsme ho zbytečně zvětšili. Naúčtujeme si to tak, že povíme, že existuje **strukturní zobrazení** $j : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ (v následujícím vzorci jsou $\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ reálné vektory)

$$j : (\vec{\mathbf{v}} + i\vec{\mathbf{w}}) \mapsto (\vec{\mathbf{v}} - i\vec{\mathbf{w}}), \tag{12.30}$$

které komutuje s působením grupy ($g(j\vec{\mathbf{v}}) = j(g\vec{\mathbf{v}})$), je antilineární ($j(z\vec{\mathbf{v}}) = \overline{z}\cdot j(\vec{\mathbf{v}})$, $j(\vec{\mathbf{v}}+\vec{\mathbf{w}}) = j(\vec{\mathbf{v}})+j(\vec{\mathbf{w}})$) a jeho druhá mocnina je plus minus identický operátor (v tomto případě plus) ($j(j\vec{\mathbf{v}}) = \pm\vec{\mathbf{v}}$, zkráceně $j^2 = \pm 1$), což jsou tři vlastnosti, definující strukturní zobrazení.

Naopak, máme-li komplexní representaci se strukturním zobrazením j, rekonstruujeme reálnou representaci rozkladem komplexního prostoru $\mathbb{C}^n$

považovaného za $\mathbb{R}^{2n}$ na dva podprostory, odpovídající vlastním číslům 1 resp. -1 (operátor, splňující $j^2 = 1$, jiná vlastní čísla nemá).

Obdobně lze převést kvaternionickou[3] representaci $\mathbb{H}^m$ na komplexní $\mathbb{C}^{2m}$; kvaternionický vektor budeme psát jako $\vec{\mathbf{v}} + j\vec{\mathbf{w}}$, kde $\vec{\mathbf{v}}$ a $\vec{\mathbf{w}}$ jsou komplexní vektory.

I nyní se o cosi okrádáme: prostor jsme sice zbytečně nezvětšili, ale původní representace byla $\mathbb{H}$-lineární, zatímco nová je jenom $\mathbb{C}$-lineární. $\mathbb{H}$-linearitu si zrekonstruujeme tak, že řekneme, že existuje strukturní zobrazení ($\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ jsou zde komplexní vektory)

$$j(\vec{\mathbf{v}} + j\vec{\mathbf{w}}) = -\overline{\vec{\mathbf{w}}} + j\overline{\vec{\mathbf{v}}}. \tag{12.31}$$

Lehce ověříte antilinearitu, komutování s působením grupy (zobrazení j je vlastně násobení j – shoda písmen čistě náhodná – zprava, což komutovalo s $\mathbb{G}$ díky $\mathbb{H}$-linearitě) a rovnost $j^2 = -1$.

Naopak lze zpětně zrekonstruovat representaci $\mathbb{H}^n$ z dané $\mathbb{C}^{2n}$, která připouští strukturní zobrazení s $j^2 = -1$.

Representace, která je direktním součtem dvou prostorů (representací) $\mathbb{V}, \mathbb{W}$, disponujících strukturními zobrazeními se stejnými $j_V^2 = j_W^2$, připouští strukturní zobrazení $j_V \oplus j_W$ se stejným j^2.

Tensorový součin dvou representací $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$ (může jít i o (anti)symetrisovaný) se strukturními zobrazeními j_V, j_W toleruje strukturní zobrazení $j = j_V \otimes j_W$ se znakem $j^2 = j_V^2 j_W^2$.

Ukážeme jednoduchý příklad. Grupa $\mathbb{SU}(2) = \mathbb{S}p(2)$ má fundamentální representaci kvaternionickou (vždyť jde nakonec o grupu „jednotkových" kvaternionů (s jednotkovou normou)), kterou si představíme jako dvousložkové komplexní spinvektory s_A, $A = 0, 1$, mající strukturní zobrazení s $j^2 = -1$. Symetrisovaný tensorový součin, obsahující dvouindexové spinory $s_{AB} = s_{BA}$, bude tedy disponovat strukturním zobrazením s $j^2 = +1$, tedy budeme moci požadovat podmínky reálnosti (invariantní vůči působení grupy)

$$s_{00} = -\overline{s}_{11}, \quad s_{01}, s_{10} \in \mathbb{R}. \tag{12.32}$$

Není se čemu divit, spinor s_{AB}, který svážeme maximálními podmínkami (symetrie a uvedená samodružnost), je informačně totožný s (trojrozměrným) vektorem. Proto se částicím se spinem rovným jedné říká **vektorové**.

$$s_{01} = z = s_{10}, \quad s_{11} = x + iy, \quad s_{00} = -(x - iy) \tag{12.33}$$

[3]Pro existenci strukturního zobrazení podobného jako u reálné representace se kvaternionické representaci říká také **pseudoreálná**, někdy dokonce také reálná; existence strukturního zobrazení zajišťuje ekvivalenci representace s komplexně sdruženou.

Isomorfnost některých Lieových algeber

Účelem těchto řádek je poukázat na skutečnost, které v jistém smyslu vděčíme za existenci hmoty, přesněji za existenci všech částic s poločíselným spinem. Od doby, kdy Cartan poprvé přišel s těmito ideami, nás dělí již přes osmdesát let, ale svěžest mají ony myšlenky stále mladickou.

Co možná nejstručněji vážené čtenáře přesvědčíme (dále s tímto budeme pracovat v sekci o spinorech), že algebry $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ a $\mathfrak{su}(2)$ jsou isomorfní, a to tak, že napíšeme prvky jejich basí[4] a tiše vás vyzveme k verifikaci níže napsaných komutačních relací pro obě sady matic.

V případě struktury „algebra Lieova“ požadujeme po isomorfismu φ zajisté i zachování komutátoru, tj.

$$\varphi([\mathbf{A},\mathbf{B}]) = [\varphi(\mathbf{A}),\varphi(\mathbf{B})]. \tag{12.34}$$

Postačí zkontrolovat komutátory matic tvořících basi, jako kombinace kterých lze prvek dané Lieovy algebry zapsat.

$$\mathbf{S}_1^{SO(3)} = \begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & -1 \\ \circ & 1 & \circ \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_1^{SU(2)} = \begin{pmatrix} \circ & -i/2 \\ -i/2 & \circ \end{pmatrix}, \tag{12.35}$$

$$\mathbf{S}_2^{SO(3)} = \begin{pmatrix} \circ & \circ & 1 \\ \circ & \circ & \circ \\ -1 & \circ & \circ \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_2^{SU(2)} = \begin{pmatrix} \circ & -1/2 \\ 1/2 & \circ \end{pmatrix}, \tag{12.36}$$

$$\mathbf{S}_3^{SO(3)} = \begin{pmatrix} \circ & -1 & \circ \\ 1 & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_3^{SU(2)} = \begin{pmatrix} -i/2 & \circ \\ \circ & i/2 \end{pmatrix}, \tag{12.37}$$

$$[\mathbf{S}_1,\mathbf{S}_2] = \mathbf{S}_3, \quad [\mathbf{S}_2,\mathbf{S}_3] = \mathbf{S}_1, \quad [\mathbf{S}_3,\mathbf{S}_1] = \mathbf{S}_2 \tag{12.38}$$

Z podobných důvodů jsou isomorfní i algebry $\mathfrak{so}(1,3)$ a $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ a $\mathfrak{su}(1,1)$, ale také třeba $\mathfrak{so}(6)$ a $\mathfrak{su}(4)$. Dalšími příklady jsou $\mathfrak{so}(4)$ a $\mathfrak{su}(2)\oplus\mathfrak{su}(2)$ nebo $\mathfrak{so}(5)$ a $\mathfrak{sp}(2\cdot 2)$.

Budete-li někdy vědět o těchto věcech více, snad přivítáte informaci, že fundamentální representace grupy $\mathbb{S}pin(n)$ je

- jedna samodružná o dimensi 2^k pro $n = 2k+1$ (liché n); je reálná, je-li $[(k+1)/2]$ sudé, jinak je kvaternionická

[4]Za prvky generátoru grupy se mnohdy považují i-násobky námi uvedených, tedy hermitovské matice namísto antihermitovských.

- dvě komplexní vzájemně sdružené s dimensí 2^{k-1} pro $n = 2k$, k liché
- dvě samodružné navzájem neekvivalentní, každá o dimensi 2^{k-1} pro $n = 2k$, k sudé; je-li k násobkem čtyř, jsou reálné, jinak jsou kvaternionické

$\mathbb{SO}(n) : n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
spin. repr.	$2c$	$1q$	$2q$	$1q$	$2c$	$1r$	$2r$	$1r$	$2c$
dim. každé	1	2	2	4	4	8	8	16	16

(12.39)

Na tyto skutečnosti můžete sami přijít, protože vám přinášíme definici grupy $\mathbb{S}pin(n)$.

Spinorová grupa. Chceme získat Lieovu algebru isomorfní $\mathfrak{so}(n)$, jejíž grupa ale obsahuje (vzájemně rozlišitelné) prvky „rotace o 0" a „rotace o 2π". Algebra $\mathfrak{so}(n)$ je lineárním obalem antisymetrických matic $\mathbf{e}_{ij} = -\mathbf{e}_{ji}$, které mají jednotku na místě (i,j) a minus jednotku na (j,i), a tak splňují komutační relace

$$[\mathbf{e}_{ij}, \mathbf{e}_{kl}] = \delta_{jk}\mathbf{e}_{il} - \delta_{jl}\mathbf{e}_{ik} + \delta_{il}\mathbf{e}_{jk} - \delta_{ik}\mathbf{e}_{jl}. \tag{12.40}$$

Není těžké nahlédnout, že tytéž komutační relace budou míti matice $\mathbf{E}_{ij}$, které získáme jako

$$\mathbf{E}_{ij} = \frac{1}{4}(\mathbf{E}_i\mathbf{E}_j - \mathbf{E}_j\mathbf{E}_i), \tag{12.41}$$

pokud matice $\mathbf{E}_i$ budou navzájem antikomutovat a čtvercem každé z nich bude jednotková matice (budou tedy Diracovými γ-maticemi pro euklidovský prostor).

$$\mathbf{E}_i\mathbf{E}_j + \mathbf{E}_j\mathbf{E}_i = 2\delta_{ij}\mathbf{1} \tag{12.42}$$

Takové matice opravdu umíme najít; budou např. tensorovými součiny $[n/2]$ **Pauliho matic** rozměru 2×2, tedy maticemi rozměru $2^{[n/2]} \times 2^{[n/2]}$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} \circ & 1 \\ 1 & \circ \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} \circ & -i \\ i & \circ \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & \circ \\ \circ & -1 \end{pmatrix}.. \tag{12.43}$$

Společně s Pauliho maticemi budou i tyto jejich tensorové součiny hermitovské (ve všech ortonormálních basích), z čehož je zřejmá i antihermitovost $\mathbf{E}_{ij}$. Explicitně lze psát

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{2i-1} &= (\sigma_z)^{\otimes(i-1)} \otimes \sigma_x \otimes (\mathbf{1}_2)^{\otimes([n/2]-i)} \\ \mathbf{E}_{2i} &= (\sigma_z)^{\otimes(i-1)} \otimes \sigma_y \otimes (\mathbf{1}_2)^{\otimes([n/2]-i)} \\ \mathbf{E}_{2m+1} &= (\sigma_z)^{\otimes m} \quad \text{pro} \quad n = 2m+1. \end{aligned} \tag{12.44}$$

(Zde značí $[x]$ celou část x, $\mathbf{1}_2$ jednotkovou matici 2×2.) Zároveň vidíme, že jsme získali, co jsme chtěli, protože pro generátory $\mathbf{e}_{ij}$ grupy $\mathbb{SO}(n)$ bylo nejmenší kladné číslo t, pro které

$$\exp(t\mathbf{e}_{ij}) = \mathbf{1} \tag{12.45}$$

rovno 2π; u matic $\mathbf{E}_{ij}$ je to 4π (tedy až rotací o 4π dostaneme jednotkový prvek grupy).

Pro lepší názornost si lze operátory $\mathbf{E}_k$ představit jako kombinace kreačních b_k^* a anihilačních b_k operátorů[5] ($k = 1, \ldots, l$ pro $\mathbb{S}pin(2l-1)$ – pak přehlédněme $\mathbf{E}_{2k}$ pro $k = l$ – a $\mathbb{S}pin(2l)$)

$$\mathbf{E}_{2k-1} = (b_k + b_k^*), \quad \mathbf{E}_{2k} = i(b_k - b_k^*). \tag{12.46}$$

Lehce zkontrolujete rovnost

$$\{\mathbf{E}_j, \mathbf{E}_k\} = 2\delta_{jk}. \tag{12.47}$$

Operátory $\mathbf{E}_{ij}$ pak převádějí bosonové stavy na bosonové a fermionové na fermionové (bosonovým míníme stav,[6] vzniklý působením sudého počtu operátorů na vakuum). U $\mathbb{S}pin(2l-1)$ jsou pak bosonové a fermionové prostory ekvivalentní, protože je lze na sebe převádět právě tím „přehlédnutým" operátorem $\mathbf{E}_{2l}$, který komutuje se všemi $\mathbf{E}_{ij}$ pro $\{i,j\} \subseteq \{1, 2, \ldots, 2l-1\}$. a tak má grupa $\mathbb{S}pin(2l-1)$ jen jednu fundamentální representaci o dimensi 2^{l-1}.

Jistě sami najdete detaily o strukturních zobrazeních, pomocí nichž určujeme reálnost, komplexnost nebo kvaternionovost representace grupy $\mathbb{S}pin(n)$. Jde o antilineární zobrazení, které například prvku base $b_1^* b_3^* |0\rangle$ přiřadí stav $b_2^* b_4^* b_5^* b_6^* |0\rangle$ (např. pro $n = 12$), ve kterém jsou obsazeny právě ty hladiny, které nebyly obsazeny ve vzoru (vidíme, že v případě lichého počtu hladin – pro $\mathbb{S}pin(2l)$ s lichým l, tímto vyrobíme fermionový stav z bosonového či naopak, čili nedostaneme strukturní zobrazení uvnitř např. bosonového prostoru, ale jen důkaz, že bosonový a fermionový prostor tvoří vzájemně komplexně sdružené representace). (Musíte si určit konsistentně znaménko.)

---

[5] Tyto operátory splňují $\{b_j, b_k^*\} = \delta_{jk}$, $0 = \{b_j, b_k\} = \{b_j^*, b_k^*\}$, $b_k|0\rangle = 0$, kde $\{a, b\} = ab + ba$ je antikomutátor a $|0\rangle$ je vakuum, základní prvek base (vektorům říkají fysici „stavy"), pomocí něhož vytváříme ostatní působením kreačních operátorů $b_1^* b_2^* |0\rangle \ldots$.

[6] Operátor $\overline{\gamma}$ s vlastními čísly $+1, -1$ pro bosonové resp. fermionové vektory lze získat jako jakýsi součin $(1 - 2b_1^* b_1)(1 - 2b_2^* b_2) \ldots (1 - 2b_l^* b_l)$ a komutuje tedy se všemi $\mathbf{E}_{ij}$. Protože určuje levo/pravotočivost, říká se mu podle řeckého výrazu pro ruku operátor **chirality**.

Operátor chirality je součinem všech **E** matic (u lichého n, kde nehraje chiralita takovou roli, neboť je jen jedna spinorová representace, je konvencí, zda vše ještě vynásobíme $\mathbf{E}_{n+1}$);

$$\overline{\gamma} = i^{[n/2]}\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_n \tag{12.48}$$

Mocninu imaginární jednotky jsme napsali proto, aby bylo $\overline{\gamma}$ hermitovské a jeho čtvercem byl jednotkový operátor; aby tedy měl vlastní čísla ± 1.

12.3 Kompaktní grupy

V následujících odstavcích váženým čtenářům naznačíme, proč jiné kompaktní prosté Lieovy algebry než ty, o nichž jsme mluvili v Cartaniádě, neexistují.

V Lieově algebře, příslušné dané kompaktní Lieově grupě $\mathbb{G}$ zavedeme skalární součin, invariantní vůči transformacím grupy. Není to nic těžkého, vzpomeneme-li si na invariantní integraci, o které jsme se již zmínili.[7] Jako každá hezká věcička, i ona musí být někdy užitečná. Ten okamžik přichází.

Chceme, aby skalární součin dvou matic algebry byl invariantní vůči transformacím grupy v tzv. **přidružené representaci**, což je representace, která jakožto prostor splývá s algebrou Lieovou (její dimense je tedy rovna dimensi grupy; matice z ní značme $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$...) a prvek grupy $\mathbb{G}$ na ní účinkuje podle

$$\mathbf{G} : \mathbf{A} \mapsto G[\mathbf{A}] = \mathbf{G}\mathbf{A}\mathbf{G}^{-1}. \tag{12.49}$$

Zkontrolujte, že $(GH)[\mathbf{A}] = G[H[\mathbf{A}]]$. Invariance znamená požadavek, aby

$$\forall \mathbf{A}, \mathbf{B}, \quad \forall \mathbf{H} \quad \mathbf{b}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathbf{b}(H[\mathbf{A}], H[\mathbf{B}]). \tag{12.50}$$

Pomocí invariantní integrace takový skalární součin lze získat z libovolného (neinvariantního) skalárního součinu s „ustředněním přes grupu“

$$\mathbf{b}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \int_{G \in \mathbb{G}} s(G[\mathbf{A}], G[\mathbf{B}]). \tag{12.51}$$

Pak zjevně platí (první „rovná-se“ je oprávněné díky invarianci integrace vůči substituci $\mathbf{GH} \to \mathbf{G}$)

$$\begin{array}{c} \mathbf{b}(H[\mathbf{A}], H[\mathbf{B}]) \equiv \int_{G \in \mathbb{G}} s(\mathbf{GHA}\ \mathbf{H}^{-1}\mathbf{G}^{-1}, \mathbf{GHBH}^{-1}\mathbf{G}^{-1}) = \\ = \int_{G \in \mathbb{G}} s(\mathbf{GAG}^{-1}, \mathbf{GBG}^{-1}) = \mathbf{b}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \end{array} . \tag{12.52}$$

[7] Integrál používáme v této knize ve smyslu vhodné *lineární formy* na prostoru spojitých funkcí, obvykle na kompaktním prostoru; veškerou další informaci o tomto pojmu viz v kursech analýzy!

Abychom řekli něco konkrétního o způsobu invariantní integrace: zapíšeme-li matici $\mathbf{R} \in \mathbb{SU}(2)$ ve tvaru

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos\gamma \exp i\alpha & \sin\gamma \exp i\beta \\ -\sin\gamma \exp -i\beta & \cos\gamma \exp -i\alpha \end{pmatrix}, \tag{12.53}$$

kde meze α, β, γ jsou zřejmé z integrálu níže, lze invariantní integraci napsat jako

$$\int_{R\in\mathbb{SU}(2)} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\pi/2} d\gamma \cdot \sin 2\gamma \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{2\pi} d\beta. \tag{12.54}$$

Co se týče jednoznačnosti invariantního skalárního součinu: lze ho vždy násobit nějakou konstantou, ale pro prosté grupy je jinak určen jednoznačně. Opravdu, kdybychom měli dva skalární součiny b_1, b_2, mohli bychom vzít (také invariantní) kombinaci

$$b = b_1 - \lambda b_2 \tag{12.55}$$

s nejmenším možným kladným λ, při němž všechny $\mathbf{b}(\mathbf{A}, \mathbf{A})$ jsou ještě nezáporné, ale už pro některé nenulové $\mathbf{A}$ jsou nulové. Pak by množina takových matic (s nulovou normou) tvořila ideál.

Maximální tory

Dále zvolíme torus $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{G}$, to jest maximální podgrupu isomorfní (Abelově) $\mathbb{U}(1)^l$ (někdy značenou jako $\mathbb{T}^l$, kde $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ je grupa intervalu $\langle 0, 1)$ se sčítáním „modulo jedna“). Mnohé věty nás ujišťují o tom, že příliš nezáleží na tom, který maximální torus[8] vybereme. Jeho l nazývejme **rankem** dané grupy.

<u>Příklad.</u> V grupě $\mathbb{SO}(2l)$ a $\mathbb{SO}(2l+1)$ lze vybrat maximální torus $\mathbb{T}^l$ všech matic $\mathbf{t}$ s l bloky na diagonále ($i = 1, \ldots, l$)

$$\begin{pmatrix} \cos 2\pi x_i & -\sin 2\pi x_i \\ \sin 2\pi x_i & \cos 2\pi x_i \end{pmatrix} \tag{12.56}$$

(v případě $\mathbb{SO}(2l+1)$ doplníme do pravého dolního rohu jednotku). Podobně v grupě $\mathbb{SU}(l+1)$ umístíme na diagonálu čísla

$$\exp 2\pi x_i, \tag{12.57}$$

[8] Infinitesimálnímu generátoru maximálního toru se říká **Cartanova podalgebra**.

kde $\sum x_i = 0$ (aby byl jednotkový determinant, neprostou grupou $\mathbb{U}(l)$ se zde nazabýváme). Infinitesimálním generátorem maximálního toru je prostor $\mathbb{R}^l$, v našich příkladech obsahuje matice, které mají na diagonále bloky

$$\begin{pmatrix} 0 & -x_i \\ x_i & 0 \end{pmatrix} \tag{12.58}$$

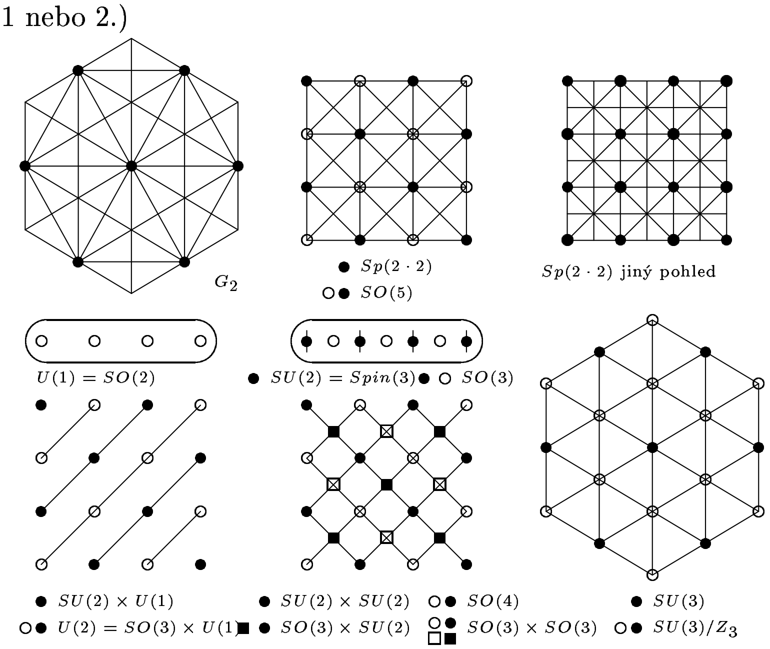
pro případ $\mathbb{SO}$ (u $\mathbb{SO}(2l+1)$ umístíme do pravého dolního rohu nulu!) a nebo čísla

$$ix_i \tag{12.59}$$

v případě $\mathbb{SU}(l+1)$. $\mathbb{T}$ je podgrupou $\mathbb{G}$ a invariantní skalární součin z $\mathfrak{g}$ lze zúžit na $\mathfrak{t}$.

Stiefelovy diagramy kreslíme do l-rozměrného prostoru, kde jsou souřadnice $x_1, \ldots, x_l$ zavedeny v souladu s tímto skalárním součinem a kolečky (resp. čtverečky) jsou vyznačeny prvky Lieovy algebry, jimž odpovídá jednotkový prvek $\mathbb{T}$ čili i $\mathbb{G}$, to jest tzv. **celočíselná mřížka** (lattice, rešjotka), v našich příkladech jsou to body, kde jsou všechna x_i celá.

(Na obrázku je celočíselnou mřížkou dané grupy množina všech koleček resp. čtverečků těch typů, které jsou u ní uvedeny. Rank vyznačených grup je 1 nebo 2.)



<u>KOŘENY.</u> Zbývá vysvětlit, co znamenají ony přímky na diagramech. Vtip je v tom, že prvky $\mathbb{T}$ (značíme je zde $\mathbf{t}, \mathbf{u} \ldots$) působí v přidružené representaci $\mathfrak{g}$ (algebry celé grupy) tak, že se $\mathfrak{g}$ rozpadá na direktní součet

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{V}_i \oplus \mathbb{V}_0, \tag{12.60}$$

přičemž na prostoru $\mathbb{V}_0$ (který splývá s $\mathfrak{t}$, je-li $\mathbb{T}$ opravdu maximální torus) účinkují prvky $\mathbf{t}$ triviálně

$$\mathbf{t}\mathbf{v}_0\mathbf{t}^{-1} = \mathbf{v}_0 \quad \forall \mathbf{v}_0 \in \mathbb{V}_0 \tag{12.61}$$

a $\mathbb{V}_i$ jsou dvojrozměrné prostory (je jich r, což je – z důvodů rovnosti dimensí – polovina rozdílu dimense grupy a jejího ranku, čili bude dokázáno, že tento rozdíl je sudý) generované maticemi $\mathbf{M}_i, \mathbf{N}_i$, na nichž působí $\mathbf{t}$ podle

$$\mathbf{t}\mathbf{M}_i\mathbf{t}^{-1} = \mathbf{M}_i \cos 2\pi\theta_i - \mathbf{N}_i \sin 2\pi\theta_i, \mathbf{t}\mathbf{N}_i\mathbf{t}^{-1} = \mathbf{M}_i \sin 2\pi\theta_i + \mathbf{N}_i \cos 2\pi\theta_i, \tag{12.62}$$

kde θ_i jsou nějaké kombinace x_i (např. $x_1 - x_2$), to jest nějaké lineární formy na $\mathfrak{t}$, a nazýváme je **kořeny** (kórni, roots) dané grupy.

Vidíme, že pokud např. vyměníme $\mathbf{M}_i$ a $\mathbf{N}_i$ (nebo třeba změníme znaménko u jedné z nich), bude poslední vysazená formule dále platná, změníme-li znaménko u θ_i. Tedy spolu s $+\theta_i$ říkáme kořen i formě $-\theta_i$.

Ještě výhodnější může být komplexifikovat Lieovu algebru[9] (dosud jsme ji vždy považovali za prostor nad $\mathbb{R}$, prvky byly jen reálnými kombinacemi prvků base, kterými – samozřejmě – mohly býti komplexní matice) a docílit tak, že se nám bude transformovat do sebe jen jedna matice $\mathbf{Q}_i = \mathbf{M}_i + i\mathbf{N}_i$ resp. $\mathbf{Q}'_i = \mathbf{M}_i - i\mathbf{N}_i$ místo dvou $\mathbf{M}_i, \mathbf{N}_i$:

$$\mathbf{t}\mathbf{Q}_i\mathbf{t}^{-1} = \exp(2\pi\theta_i)\mathbf{Q}_i, \quad \mathbf{t}\mathbf{Q}'_i\mathbf{t}^{-1} = \exp(-2\pi\theta_i)\mathbf{Q}'_i. \tag{12.63}$$

Matice $\mathbf{Q}_i$ pak prostě odpovídá kořenu θ_i a matice $\mathbf{Q}'_i$ kořenu $-\theta_i$.

<u>PŘÍKLADY.</u> Grupa $\mathbb{SU}(l+1)$ (stejně jako $\mathbb{U}(l+1)$) má kořeny $\theta_{rs} = x_r - x_s$, kde $r \neq s \in \{1, 2, \ldots, l\}$ a jako odpovídající matici $\mathbf{Q}_{rs}$ si lze představit matici, která má všude nuly kromě posice (r, s), kde má cokoli nenulového. Každý může ověřit, že $\mathbf{t}\mathbf{Q}_{rs}\mathbf{t}^{-1}$ dá to, co má.

[9] Pak již nemůžeme považovat exponenciály prvků algebry za prvky původní grupy. Reálnost zrekonstruujeme požadavkem, aby $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{Q}'$ se kombinovaly jen $c\mathbf{Q} + \bar{c}\mathbf{Q}'$ s komplexně sdruženými koeficienty.

Podobně grupa $\mathbb{SO}(2l)$ má kořeny $x_r - x_s$, ale navíc má kořeny $\pm(x_r + x_s)$ $(r \neq s)$ a grupa $\mathbb{SO}(2l+1)$ má proti $\mathbb{SO}(2l)$ další kořeny $\pm x_r$.

Do Stiefelových diagramů tedy zakreslíme navíc množiny bodů $\mathfrak{u}_i$ (dimense o jednu menší, než je rank), v nichž kořeny nabývají celých hodnot. Kořeny nabývají celých hodnot na celočíselné mřížce, kde $\mathbf{t} = \mathbf{1}$. Obecněji, průnikem soustav rovnoběžných „hyperrovin" (nadrovin) $\mathfrak{u}_i$ jsou body, odpovídající centru grupy.

Systémy kořenů

Přenechme specialistům důkazy toho, že tzv. **Weylova grupa**, to jest grupa všech vnitřních automorfismů[10] $\mathbb{G}$ fixujících zvolený maximální torus, obsahuje pro každé i prvek, který ponechává systém hyperrovin (nadrovin) $\mathfrak{u}_i$ na místě. Je-li tomu tak, musí jít o zrcadlení podle roviny kolmé na daný kořen (pomocí invariantního skalárního součinu jsme ztotožnili infinitesimální generátor toru s jeho duálem) v obyčejném geometrickém smyslu (podle invariantního skalárního součinu). Takové zrcadlení musí množině všech kořenů přiřadit tutéž množinu. Vyslovme tedy definici.

Definice. **Systémem kořenů** v euklidovském prostoru $\mathbb{E}$ nazýváme konečnou podmnožinu $\Sigma \subseteq \mathbb{E}$ takovou, že

- neobsahuje nulový vektor
- pro $\alpha \in \Sigma$ je $c\alpha \in \Sigma$ právě když $c = \pm 1$
- zrcadlení podle hyperroviny (nadroviny) kolmé na kterýkoli z kořenů převádí Σ na Σ
- pro všechny dvojice kořenů α, β je

  $$\{\alpha, \beta\} := 2\mathbf{b}(\alpha, \beta)/\mathbf{b}(\beta, \beta) \tag{12.64}$$

  celé číslo.

Poslední bod je důsledkem toho, že zrcadlení kořenu α podle roviny kolmé na β má samozřejmě tvar

$$\varphi_\beta(\alpha) = \alpha - \frac{2\mathbf{b}(\alpha, \beta)}{\mathbf{b}(\beta, \beta)}\beta, \tag{12.65}$$

[10] Takový, který se dá zapsat jako $g \mapsto hgh^{-1}$ pro nějaké h, jejich grupa tvoří podgrupu $\mathrm{Aut}(\mathbb{G})$, značenou $\mathrm{Int}(\mathbb{G})$.

lze vybrat vektor $\vec{\mathbf{v}}$, na němž forma β nabývá jednotky, zjistíme, že $\varphi_\beta(\vec{\mathbf{v}})-\vec{\mathbf{v}}$ náleží celočíselné mřížce (protože φ_β fixuje $\mathfrak{u}_\beta$). Z toho dále plyne, že

$$\alpha(\vec{\mathbf{v}}-\varphi_\beta(\vec{\mathbf{v}})) = \alpha\vec{\mathbf{v}} - [\varphi_\beta(\alpha)](\vec{\mathbf{v}}) \tag{12.66}$$

je celé (úprava vychází z toho, že při skalárním součinu je jedno, který činitel zrcadlíme), což po dosazení ($\beta(\vec{\mathbf{v}})=1$) dává uvedený výsledek.

Buď jak buď, poslední bod má silný důsledek.

<u>VĚTA.</u> Dva kořeny $\alpha \neq \pm\beta$ jsou

- (0) buď kolmé
- (1) nebo svírají úhel 60° nebo 120° a mají stejnou normu
- (2) nebo svírají úhel 45° nebo 135° a poměr norem je $\sqrt{2}$
- (3) nebo svírají úhel 30° nebo 150° a poměr norem je $\sqrt{3}$

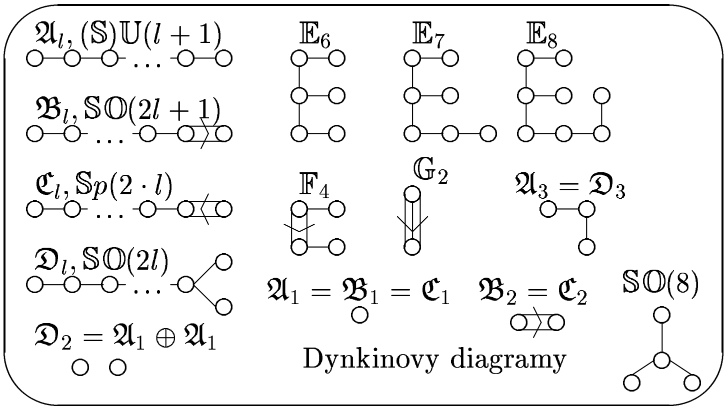
<u>DŮKAZ.</u> Čtyřnásobek kvadrátu kosinu úhlu kořeny sevřený

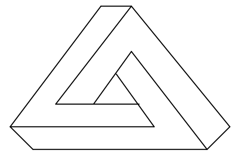
$$4\cos^2\omega = \frac{2\mathbf{b}(\alpha,\beta)\cdot 2\mathbf{b}(\beta,\alpha)}{\mathbf{b}(\alpha,\alpha)\cdot\mathbf{b}(\beta,\beta)} \tag{12.67}$$

je menší (díky nezávislosti α, β ostře) než čtyři. Je to ale součin dvou celých čísel, a tak je jedno nulové (případ 0) nebo jedno rovné ± 1. Možnosti pak lehce proberete.

<u>DYNKINOVY DIAGRAMY.</u> Nebudeme to dokazovat, ale všechny kořeny daného systému lze získat jako celočíselné kombinace (lineárně nezávislých) **prostých kořenů**. Potom tento systém prostých kořenů lze buď rozdělit na sjednocení disjunktních a neprázdných množin kořenů, kde dvojice z různých podmnožin jsou vždy kolmé, a takové nerozložitelné systémy prostých kořenů lze znázornit pomocí **Dynkinova diagramu**. Prosté kořeny v něm spojíme tolika čarami, jaké je číslo varianty jejich vzájemné polohy podle poslední věty. V případech (2) a (3) je ještě slušné přikreslit na spojnici šipku, namířenou ke kratšímu kořenu (jako při obyčejném porovnávání $<$). Pokud se (2) a (3) v Dynkinově diagramu nevyskytuje, mají všechny kořeny stejnou délku a dané algebře říkáme **jednoduše šněrovaná** (simply laced).

Věřte nebo nevěřte, jiné systémy prostých kořenů, než ty s následujícími Dynkinovými diagramy, neexistují a spolu s tím neexistují další prosté kompaktní grupy.





(Všimněte si, že na obrázku mají některé Dynkinovy diagramy určité symetrie: permutací různých kořenů dostaneme týž obrázek. Nebudeme to rozebírat, ale je to spojeno s existencí **vnějších automorfismů** dané algebry (vnější je takový, který nelze zapsat jako sdružení nějakým prvkem grupy $\mathbf{g}$: $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{gAg}^{-1}$). S vnějšími automorfismy lze očekávat symetrie mezi representacemi; u grup s Dynkinovými diagramy, které mají symetrie, lze očekávat větší počet fundamentálních representací ($\mathbb{E}_6$ například nebo $\mathbb{SU}(l+1)$ pro $l>1$ má dvě vzájemně komplexně sdružené, symetrie **parity**, vyměňující pravé dva kořeny Dynkinova diagramu, u $\mathbb{S}pin(2l)$ garantuje existenci dvou „vzájemně zrcadlově sdružených“ spinorových representací). Grupa $\mathbb{S}pin(8)$ má dokonce symetrii **triality**: lze u ní permutovat tři kořeny a je s tím spojena skutečnost, že dvě reálné spinorové representace (s dvěma různými chiralitami) a representace vektorová mají stejnou dimensi 8.)

Naopak, pro každý z uvedených diagramů lze sestrojit Lieovu algebru a z ní také kompaktní grupu. Několikrát jsme již diskutovali (a budeme) o tom, že $\mathbb{SO}(3)$ má stejnou algebru jako $\mathbb{SU}(2)$, která má centrum $\mathbb{Z}_2$ (plus minus jednotková matice), zatímco $\mathbb{SO}(3)$ má triviální jednoprvkové centrum. Nyní můžeme isomorfnost těchto algeber ukázat na shodnosti Dynkinových diagramů. Maximální centrum (poloprosté, neobsahující $\mathbb{U}(1)\times\ldots$) grupy s danou algebrou, která lze vytvořit, vystihuje následující tabulka.

A_l	B_l, C_l, E_7	D_{2s}	D_{2s+1}	E_6	E_8, F_4, G_2
Z_{l+1}	Z_2	$Z_2 \times Z_2$	Z_4	Z_3	$\{1\}$

. (12.68)

Tak například, grupa $A_l = \mathbb{SU}(l+1)$ má centrum Z_{l+1}.

Cvičení. Můžete zkusit dokázat, proč není možné získat grupy E_9 atd., proč mají vyňaté grupy dimensi, kterou jsme uváděli atd.

Poradíme vám, aby jste si zapsali v nějakých souřadnicích prosté kořeny. Např.

- A_l má prosté kořeny $x_1 - x_2$, $x_2 - x_3$, $\dots x_l - x_{l+1}$, kde pracujeme jen s hyperrovinou (nadrovinou), kde $\sum x_i = 0$
- B_l má prosté kořeny $x_1 - x_2, \dots, x_{l-1} - x_l, x_l$
- C_l má prosté kořeny $x_1 - x_2, \dots, x_{l-1} - x_l, 2x_l$
- D_l má prosté kořeny $x_1 - x_2, \dots, x_{l-1} - x_l, x_{l-1} + x_l$

12.4 Váhy a mřížky

Váhy. Kořeny byly speciálními případy vah. Obecně **vahou** máme na mysli lineární formu na Cartanově podalgebře, nabývající celých hodnot na celočíselné mřížce. Zajímavější jsou ale **váhy dané representace** $\mathbb{V}$ dané algebry. Prvky Cartanovy podalgebry navzájem komutují, a tudíž můžeme hledat jejich společné vlastní vektory ve $\mathbb{V}$ a čísla. Váha dané (mluvíme o komplexní) representace je tedy taková forma, která přiřadí prvku Cartanovy podalgebry jeho vlastní číslo příslušející nějakému vlastnímu vektoru celé podalgebry. Jestliže tedy počítáme každou váhu tolikrát, kolikarozměrný prostor jejích vlastních vektorů jí přísluší, bude vah právě tolik, jaká je dimense $\mathbb{V}$.

Kořeny lze tedy chápat jako váhy přidružené representace; těchto vah je tedy tolik, kolik je dimense dané algebry, ovšem jen proto, že počítáme i l (rank) nulových vah (vlastními vektory jsou prvky Cartanovy podalgebry), které obvykle za kořeny nepovažujeme.

Tak například grupa $\mathbb{SO}(2l)$ (l je rank) má v základní $2l$-rozměrné vektorové representaci $2l$ vah $\pm\vec{\mathbf{e}}_i$, $i = 1, 2, \dots, l$.

Samoduální mřížky. Když už jsme došli tak daleko, můžeme si něco říci o vlastnostech mřížek (soustava diskrétních bodů v prostoru $\mathbb{R}^n$, zpravidla celočíselné kombinace základních mřížkových vektorů), a to z fysikálního pohledu v současnosti nejnadějnějšího kandidáta na teorii všeho, heterotické struny.

Kvantová teorie bosonové struny funguje pouze v dimensi časoprostoru 26, kvantová teorie superstruny jen v dimensi 10. Navíc vlevojdoucí a vpravojdoucí módy uzavřené struny spolu navzájem komutují a generátory grupy Poincaré jsou součty vlevojdoucí a vpravojdoucí části. Lze pak tedy vzít levý sektor z bosonové struny a pravý ze superstruny. Přebytečných 16 vlevojdoucích bosonových dimensí lze svinout na torus; aby z bosonových rozměrů zbyla jen vlevojdoucí část, je třeba, aby celková hybnost struny byla rovna celkovému obtáčení[11] (ztotožníme-li body, které se liší o celočíselné kombinace mřížkových vektorů, je možné, aby při objíždění uzavřené struny jsme popojeli o nějakou takovou kombinaci – to nazýváme obtáčením). Aby vůbec existovaly nějaké stavy s nenulovou celkovou hybností ve směru svinutých souřadnic (což je nutné k dobrému chování interakcí), je třeba, aby **duální mřížka** (všech forem, nabývajících celých hodnot na původní mřížce) měla s původní společné body (při ztotožnění původního prostoru s duálem). Dokonce je dobré předpokládat, aby splývaly, to jest aby byla **mřížka samoduální**. Navíc se budeme zabývat jen **sudými** samoduálními mřížkami, kde čtverec délky každého jejího vektoru je sudý.

Je matematickou pravdou, že sudé samoduální mřížky existují jen v prostorech o dimensi, která je násobkem osmi. Tak třeba v osmi rozměrech máme samoduální mřížku Γ_8 všech celočíselných kombinací kořenů vyňaté grupy $\mathbb{E}_8$. Těmi jsou $(i, j = 1, 2, \ldots, 8)$

$$\pm \vec{\mathbf{e}}_i \pm \vec{\mathbf{e}}_j,\ i \neq j, \quad \frac{1}{2}(\pm\vec{\mathbf{e}}_1 \pm \vec{\mathbf{e}}_2 \ldots \pm \vec{\mathbf{e}}_8), \tag{12.69}$$

kde v druhém tvaru kořenů bereme jen ty se sudým počtem plusů. (Lehce napočítáte, že je jich celkem 112+128=240 právě 248-8, čili dimense minus rank.) Formy $\vec{\mathbf{v}}$ nabývající celých hodnot na všech těchto kořenech jsou pak kombinacemi těchto kořenů (ortonormální basi $\vec{\mathbf{e}}_i$ ztotožňujeme s basí k ní duální):

Lehce totiž ukážete, že souřadnice $\vec{\mathbf{v}}$ jsou buď všechny celé nebo všechny polocelé. Celočíselnost formy $\vec{\mathbf{v}}$ na $\vec{\mathbf{r}}_0 = (1/2, 1/2, \ldots, 1/2)$ pak říká, že suma souřadnic $\vec{\mathbf{v}}$ musí být sudá, a tak je $\vec{\mathbf{v}}$ celočíselnou lineární kombinací $\vec{\mathbf{e}}_i \pm \vec{\mathbf{e}}_j$ (v případě, že souřadnice $\vec{\mathbf{v}}$ jsou celé), a nebo toto platí pro $\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{r}}_0$, čímž jsme ukázali, že i $\vec{\mathbf{v}}$ leží v Γ_8, neboli samodualitu Γ_8.

Samozřejmě, lze vybrat osm základních mřížkových vektorů, celočíselný-

[11] Až na faktor 1/2.

mi kombinacemi kterých jsou všechny ostatní, např.

$$\begin{gathered}\vec{\mathbf{e}}_1-\vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_2-\vec{\mathbf{e}}_3, \vec{\mathbf{e}}_3-\vec{\mathbf{e}}_4, \vec{\mathbf{e}}_4-\vec{\mathbf{e}}_5, \vec{\mathbf{e}}_5-\vec{\mathbf{e}}_6, \vec{\mathbf{e}}_6-\vec{\mathbf{e}}_7\\ \tfrac{1}{2}(\vec{\mathbf{e}}_1+\vec{\mathbf{e}}_2+\vec{\mathbf{e}}_3+\vec{\mathbf{e}}_4+\vec{\mathbf{e}}_5+\vec{\mathbf{e}}_6-\vec{\mathbf{e}}_7-\vec{\mathbf{e}}_8), \tfrac{1}{2}(\vec{\mathbf{e}}_1+\vec{\mathbf{e}}_2+\vec{\mathbf{e}}_3+\vec{\mathbf{e}}_4-\vec{\mathbf{e}}_5-\vec{\mathbf{e}}_6-\vec{\mathbf{e}}_7-\vec{\mathbf{e}}_8).\end{gathered} \tag{12.70}$$

V šestnácti rozměrech najdeme kartézský součin $\Gamma_8 \times \Gamma_8$ dvou kopií Γ_8 a mřížku Γ_{16}, která obsahuje jako podmřížku kořenovou mřížku $\mathbb{SO}(32)$. Jde o všechny celočíselné kombinace vektorů $(i, j = 1, 2, \ldots, 16)$

$$\pm\vec{\mathbf{e}}_i \pm \vec{\mathbf{e}}_j,\ i \neq j, \quad \frac{1}{2}(\pm\vec{\mathbf{e}}_1 \pm \vec{\mathbf{e}}_2 \ldots \pm \vec{\mathbf{e}}_{16}), \tag{12.71}$$

kde v druhé sadě je sudý počet plusů. Důkaz samoduality probíhá stejně jako u Γ_8 a i zde je možné vybrat 16 základních mřížkových vektorů.

To jsou důvody, proč promýšlíme teorii heterotické struny jen s kalibrační grupou $\mathbb{S}pin(32)/\mathbb{Z}_2$ (odpovídající mřížce Γ_{16}) nebo (zajímavější) grupou $\mathbb{E}_8 \times \mathbb{E}_8$ (s mřížkou $\Gamma_8 \times \Gamma_8$).

12.5 Superalgebry a supersymetrie

Nejprve si řekněme ještě něco o obyčejných algebrách, například o algebře Poincaré. Jde o Lieovu algebru, generující isometrie časoprostoru včetně posunutí. Za její basi lze tedy vybrat $\mathbf{J}^{\mu\nu}$, tedy generátory Lorentzovy grupy (resp. otočení) a $\mathbf{p}^\mu$, generátory posunů (značení se kryje s označením momentu hybnosti a hybnosti, a snad již mnozí z vás poznali, že to není náhoda).

Komutační relace budou

$$\begin{gathered}[\mathbf{p}^\mu, \mathbf{p}^\mu] = 0, \quad [\mathbf{p}^\mu, \mathbf{J}^{\alpha\beta}] = i(g^{\mu\beta}\mathbf{p}^\alpha - g^{\mu\alpha}\mathbf{p}^\beta),\\ [\mathbf{J}^{\mu\nu}, \mathbf{J}^{\alpha\beta}] = -i(g^{\nu\alpha}\mathbf{J}^{\mu\beta} - g^{\mu\alpha}\mathbf{J}^{\nu\beta} + g^{\mu\beta}\mathbf{J}^{\nu\alpha} - g^{\nu\beta}\mathbf{J}^{\mu\alpha})\end{gathered} \tag{12.72}$$

$g^{\mu\nu}$ je zde metrický tensor. Jacobiho identitu můžete zkontrolovat přímým výpočtem.

Kromě obyčejných algeber se dnes hodně mluví i o **graduovaných algebrách** neboli **superalgebrách**. Ta lze psát jako lineární obal prvků, kterými již nebudou pouze operátory, které jsou zvyklé s většinou ostatních komutovat, nýbrž také grassmannské operátory, které spolu typicky navzájem antikomutují $ab = -ba$ (ovšem s negrassmannskými typicky komutují) a u nichž je tedy lepší mluviti o **antikomutátoru** $\{a, b\} = ab + ba$. Jednotným jazykem, **superkomutátor** neboli **graduovaný komutátor** dvou operátorů $[a, b]_{grad}$ je antikomutátorem, pokud jsou oba grassmannské, jinak je komutátorem.

Chceme-li transformovat objekty prvkem grupy $\mathbf{g}$ blízkým jednotkovému, napíšeme tento jako $\mathbf{g} = \mathbf{1} + d\zeta^i \mathbf{s}_i$, kde $d\zeta^i$ jsou infinitesimální (nekonečně malé) parametry a $\mathbf{s}$ base generátoru. Pokud jsou $\mathbf{s}_i$ grassmannské, musí být grassmannské i $d\zeta^i$; představme si pod nimi grassmannské „číselné“ parametry, např. grassmannské operátory, které komutují se všemi negrassmannskými a antikomutují se všemi grassmannskými.

Jestliže fysika pracovala do šedesátých nebo sedmdesátých let jen s algebrami, působením jejichž transformací mohly přecházet elektrony do neutrin, červené kvarky do modrých anebo se systémy mohly otáčet nebo posouvat, v posledních dvaceti letech promýšlejí teoretici i tzv. **supersymetrie**, pomocí nichž lze transformovat bosony na fermiony a naopak. Uvádíme jako příklad supersymetrii na světelném kuželi v desetirozměrném časoprostoru, která proti algebře Poincaré obsahuje navíc i grassmannské operátory $\mathbf{Q}^a$ a $\mathbf{Q}^{\dot{a}}$. Pohleďme tedy zběžně na některé superkomutátory algebry super-Poincaré:

$$\begin{gathered}\{\mathbf{Q}^a, \mathbf{Q}^b\} = 2\mathbf{p}^+ \delta^{ab}, \quad \{\mathbf{Q}^{\dot{a}}, \mathbf{Q}^{\dot{b}}\} = 2\mathbf{p}^- \delta^{\dot{a}\dot{b}}, \quad \{\mathbf{Q}^a, \mathbf{Q}^{\dot{b}}\} = \sqrt{2}\gamma^i_{a\dot{b}} \mathbf{p}^i, \\ [\mathbf{J}^{i-}, \mathbf{Q}^a] = \frac{i}{\sqrt{2}} \gamma^i_{a\dot{a}} \mathbf{Q}^{\dot{a}} \dots\end{gathered} \tag{12.73}$$

(Indexy a resp. $\dot{a}$ jsou osmiznačné spinorové indexy[12] grupy $\mathbb{SO}(8)$, γ jsou Diracovy matice, indexy $\pm$ odpovídají kalibraci na světelném kuželi $v^{\pm} = 2^{-1/2}(v^0 \pm v^9)$ atd.) Všimněte si, že antikomutátor dvou supersymetrií je úměrný posunu. To všechno má názorné vysvětlení, rozšíříme-li pojem prostoru na superprostor, který kromě komutujících souřadnic navíc obsahuje i antikomutující, protože v něm je supersymetrie geometrickou operací.

Supersymetrie zajišťuje teoriím zajímavé vlastnosti: její začlenění do teorie strun odstraní z této teorie tachyony (částice pohybující se nadsvětelnou rychlostí), jelikož např. $\{\mathbf{Q}^{\mathrm{i}}, \mathbf{Q}^{\mathrm{i}}\} = 2\mathbf{p}^-$ tj. $\mathbf{p}^- = \mathbf{Q}^{\mathrm{i}}\mathbf{Q}^{\mathrm{i}}$, operátor $\mathbf{Q}^{\mathrm{i}}$ je hermitovský a střední hodnota $\mathbf{p}^-$ ve stavu $|\psi\rangle$ je tedy nezáporná, poněvadž jde o čtverec normy $\langle\psi|\mathbf{Q}^{\mathrm{i}}\mathbf{Q}^{\mathrm{i}}|\psi\rangle$ vektoru $\mathbf{Q}^{\mathrm{i}}|\psi\rangle$. Navíc implikuje stejný počet fermionových a bosonových stavů na každé hladině; každý fermion má svého bosonového partnera a naopak (užívají se pro ně názvy jako **fotino, gluino, gravitino, selektron, skvark**). Supersymetrie zaručuje v mno-

[12] Šestnáct operátorů $\mathbf{Q}^a$, $\mathbf{Q}^{\dot{b}}$ se transformuje jako 16-rozměrná reálná representace grupy $\mathbb{SO}(9,1)$ (jíž je $\mathbb{SO}(8)$ podgrupou) – totiž jako spinorová representace dané (třeba kladné) chirality. Pro srovnání – spinorová representace kladné chirality grupy $\mathbb{SO}(10)$ je také 16-rozměrná, ovšem komplexní.

ha případech vymizení kosmologické konstanty (hustoty vakua) a záhadou naopak zůstává, proč je kosmologická konstanta nulová (nebo podle pozorování přinejmenším o 120 řádů menší než očekávané náhodné příspěvky od různých polí) i v našem světě, který supersymetrický není nebo kde je supersymetrie narušena. A za zmínku stojí i fakt, že supersymetrie klade omezující podmínky na dimensi časoprostoru.

Již jen poznamenejme, že podobně, jako obecná teorie relativity požaduje, aby se parametry Lorentzovy transformace mohly měnit od bodu k bodu, lze tuto lokálnost požadovat od supersymetrie a získáme tak různé teorie **supergravitace**.

12.6 Obří vyňatá grupa

Cílem této sekce, v níž sledujeme přílohu 6.A skvělé knihy Michaela B. Greena, Johna H. Schwarze a Edwarda Wittena *Superstring theory*, je ukázat explicitní konstrukci **obří grupy** (resp. odpovídající algebry) $\mathbb{E}_8$. Proč jí říkáme obří? Protože má ze všech prostých vyňatých grup největší dimensi (248) a navíc (chápeme-li míru symetrie jako poměr dimense a kvadrátu ranku, aby se klasické grupy $\mathbb{SO}(n)$ asymptoticky touto veličinou blížily konstantě), dosahuje rekordní hodnoty 31/8.

Konstrukci začneme podalgebrou $\mathbb{SO}(16)$, kterou generuje $16\cdot 15/2 = 120$ operátorů $J_{ij} = -J_{ji}$, splňujících obvyklé komutační relace

$$[J_{ij}, J_{kl}] = J_{il}\delta_{jk} - J_{jl}\delta_{ik} - J_{ik}\delta_{jl} + J_{jk}\delta_{il}, \qquad (12.74)$$

a přidáme k nim 128 generátorů Q_α (celková dimense tedy bude $120+128 = 248$), které se transformují jako spinory $\mathbb{SO}(16)$ dané (řekněme kladné) chirality, čímž míníme, že[13]

$$[J_{ij}, Q_\alpha] = Q_\beta(\sigma_{ij})_{\beta\alpha}. \qquad (12.75)$$

K dokončení specifikace algebry musíme dodefinovat zbývající komutátor $[Q_\alpha, Q_\beta]$ (je to komutátor a ne antikomutátor, protože usilujeme o definici algebry a nikoli superalgebry). Teorie grupy však $\mathbb{SO}(16)$ tento komutátor až na normalisaci určuje jednoznačně;

$$[Q_\alpha, Q_\beta] = (\sigma_{ij})_{\alpha\beta} J_{ij} \qquad (12.76)$$

[13] Gamma matice splňující $\{\gamma_i, \gamma_j\} = \delta_{ij}$ mohou být pro $\mathbb{SO}(16)$ vybrány reálné. Definujeme dále jejich antisymetrisované součiny $\gamma_{i_1 i_2 \dots i_n} = \gamma_{\langle i_1}\gamma_{i_2}\dots\gamma_{i_n\rangle} \equiv (\gamma_{i_1}\gamma_{i_2}\dots\gamma_{i_n} \pm\text{permutace})/n!$, operátor chirality $\overline{\gamma} = \gamma_{1,2\dots 16}$ a $\sigma_{ij} = \gamma_{ij}/2 = [\gamma_i, \gamma_j]/4$.

kladný faktor κ, kterým by nám teorie $\mathbb{SO}(16)$ dovolila násobit pravou stranu, lze absorbovat do $\sqrt{\kappa}$-násobného přeškálování Q_α, jejichž normalisaci totiž žádná z předchozích formulí neomezovala. Volba $\kappa < 0$ by vedla k nekompaktní formě algebry $\mathbb{E}_{8(8)}$, známé ze supergravitačních teorií. Jestliže tedy Lieova algebra $\mathbb{E}_8$ s rozkladem přidružené representace

$$\mathbf{248} = \mathbf{120} \oplus \mathbf{128} \tag{12.77}$$

vůči její maximální[14] podgrupě $\mathbb{S}pin(16)$ existuje, na jejích komutačních relacích daných prvými třemi vysazenými rovnicemi není co štelovat.

K utvrzení se, že formule opravdu definují Lieovu algebru, je třeba ověřit Jacobiho identitu. (Už její splnění nám garantuje existenci matic, které splňují tytéž relace jako abstraktní operátory J_{ij} a Q_α, tj. existenci representace.) Z cvičných důvodů doporučujeme explicitní kontrolu JJJ identity, která pouze vyjadřuje, že J_{ij} formují Lieovu algebru, JJQ identity, která zase potvrzuje, že se Q_α opravdu transformují jako representace $\mathbb{SO}(16)$. Ani JQQ identita neklade zvláštní požadavky a její platnost je podložena zvláště tím, že σ_{ij} matice splňují touž algebru jako J_{ij}. Opravdu zásadní případ volající po kontrole je identita $[[Q_\alpha, Q_\beta], Q_\gamma] + [[Q_\beta, Q_\gamma], Q_\alpha] + [[Q_\gamma, Q_\alpha], Q_\beta] = 0$. Rozepsání vede k požadavku

$$\forall_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} \quad \sum_{ij} (\sigma_{ij})_{\alpha\beta}(\sigma_{ij})_{\gamma\delta} + (\sigma_{ij})_{\beta\gamma}(\sigma_{ij})_{\alpha\delta} + (\sigma_{ij})_{\gamma\alpha}(\sigma_{ij})_{\beta\delta} = 0, \tag{12.78}$$

kterou máme dokázat pro případ, že α, β, γ jsou indexy jedné chirality.

Všimneme si, že produkt dvou spinorů může být rozepsán na kombinaci úplného systému gamma-matic $\gamma_{i_1 \dots i_n}$ pro $n = 0 \dots 16$, čili nulovost poslední formule je ekvivalentní nulovosti jejího zúžení s $(\gamma_{k_1 \dots k_n})_{\alpha\beta}$ pro všechna n a $k_1 \dots k_n$. Díky shodné chiralitě indexů α, β se staráme jen o sudá n a antisymetrie dokazované formule v α, β nám dává možnost omezit se na případ antisymetrických[15] $\gamma_{k_1 \dots k_n}$, což díky elementárním vlastnostem gamma-matic znamená $n = 2, 6, 10, 14$. Ve skutečnosti nám vztah $\gamma_{i_1 \dots i_k} = \epsilon_{i_1 \dots i_{16}} \gamma_{i_{k+1} \dots i_{16}} \overline{\gamma}/(16-k)!$ a fakt, že operátor chirality $\overline{\gamma}$ lze vynechat, účinkuje-li na spinory kladné chirality, zmenší práci na polovinu. Že nám stačí prohlédnout jen $n = 2$ a $n = 6$ lze spatřit už na shodnosti počtu

[14] Maximalitou zde nemíníme shodnost ranků podgrupy a celé grupy, ale přesněji nemožnost najít větší vlastní podgrupu.

[15] Pro $n = 0, 4, 8, 12, 16$ jsou $\gamma_{k_1 \dots k_n}$ symetrické a tudíž jejich úžení s antisymetrickým výrazem vymizí triviálně.

nezávislých členů v antisymetrické kombinaci Q_α a Q_β (nalevo)

$$\frac{128 \cdot 127}{2 \cdot 1} = \frac{16 \cdot 15}{2 \cdot 1} + \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \tag{12.79}$$

a součtu počtů nezávislých komponent $\gamma_{i_1 \dots i_n}$ pro $n = 2$ a $n = 6$.

Zúžení se[16] $(\sigma_{kl})_{\alpha\beta} = -(\sigma_{kl})_{\beta\alpha}$ dá

$$-(\mathrm{Tr}_+ \, \sigma_{kl}\sigma_{ij}) \cdot (\sigma_{ij})_{\gamma\delta} + 2(\sigma_{ij}\sigma_{kl}\sigma_{ij})_{\gamma\delta}, \tag{12.80}$$

což se užitím Diracových identit anuluje; prvý resp. druhý člen se rovnají $\pm 64(\sigma_{kl})_{\gamma\delta}$. Faktor 64 u druhého členu vzejde z inventury kladných a záporných příspěvků (znaménko podle parity počtu prvků průniku množin indexů $\{i, j\}$ a $\{k, l\}$) $2 \cdot 1/2 + 14 \cdot 13/2 - 14 \cdot 2$. Kontrakcí s $(\gamma_{i_1 \dots i_6})_{\alpha\beta}$ dostaneme (první člen teď již nepřispěje)

$$2(\sigma_{ij}\gamma_{i_1 \dots i_6}\sigma_{ij})_{\gamma\delta}, \tag{12.81}$$

což opět vymizí: klíčovou je zde rovnost $45 \cdot 1 + 1 \cdot 15 - 10 \cdot 6 = 0$ při bilanci příspěvků $\pm\gamma_{i_1 \dots i_6}$.

Přidání spinoru k přidružené representaci grupy $\mathbb{SO}(N)$ vede k nové Lieově algebře jen ve třech případech: kromě $N = 16$, což přináší $\mathbb{E}_8$, se dá v úplné analogii sestrojit 52-rozměrná vyňatá grupa $\mathbb{F}_4$ přidáním 16-rozměrného spinoru k 36-rozměrné přidružené representaci $\mathbb{SO}(9)$. Podobnost je opravdu velkolepá; v 16-rozměrné spinorové representaci $\mathbb{SO}(9)$ lze vzít za úplný soubor matic matice $\gamma_{i_1 \dots i_n}$ pro $n = 0, 2, 4, 6, 8$ a antisymetrie nám dovolí omezit se opět na $n = 2$ a $n = 6$. Vzorce zůstanou, jen čísla se obmění; ± 8 místo ± 64, osmičku v druhém členu dostaneme jako $2 \cdot 1/2 + 7 \cdot 6/2 - 7 \cdot 2$ a místo $45 + 15 - 60$ bude požrání u $n = 6$ vypadat $3 \cdot 2/2 + 6 \cdot 2/2 - 3 \cdot 6$.

Třetí možností je přidání osmirozměrného spinoru k přidružené representaci $\mathbb{SO}(8)$, čímž získáme grupu $\mathbb{SO}(9)$ způsobem, který se liší $\mathbb{SO}(8)$ rotací triality od standardnější a jednodušší konstrukce – totiž přidání 8-vektoru $J_i = J_{i9}$ k přidružené representaci $\mathbb{SO}(8)$.

Nyní bychom rádi popsali některé podgrupy $\mathbb{E}_8$. Jednu maximální podgrupu – $\mathbb{SO}(16)$ – jsme již uvedli. Ta obsahuje maximální podgrupu $\mathbb{SO}(10) \times \mathbb{SO}(6)$, vůči níž se její přidružená representace rozpadá na přidružené representace složek a na produkt vektorů

$$\mathbf{120} = (\mathbf{45}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{15}) \oplus (\mathbf{10}, \mathbf{6}). \tag{12.82}$$

[16] Ekvivalentní jako úžení s $(\gamma_{kl})_{\alpha\beta}$. Tr_+ značí stopu v positivně chirální spinorové representaci.

Jak se vůči této podgrupě transformuje spinor $\mathbb{SO}(16)$? Šestnáct γ-matic $\gamma_{1\ldots16}$, pomocí nichž definujeme tvar operátorů ve spinorové representaci, se rozpadne na prvních deset $\gamma_{1\ldots10}$, které můžeme považovat za matice $\mathbb{SO}(10)$, a posledních šest $\gamma_{11\ldots16}$, které zaměstnáme jako matice $\mathbb{SO}(6)$. Spinor $\mathbb{SO}(16)$ je tedy alespoň v prvním přiblížení součinem spinorů $\mathbb{SO}(10)$ a $\mathbb{SO}(6)$. A co s chiralitou? Operátor chirality $\mathbb{SO}(16)$ $\overline{\gamma} = \gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{16}$ je zjevně součinem operátoru chirality $\mathbb{SO}(10)$ $\gamma^{(10)} = \gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{10}$ a podobného u $\mathbb{SO}(6)$ $\gamma^{(6)} = \gamma_{11}\gamma_{12}\ldots\gamma_{16}$.

$$\overline{\gamma} = \gamma^{(10)}\gamma^{(6)} \tag{12.83}$$

Tedy spinor Q_α positivní chirality grupy $\mathbb{SO}(16)$, který při konstrukci $\mathbb{E}_8$ přidáváme k J_{ij}, se rozpadá na dva kusy s vlastními čísly $\gamma^{(10)} = \gamma^{(6)} = +1$ resp. $\gamma^{(10)} = \gamma^{(6)} = -1$. Označíme-li spinory positivní či negativní chirality grupy $\mathbb{SO}(10)$ resp. $\mathbb{SO}(6)$ jako $\mathbf{16}$ či $\overline{\mathbf{16}}$ resp. $\mathbf{4}$ či $\overline{\mathbf{4}}$ (dimense spinorových representací jsme již diskutovali), máme rozklad $\mathbf{128}$ grupy $\mathbb{SO}(16)$

$$\mathbf{128} = (\mathbf{16}, \mathbf{4}) \oplus (\overline{\mathbf{16}}, \overline{\mathbf{4}}), \tag{12.84}$$

který ve spojení s rozkladem přidružené representace výše udává způsob transformace fundamentální representace $\mathbb{E}_8$ (u této grupy je to tatáž co přidružená) vůči této podgrupě.

Nyní máme tu milou povinnost představit vám grupu $\mathbb{E}_6$ jako podgrupu $\mathbb{E}_8$. Jako předehru si uvědomme, že ve $\mathbf{4}$ grupy $\mathbb{SO}(6)$ jsou generátory hermitovskými 4×4 maticemi, jejichž bezstopost zabezpečuje prostota grupy $\mathbb{SO}(6)$; jsou tedy $\mathbb{SU}(4)$ generátory – neboli $\mathbb{SO}(6)$ je podalgebrou $\mathbb{SU}(4)$. Postřehnutím shodné dimense 15 u obou docílíme přesvědčení, že nemůže jíti o vlastní podalgebru: musí jít o isomorfní algebry.[17] Tato cesta nás současně poučila, že fundamentální $\mathbf{4}$ a $\overline{\mathbf{4}}$ grupy $\mathbb{SU}(4)$ se chovají v $\mathbb{SO}(6)$ jako spinory kladné resp. záporné chirality. Naopak, fundamentální (vektorová) representace $\mathbf{6}$ grupy $\mathbb{SO}(6)$ je antisymetrickým tensorem druhého ranku grupy $\mathbb{SU}(4)$, který má dimensi $4 \cdot 3/2 \cdot 1 = 6$, jak má být. (Je jedno, zda bereme $\mathbf{4}\wedge\mathbf{4}$ nebo $\overline{\mathbf{4}}\wedge\overline{\mathbf{4}}$; tyto representace jsou ekvivaletní, jelikož je lze přepočítávat pomocí antisymetrického tensoru Levi-Civitty $v_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}v^{\gamma\delta}/2$.)

A tak mluvme místo o podalgebře $\mathbb{SO}(10) \times \mathbb{SO}(6)$ o $\mathbb{SO}(10) \times \mathbb{SU}(4)$. Dále, $\mathbb{SU}(4)$ má očividnou podgrupu $\mathbb{SU}(3) \times \mathbb{U}(1)$. Značíme-li horními indexy $\mathbb{U}(1)$ náboje, rozkládá se nám $\mathbf{4}$ grupy $\mathbb{SU}(4)$ na $\mathbf{1}^3 \oplus \mathbf{3}^{-1}$, $\mathbf{6}$ grupy

[17] To jsme již mohli spatřit na shodných Dynkinových diagramech $\mathbb{SO}(6)$ a $\mathbb{SU}(4)$ poté, co jsme je zkonstruovali obecně pro $\mathbb{SO}(n)$ a $\mathbb{SU}(n)$.

$\mathbb{SU}(4)$ – právě ztotožněný s antisymetrickým součinem dvou $\mathbf{4}$, se transformuje jako $\mathbf{3}^2 \oplus \overline{\mathbf{3}}^{-2}$ a přidružená representace $\mathbb{SU}(4)$, což je vlastně $\mathbf{4} \otimes \overline{\mathbf{4}} - \mathbf{1}$ (-1 značí odstraněný singlet – stopu) se pod $\mathbb{SU}(3) \times \mathbb{U}(1)$ transformuje jako $\mathbf{8}^0 \oplus \mathbf{3}^{-4} \oplus \overline{\mathbf{3}}^4 \oplus \mathbf{1}^0$, kde $\mathbf{8}$ znamená přidruženou $\mathbb{SU}(3)$. Kombinací všech faktů docházíme k vysněnému rozkladu přidružené representace $\mathbb{E}_8$ vůči podgrupě $\mathbb{SO}(10) \times \mathbb{SU}(3) \times \mathbb{U}(1)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{248} \quad = \quad & ((\mathbf{45}, \mathbf{1})^0 \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1})^0 \oplus (\mathbf{16}, \mathbf{1})^3 \oplus (\overline{\mathbf{16}}, \mathbf{1})^{-3}) \oplus \\ & \oplus ((\mathbf{16}, \mathbf{3})^{-1} \oplus (\mathbf{10}, \mathbf{3})^2 \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{3})^{-4}) \oplus \\ & \oplus ((\overline{\mathbf{16}}, \overline{\mathbf{3}})^1 \oplus (\mathbf{10}, \overline{\mathbf{3}})^{-2} \oplus (\mathbf{1}, \overline{\mathbf{3}})^4) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{8})^0. \end{aligned} \tag{12.85}$$

Zvláštní pozornosti zaslouží 78 generátorů, které jsou $\mathbb{SU}(3)$ singlety. Neb komutátor dvou $\mathbb{SU}(3)$ singletů musí být opět $\mathbb{SU}(3)$ singlet, lze usoudit, že těchto 78 generátorů tvoří uzavřenou podalgebru (těch generátorů, které s onou $\mathbb{SU}(3)$ komutují, někdy zvanou **centralisátor** grupy $\mathbb{SU}(3)$); je známa jako vyňatá Lieova algebra $\mathbb{E}_6$. Evidentní je maximální subalgebra $\mathbb{SO}(10) \times \mathbb{U}(1)$, vůči níž se přidružená representace $\mathbb{E}_6$ rozkládá podle předpisu

$$\mathbf{78} = \mathbf{45}^0 \oplus \mathbf{16}^3 \oplus \overline{\mathbf{16}}^{-3} \oplus \mathbf{1}^0. \tag{12.86}$$

A co víc, rozklad $\mathbf{248}$ obsahuje 27 kopií $\mathbf{3}$ grupy $\mathbb{SU}(3)$. Tyto se musí zobrazovat na sebe při $\mathbb{E}_6$ transformacích , a tak musí mít $\mathbb{E}_6$ nějakou 27-rozměrnou representaci s $\mathbb{SO}(10) \times \mathbb{U}(1)$ rozkladem

$$\mathbf{27} = \mathbf{16}^{-1} \oplus \mathbf{10}^2 \oplus \mathbf{1}^{-4}. \tag{12.87}$$

Jistotu zvýšíme ověřením, že $16 \cdot (-1) + 10 \cdot 2 + 1 \cdot (-4) = 0$ stopa $\mathbb{U}(1)$ generátoru v representaci $\mathbf{27}$ grupy $\mathbb{E}_6$ je nula. To je v souhlase s faktem, že stopa každého generátoru nějaké prosté Lieovy algebry vymizí v každé representaci (onen $\mathbb{U}(1)$ generátor je jedním ze 78 generátorů $\mathbb{E}_6$). Tím také dokazujeme ireducibilitu, jelikož tato stopa by se neanulovala po vyškrtnutí některých členů rozkladu $\mathbf{27}$. Komplexně sdruženou representací jsou $\overline{\mathbf{3}}$

$$\overline{\mathbf{27}} = \overline{\mathbf{16}}^1 \oplus \mathbf{10}^2 \oplus \mathbf{1}^4. \tag{12.88}$$

Poslední vysazené formule nejsou zjevně vzájemně isomorfní, takže $\mathbf{27}$ a $\overline{\mathbf{27}}$ jsou komplexní representace, neekvivalentní k nim komplexně sdruženým. $\mathbb{E}_6$ je opravdu jedinou vyňatou Lieovou algebrou, která vůbec komplexní representace má. Posbíráním členů lze dojít k rozkladu $\mathbf{248}$ grupy $\mathbb{E}_8$ vůči maximální podgrupě $\mathbb{E}_6 \times \mathbb{SU}(3)$.

$$\mathbf{248} = (\mathbf{78}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{8}) \oplus (\mathbf{27}, \mathbf{3}) \oplus (\overline{\mathbf{27}}, \overline{\mathbf{3}}) \tag{12.89}$$

Užijeme-li maximální podgrupu $\mathbb{SU}(2) \times \mathbb{U}(1)$ grupy $\mathbb{SU}(3)$ a označíme-li horními indexy $\mathbb{U}(1)$ náboj, máme

$$\begin{aligned} \mathbf{248} \;=\; & (\mathbf{78},\mathbf{1})^0 \oplus (\mathbf{1},\mathbf{3})^0 \oplus (\mathbf{1},\mathbf{2})^{-3} \oplus (\mathbf{1},\overline{\mathbf{2}})^3 \oplus \\ & (\mathbf{1},\mathbf{1})^0 \oplus (\mathbf{27},\mathbf{1})^2 \oplus (\mathbf{27},\mathbf{2})^{-1} \oplus (\overline{\mathbf{27}},\mathbf{1})^{-2} \oplus (\overline{\mathbf{27}},\overline{\mathbf{2}})^1. \end{aligned} \tag{12.90}$$

Posbíráním $\mathbb{SU}(2)$ singletů dostaneme 133-rozměrnou přidruženou representaci další vyňaté grupy $\mathbb{E}_7$, která se rozkládá pod maximální podgrupou $\mathbb{E}_6 \times \mathbb{U}(1)$ na

$$\mathbf{133} = \mathbf{78}^0 \oplus \mathbf{1}^0 \oplus \mathbf{27}^2 \oplus \overline{\mathbf{27}}^{-2}. \tag{12.91}$$

Shromážděním dubletů (u grupy $\mathbb{SU}(2)$ je representace $\mathbf{2}$ pseudoreálná a tedy isomorfní $\overline{\mathbf{2}}$!) získáme fundamentální 56-rozměrnou representaci $\mathbb{E}_7$ s $\mathbb{E}_6 \times \mathbb{U}(1)$ rozkladem

$$\mathbf{56} = \mathbf{1}^{-3} \oplus \mathbf{1}^3 \oplus \mathbf{27}^{-1} \oplus \overline{\mathbf{27}}^1, \tag{12.92}$$

a můžeme tedy zapsat rozklad $\mathbf{248}$ grupy $\mathbb{E}_8$ pro maximální podgrupu $\mathbb{E}_7 \times \mathbb{SU}(2)$

$$\mathbf{248} = (\mathbf{133},\mathbf{1}) \oplus (\mathbf{56},\mathbf{2}) \oplus (\mathbf{1},\mathbf{3}). \tag{12.93}$$

Kromě $\mathbb{E}_6$, $\mathbb{E}_7$, $\mathbb{E}_8$ známe ještě vyňaté grupy $\mathbb{F}_4$ a $\mathbb{G}_2$. Zmíněnou $\mathbb{SO}(9)$ konstrukci grupy $\mathbb{F}_4$ lze vnořit do $\mathbb{SO}(16)$ výstavby $\mathbb{E}_8$ omezením se na J_{ij} pro $i,j = 1\ldots 9$ a výběrem 16 složek spinoru ze $\mathbf{128}$, která se vůči $\mathbb{SO}(9) \times \mathbb{SO}(7)$ podgrupě $\mathbb{SO}(16)$ rozkládá na $(\mathbf{16},\mathbf{8})$, stejně jako $\mathbf{128'}$.

Zajímavý je centralisátor grupy $\mathbb{F}_4$ v $\mathbb{E}_8$. Musí jím být kombinace J_{ij} (spinory Q_α sotva donutíme komutovat s ostatními), a to podgrupa $\mathbb{SO}(7)$ (aby komutovala s $\mathbb{SO}(9)$ podgrupou $\mathbb{F}_4$). Navíc musí zachovávat náš výběr $(\mathbf{16},\mathbf{1})$ z $(\mathbf{16},\mathbf{8})$, tj. půjde o podgrupu $\mathbb{SO}(7)$ fixující jeden element osmirozměrné spinorové representace. Této grupě se říká $\mathbb{G}_2$ a je to současně grupa symetrií Cayleyovy malé násobilky, jak jsme již uvedli v kapitolce o oktonionech. Tedy $\mathbb{E}_8$ obsahuje podgrupu $\mathbb{F}_4 \times \mathbb{G}_2$. Mimo jiné, trojindexový antisymetrický invariant lze teď získat z invariantního spinoru s_α jako

$$y^{mno} = s_\alpha \tilde{\gamma}^{\langle m}_{\alpha\beta} \tilde{\gamma}^{n}_{\beta\gamma} \tilde{\gamma}^{o\rangle}_{\gamma\delta} s_\delta, \tag{12.94}$$

kde $\tilde{\gamma}^i = \gamma^i\gamma^8$ jsou gamma-matice $\mathbb{SO}(7)$ upravené tak, aby působily uvnitř representace, splňující $\{\tilde{\gamma}^i, \tilde{\gamma}^j\} = -\delta^{ij}$.

A očekávali byste jiný rozpad $\mathbf{248}$ grupy $\mathbb{E}_8$ vůči podgrupě $\mathbb{F}_4 \times \mathbb{G}_2$ než direktní sumu přidružených representací a produktu fundamentálních?

$$\mathbf{248} = (\mathbf{52},\mathbf{1}) \oplus (\mathbf{26},\mathbf{7}) \oplus (\mathbf{1},\mathbf{14}). \tag{12.95}$$

Pokud jste této sekci vůbec nerozuměli, nesmutněte a raději si zkontrolujte poslední rovnost, značí-li $\oplus$ sčítání a závorky násobení. ($\heartsuit\heartsuit$)

Kapitola 13

Nilpotence, Jordanův tvar

Následující kapitola pojednává opět o „čistě lineárně algebraickém“ tématu – o nalezení Jordanova tvaru matice. Jde o jisté vyvrcholení té části lineární algebry, kde se neuvažuje skalární součin. K porozumění je třeba dobrého osvojení základů lineární algebry – pojmů dimense, hodnost, vlastní číslo a vlastní vektor (a ničeho jiného).

MOTTO KAPITOLY. K dané matici $\mathbf{A}$ najděte „co nejjednodušší“ podobnou matici $\mathbf{D}$, tzn. vyjádřete $\mathbf{A} = \mathbf{CDC}^{-1}$, kde $\mathbf{D}$ má nějaký standardní tvar, s nímž se dobře pracuje.

Viděli jsme, že „nejjednodušší“ často znamená „diagonální“, a to u zobrazení, které má basi složenou z vlastních vektorů. To je však z hlediska této kapitoly spíše triviální případ. Ti, kteří nepřikládají studiu Jordanova tvaru velkou pozornost, by si měli nalézt vhodné argumenty: jedním z nejsilnějších je, že nediagonalisovatelná matice nebo operátor je „křehká“ vůči typické perturbaci – změníme-li byť jen o malinko maticové elementy, matice se stane diagonalisovatelnou. Je „nekonečně málo pravděpodobné“, že „náhodně vybraný“ operátor nebude diagonalisovatelný (dimense množiny takových je menší než dimense prostoru matic všech). Mnohé přirozené příklady nediagonalisovatelných operátorů nám nicméně nabízí analýza.

PŘÍKLADY. Operátor derivování na prostoru polynomů nejvýše n-tého stupně

$$\frac{d}{dx} : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n \tag{13.1}$$

$$\text{má vůči basi} \quad 1, x, \frac{x^2}{2!}, \frac{x^3}{3!}, \ldots, \frac{x^n}{n!} \tag{13.2}$$

$$\text{matici} \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} \circ & 1 & \circ & \circ \\ \circ & \circ & 1 & \circ \\ \circ & \circ & \circ & 1 \\ \circ & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}. \tag{13.3}$$

$$\text{Podobně operátor třetí derivace} \quad \frac{d^3}{dx^3} : \mathcal{P}_{10} \to \mathcal{P}_{10} \tag{13.4}$$

$$\text{má vzhledem k basi} \quad 1, \frac{x^3}{3!}, \frac{x^6}{6!}, \frac{x^9}{9!}, x, \frac{x^4}{4!}, \frac{x^7}{7!}, \frac{x^{10}}{10!}, \frac{x^2}{2!}, \frac{x^5}{5!}, \frac{x^8}{8!} \tag{13.5}$$

$$\text{matici} \quad \mathbf{N}' = \begin{pmatrix} \mathbf{N}_4 & \circ & \circ \\ \circ & \mathbf{N}_4 & \circ \\ \circ & \circ & \mathbf{N}_3 \end{pmatrix}, \tag{13.6}$$

kde matice $\mathbf{N}_i$ je matice $i \times i$ typu z minulého příkladu.

Všimněte si, že $\mathbf{N}^{n+1} = \mathbf{0}$, $(\mathbf{N}')^4 = \mathbf{0}$.

Úkoly. Najděte co nejjednodušší vyjádření maticemi uvedeného typu pro operátory

1. k-té derivace pro obecné přirozené k
2. pro libovolný diferenciální operátor s konstantními koeficienty, např. pro
$$\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} \tag{13.7}$$
3. pro diferenciální operátor s polynomiálními koeficienty, např. (můžete se omezit jen na případ polynomů nižšího stupně, než je stupeň derivace, před nímž stojí)
$$x\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx}. \tag{13.8}$$

Definice. Matice $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}'$ byly typickými příklady **nilpotentních operátorů**. To je takový operátor $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$, že $\exists n \in \mathbb{N}$ takové, že

$$f^n \equiv \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \, \text{krát}} = 0. \tag{13.9}$$

Číslu n (nejmenšímu možnému) říkáme **stupeň** operátoru. Podobně **stupeň vektoru** $\vec{\mathbf{v}}$ je nejmenší číslo k takové, aby $f^k(\vec{\mathbf{v}}) = \vec{\mathbf{0}}$.

VĚTA. $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ je nilpotentní $\Leftrightarrow$ jeho jediným vlastním číslem je nula.

DŮKAZ. *Implikace doprava je triviální částí důkazu:*

$$\textit{Je-li } f(\vec{\mathbf{v}}) = \lambda\vec{\mathbf{v}}, \textit{ pak } f^k(\vec{\mathbf{v}}) = \vec{\mathbf{0}} \Leftrightarrow \lambda^k\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{0}} \Rightarrow \lambda^k = 0 \Rightarrow \lambda = 0. \tag{13.10}$$

Pro netriviální část důkazu sestrojíme řetězec do sebe vnořených podprostorů

$$\{\vec{\mathbf{0}}\} = \mathbb{K}\mathrm{er}^{\,0} \subsetneq \mathbb{K}\mathrm{er}^{\,1} \subsetneq \mathbb{K}\mathrm{er}^{\,2} \subsetneq \ldots \subsetneq \mathbb{K}\mathrm{er}^{\,k} = \mathbb{K}\mathrm{er}^{\,k+1} = \mathbb{V}, \tag{13.11}$$

$$\textit{kde} \quad \mathbb{K}\mathrm{er}^{\,i} = \{\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{V} \mid f^i(\vec{\mathbf{v}}) = \vec{\mathbf{0}}\} \tag{13.12}$$

$$\text{a } \mathbb{I}\mathrm{m}^{\,i} = f^i(\mathbb{V}) = \{\vec{\mathbf{w}} = f^i(\vec{\mathbf{v}}) \mid \vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{V}\}. \tag{13.13}$$

Z minulého semestru dobře víme, že $\dim \mathbb{I}\mathrm{m}^{\,i} + \dim \mathbb{K}\mathrm{er}^{\,i} = \dim \mathbb{V}$.

LEMMA. Nemá-li f nenulová vlastní čísla a je-li $\mathbb{K}\mathrm{er}^{\,i} = \mathbb{K}\mathrm{er}^{\,i+1}$, tak $\mathbb{K}\mathrm{er}^{\,i} = \mathbb{V}$. Z toho pak plyne implikace věty doleva, protože $f^i = 0$.

DŮKAZ LEMMATU. *Je tedy* $\mathbb{I}\mathrm{m}^{\,i} = \mathbb{I}\mathrm{m}^{\,i+1}$. *To ale znamená, že zobrazení*

$$f : \mathbb{I}\mathrm{m}^{\,i} \to \mathbb{I}\mathrm{m}^{\,i+1} \equiv \mathbb{I}\mathrm{m}^{\,i} \tag{13.14}$$

je vzájemně jednoznačné a tedy regulární na $\mathbb{I}\mathrm{m}^{\,i}$. *Musí být* $\mathbb{I}\mathrm{m}^{\,i} = \{\vec{\mathbf{0}}\}$, *jinak by existovalo nenulové vlastní číslo zobrazení* f, *což by byl spor.*

Ke zkoumání struktury řetězců

$$\{\vec{\mathbf{0}}\} \subsetneq \mathbb{K}\mathrm{er}^{\,1} \subsetneq \mathbb{K}\mathrm{er}^{\,2} \subsetneq \ldots \quad \text{a} \quad \mathbb{V} = \mathbb{I}\mathrm{m}^{\,0} \supsetneq \ldots \supsetneq \mathbb{I}\mathrm{m}^{\,k} = \mathbb{I}\mathrm{m}^{\,k+1} = \{\vec{\mathbf{0}}\} \tag{13.15}$$

budeme potřebovat jeden nový pojem.

DEFINICE. O nenulových vektorech $\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n$ řekneme, že jsou **nezávislé vůči** podprostoru $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$, pokud

$$\sum \vec{\mathbf{v}}_i \lambda^i \in \mathbb{W} \quad \Rightarrow \quad \text{všechny } \lambda^i \text{ jsou nulové.} \tag{13.16}$$

(„Nezávislost bez spojky“ lze teď chápat jako nezávislost vůči triviálnímu podprostoru, obsahujícímu jen nulový vektor.)

Řekneme, že $\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n$ dokonce tvoří **basi** $\mathbb{V}$ **vůči** $\mathbb{W}$, pokud navíc

$$\mathcal{L}(\{\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n\} \cup \mathbb{W}) = \mathbb{V}. \tag{13.17}$$

(„Basi bez spojky“ teď chápeme opět jako basi vůči podprostoru obsahujícímu jen nulový vektor.)

13.1 Base z řetězců vektorů

Základní výsledek teorie nilpotentních operátorů shrnuje následující

VĚTA. Nechť $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ je nilpotentní operátor stupně k. Pak existují vektory $\vec{\mathbf{v}}_1^{(k)}, \dots, \vec{\mathbf{v}}_{N(k)}^{(k)}$ stupně k, dále vektory $\vec{\mathbf{v}}_1^{(k-1)}, \dots, \vec{\mathbf{v}}_{N(k-1)}^{(k-1)}$ stupně $k-1$, ... až vektory $\vec{\mathbf{v}}_1^{(1)}, \dots, \vec{\mathbf{v}}_{N(1)}^{(1)}$ stupně 1 takové, že nenulové vektory z následující tabulky tvoří basi prostoru $\mathbb{V}$.

$$\begin{array}{|ccc|c|ccc|}
\hline
\vec{\mathbf{v}}_1^{(k)} & \cdots & \vec{\mathbf{v}}_{N(k)}^{(k)} & & & & \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \\
\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}}_1^{(k)}) & \cdots & \vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}}_{N(k)}^{(k)}) & & & & \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \\
\vdots & & \vdots & & & & \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \\
\vec{\mathbf{f}}^{k-1}(\vec{\mathbf{v}}_1^{(k)}) & \cdots & \vec{\mathbf{f}}^{k-1}(\vec{\mathbf{v}}_{N(k)}^{(k)}) & \cdots & \vec{\mathbf{v}}_1^{(1)} & \cdots & \vec{\mathbf{v}}_{N(1)}^{(1)} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\vec{\mathbf{0}} & \cdots & \vec{\mathbf{0}} & \cdots & \vec{\mathbf{0}} & \cdots & \vec{\mathbf{0}} \\
\hline
\end{array} \tag{13.18}$$

LEMMA O PONOŘOVÁNÍ. K důkazu základní věty o nilpotentních operátorech budeme potřebovat vědět, že v libovolné tabulce vektorů, sestavené z řetězců vektorů, v nichž šipka od $\vec{\mathbf{v}}$ k $\vec{\mathbf{w}}$ znamená $\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}}) = \vec{\mathbf{w}}$, jsou všechny vektory nezávislé právě tehdy, pokud jsou nezávislé vektory v nejspodnějším řádku (jejichž obrazem je nulový vektor).

$$\begin{pmatrix}
\vec{\mathbf{v}}_1 & & & \\
\downarrow & & & \\
\vec{\mathbf{v}}_2 & \vec{\mathbf{v}}_4 & \vec{\mathbf{v}}_6 & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
\vec{\mathbf{v}}_3 & \vec{\mathbf{v}}_5 & \vec{\mathbf{v}}_7 & \vec{\mathbf{v}}_8 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\vec{\mathbf{0}} & \vec{\mathbf{0}} & \vec{\mathbf{0}} & \vec{\mathbf{0}}
\end{pmatrix} \tag{13.19}$$

DŮKAZ LEMMATU. *Nezávislost spodních vektorů plyne z nezávislosti všech vektorů triviálně. Naopak, je-li nějaká (netriviální) kombinace $\sum \vec{\mathbf{v}}_i \lambda^i$ (všech) vektorů nulová, je (díky této rovnosti)*

$$\vec{\mathbf{f}}(\sum_i \vec{\mathbf{v}}_i \lambda^i) = \sum_i \vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}}_i)\lambda^i \tag{13.20}$$

nulová i nějaká kombinace vektorů zmenšené tabulky, v nichž vynecháme „nejvrchnější“ vektor z každého řetězce. Násobným opakováním tohoto myšlenkového kroku (násobným zmenšováním skupiny vektorů, z nichž lze vytvořit nulová netriviální kombinace) dojdeme k závěru, že pak musí být závislé i nejspodnější vektory.

<u>NÁVOD K DŮKAZU VĚTY.</u> *Onu basi lze tedy zkonstruovat tak, že dbáme na nezávislost spodních vektorů, ovšem nesmíme také zapomenout žádný dlouhý řetězec před tím, než začneme stavět kratší:*

<u>LEMMA.</u> Ve větě nahoře zvolme $\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n$ jako basi $\mathbb{V}$ vůči $\mathbb{K}\mathrm{er}^{\,k-1}$, kde $\mathbb{K}\mathrm{er}^{\,k-1} \subsetneq \mathbb{K}\mathrm{er}^{\,k} \equiv \mathbb{V}$. Pak pro každý vektor $\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{V}$ stupně k existují koeficienty $\lambda^1, \ldots, \lambda^n$ takové, že

$$\vec{\mathbf{v}} - \sum_i \vec{\mathbf{v}}_i \lambda^i \quad \text{je stupně} \quad k-1. \tag{13.21}$$

Důkaz je okamžitý (víte-li, o čem jde řeč).

Zvolili jsme nějakou basi $\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n$ prostoru $\mathbb{V}$ vůči $\mathbb{K}\mathrm{er}^{\,k-1}$. Vektory $\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}}_1), \ldots, \vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}}_n)$ doplníme dalšími vektory $\vec{\mathbf{w}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{w}}_m \in \mathbb{K}\mathrm{er}^{\,k-1}$ na basi prostoru $\mathbb{K}\mathrm{er}^{\,k-1}$ vůči $\mathbb{K}\mathrm{er}^{\,k-2}$. Vektory $\vec{\mathbf{f}}^2(\vec{\mathbf{v}}_1), \ldots, \vec{\mathbf{f}}^2(\vec{\mathbf{v}}_n)$, $\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{w}}_1), ..., \vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{w}}_m)$ doplníme … atd. až do případného doplnění base $\mathbb{K}\mathrm{er}^{\,1}$.

Můžete, zajisté, postupovat i zdola. Najdete nějakou basi $\mathbb{K}\mathrm{er}^{\,1}$. Ke každému jejímu prvku $\vec{\mathbf{v}}_i$ se pokusíte najít nějaký vektor $\vec{\mathbf{u}}_i$, aby $\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{u}}_i) = \vec{\mathbf{v}}_i$. Tím získáte basi $\mathbb{K}\mathrm{er}^{\,2}$ (vektory $\vec{\mathbf{v}}_i$ a ty vektory $\vec{\mathbf{u}}_i$, které lze najít, dohromady). … Prodlužujete řetězce, až najdete basi celého $\mathbb{V} = \mathbb{K}\mathrm{er}^{\,k}$.

<u>DŮSLEDEK.</u> V jazyku matic hlavní nilpotentní větu vyjádříme takto:

Každou čtvercovou nilpotentní matici $\mathbf{A}$ ($\exists k \; \mathbf{A}^k = \mathbf{0}$) lze napsat ve tvaru

$$\mathbf{A} = \mathbf{CJC}^{-1}, \tag{13.22}$$

kde $\mathbf{J}$ má blokový tvar (**Jordanův tvar** pro nilpotentní matici)

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & \circ & \cdots & \circ \\ \circ & \mathbf{J}_2 & \cdots & \circ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \cdots & \mathbf{J}_n \end{pmatrix} \tag{13.23}$$

a bloky mají tvar typu

$$\begin{pmatrix} \circ & 1 & \circ & \circ \\ \circ & \circ & 1 & \circ \\ \circ & \circ & \circ & 1 \\ \circ & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}. \tag{13.24}$$

<u>DŮKAZ.</u> *Osvětlí se to ihned, vyjádříme-li zobrazení $\{\vec{\mathbf{x}} \mapsto \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}\}$ maticí vůči basi sestrojené ve větě a napsané v pořadí*

$$\vec{\mathbf{f}}^{k-1}(\vec{\mathbf{v}}_1^{(k)}), \ldots, \vec{\mathbf{v}}_1^{(k)}, \vec{\mathbf{f}}^{k-1}(\vec{\mathbf{v}}_2^{(k)}), \ldots, \vec{\mathbf{v}}_2^{(k)}, \ldots \tag{13.25}$$

Matice $\mathbf{C}$ má tedy ve sloupcích souřadnice vektorů tvořících řetězce, a to tak, že ten napravo buňky se zobrazí do druhého, ten do třetího ... až levý vektor (dané buňky) se zobrazí do nulového vektoru (levý vektor je vlastní vektor příslušející vlastnímu číslu nula).

Důvod, proč je $\mathbf{C}$ nalevo a $\mathbf{C}^{-1}$ napravo, si lehce vyjasníte tak, že je-li $\vec{\mathbf{u}}$ sloupec souřadnic vektoru v basi řetězců, je $\mathbf{C}\vec{\mathbf{u}}$ sloupcem souřadnic v původní basi a $\mathbf{AC}\vec{\mathbf{u}}$ je sloupec souřadnic v původní basi vektoru přiřazenému vektoru $\mathbf{C}\vec{\mathbf{u}}$. Z druhé strany, $\mathbf{J}\vec{\mathbf{u}}$ je vektor přiřazený vektoru $\vec{\mathbf{u}}$ (obé vyjádřeno v basi řetězců) a $\mathbf{CJ}\vec{\mathbf{u}}$ je jeho vyjádření v původní basi. Proto je $\mathbf{AC} = \mathbf{CJ}$.

<u>URČENÍ TABULKY ŘETĚZCŮ.</u> Nechť má nilpotentní matice $\mathbf{A}$ rozměr $n \times n$. Spočteme si hodnosti mocnin $\mathbf{A}$

$$h_0 = n, \quad h_1 := h(\mathbf{A}), \quad h_2 := h(\mathbf{A}^2), \quad \ldots h_k = 0 \tag{13.26}$$

a tvar tabulky (počet řetězců a jejich délky) spočteme z rovností

$$n - h_1 = \dim \mathbb{K}\mathrm{er}^{\,1} \quad \text{(počet vektorů vespod řetězců)} \tag{13.27}$$

$$n - h_2 = \dim \mathbb{K}\mathrm{er}^{\,2} \quad \text{(celkový počet vektorů ve 2 řádkách dole) atd.} \tag{13.28}$$

Určovat konkrétní vektory lze náhodně. Postupujeme-li shora, zvolíme náhodně (nezávislé) vektory $\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n$, spočteme $\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}}_1), \ldots, \vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}}_n)$ a tyto vektory doplníme (náhodně, ovšem pozor: musí ležet v prostoru $\mathbb{K}\mathrm{er}^{\,k-1}$!) vektory $\vec{\mathbf{w}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{w}}_m$ (často bude $m = 0$ čili žádné doplnění). Takto postupujeme dále a nakonec obvykle zjistíme, že spodní vektory řetězců jsou lineárně nezávislé. (Je nekonečně málo pravděpodobné, že budou závislé, vybírali-li jsme opravdu náhodně. Píšeme-li ale souřadnice vektorů příliš jednoduché, může se nám stát, že budou závislé; pak je třeba některý(-é) z vektorů korigovat.) Postup je možno libovolně kombinovat s vyhledáváním řetězců „zdola“.

Samozřejmě, fakt, že volba může být náhodná a výsledek tedy nejednoznačný, ztíží zkoušejícímu možnosti kontroly, což bývá výhoda pro zkoušeného.

V PRAXI TO JDE LÉPE. Samozřejmě, v případě matic 2×2, 3×3 a 4×4 (které vám asi zadají jako úkol) je škála možností omezená. Jordanův tvar nilpotentní (nenulové) matice 2×2 musí mít tvar

$$\begin{pmatrix} \circ & 1 \\ \circ & \circ \end{pmatrix}, \tag{13.29}$$

matice 3×3 má varianty dvě

$$\begin{pmatrix} \circ & 1 & \circ \\ \circ & \circ & 1 \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \circ & 1 & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \tag{13.30}$$

a mezi maticemi 4×4 to není o moc těžší; kromě matic, v nichž oproti dvěma případům z 3×3 přidáme dolů a vpravo nulovou řádku a sloupec, přibudou jen

$$\begin{pmatrix} \circ & 1 & \circ & \circ \\ \circ & \circ & 1 & \circ \\ \circ & \circ & \circ & 1 \\ \circ & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \circ & 1 & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & 1 \\ \circ & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}. \tag{13.31}$$

PŘÍKLAD. Matice $\mathbf{A}$ typu 20×20 má dimense prostorů

$$\mathbb{K}\mathrm{er}^{\,i} = \{\vec{\mathbf{x}} \mid \mathbf{A}^i \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}\} \tag{13.32}$$

rovny $\dim \mathbb{K}\mathrm{er}^{\,1,2,3,4} = 7, 13, 18, 20$. (Hodnosti mocnin $\mathbf{A}$ jsou doplňky do dvaceti, tj. $13, 7, 2, 0$.) Potom hledaná tabulka obsahuje sedm řetězců o délkách $4, 4, 3, 3, 3, 2, 1$.

$$\begin{pmatrix} \vec{\mathbf{v}}_1 & \vec{\mathbf{v}}_2 & & & & & \\ f\vec{\mathbf{v}}_1 & f\vec{\mathbf{v}}_2 & \vec{\mathbf{w}}_1 & \vec{\mathbf{w}}_2 & \vec{\mathbf{w}}_3 & & \\ f^2\vec{\mathbf{v}}_1 & f^2\vec{\mathbf{v}}_2 & f\vec{\mathbf{w}}_1 & f\vec{\mathbf{w}}_2 & f\vec{\mathbf{w}}_3 & \vec{\mathbf{x}}_1 & \\ f^3\vec{\mathbf{v}}_1 & f^3\vec{\mathbf{v}}_2 & f^2\vec{\mathbf{w}}_1 & f^2\vec{\mathbf{w}}_2 & f^2\vec{\mathbf{w}}_3 & f\vec{\mathbf{x}}_1 & \vec{\mathbf{y}}_1 \end{pmatrix}. \tag{13.33}$$

Vektory $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2$ určíme namátkou, $\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}}_1), \vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}}_2)$ doplníme náhodnými vektory $\vec{\mathbf{w}}_1, \vec{\mathbf{w}}_2, \vec{\mathbf{w}}_3$ z $\mathbb{K}\mathrm{er}^{\,3}$ atd.

ÚLOHY.

1. Najděte Jordanův tvar matice z posledního příkladu.

2. Znáte-li strukturu nilpotentního operátoru $\mathbf{A}$, najděte strukturu jeho mocnin $\mathbf{A}^2, \mathbf{A}^3$, atd.

3. Jsou-li nilpotentní $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, musí být nilpotentní $\mathbf{AB}$ nebo $\mathbf{A}+\mathbf{B}$?

13.2 Jordanův tvar obecné matice

Vybaveni dokonalou znalostí struktury nilpotentních operátorů, obrátíme se nyní ke studiu struktury libovolného operátoru $f:\mathbb{V}\to\mathbb{V}$.

<u>Definice.</u> Pro element spektra λ operátoru $f:\mathbb{V}\to\mathbb{V}$ označme

$$\mathbb{K}\mathrm{er}\,^i_\lambda = \{\vec{\mathbf{v}}\,|\,(f-\lambda\mathbf{1})^{+i}\vec{\mathbf{v}}=\vec{\mathbf{0}}\}. \tag{13.34}$$

Řekneme, že λ je řádu k (nepleťme s obvykle odlišnou hodnotou násobnosti λ), pokud

$$\mathbb{K}\mathrm{er}\,^1_\lambda \subsetneq \mathbb{K}\mathrm{er}\,^2_\lambda \subsetneq \ldots \subsetneq \mathbb{K}\mathrm{er}\,^k_\lambda = \mathbb{K}\mathrm{er}\,^{k+1}_\lambda; \tag{13.35}$$

poslední člen označme $\mathbb{K}\mathrm{er}\,_\lambda$ a nazvěme ho **kořenovým podprostorem** λ.

Potřebujeme nyní pojem **direktního součtu** prostorů:

<u>Definice.</u> Řekneme, že podprostory $\mathbb{V}_1,\mathbb{V}_2,\ldots,\mathbb{V}_k\subseteq\mathbb{V}$ tvoří **direktní rozklad** $\mathbb{V}$, jestliže každý vektor $\vec{\mathbf{v}}\in\mathbb{V}$ lze jednoznačně napsat ve tvaru

$$\vec{\mathbf{v}}=\sum_{i=1}^k\vec{\mathbf{v}}_i,\quad\text{kde}\quad\vec{\mathbf{v}}_i\in\mathbb{V}_i.\quad\text{Zápis:}\quad\mathbb{V}=\bigoplus_{i=1}^k\mathbb{V}_i. \tag{13.36}$$

<u>Věta poprvé.</u> Platí

$$\mathbb{V}=\bigoplus_{\lambda\in\text{spektrum } f}\mathbb{K}\mathrm{er}\,_\lambda \tag{13.37}$$

a navíc $f(\mathbb{K}\mathrm{er}\,_\lambda)\subseteq\mathbb{K}\mathrm{er}\,_\lambda$, $\dim\mathbb{K}\mathrm{er}\,_\lambda=$ násobnost λ.

<u>Důkaz.</u> Nechť $\vec{\mathbf{v}}\in\mathbb{K}\mathrm{er}\,_\lambda$, tzn. $(\vec{\mathbf{f}}-\lambda\mathbf{1})^k\vec{\mathbf{v}}=\vec{\mathbf{0}}$, kde k je řád λ. Chceme nejprve ověřit vztah $\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}})\in\mathbb{K}\mathrm{er}\,_\lambda$. Platí ale

$$(\vec{\mathbf{f}}-\lambda\mathbf{1})^k\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}})=(\vec{\mathbf{f}}-\lambda\mathbf{1})^{k+1}\vec{\mathbf{v}}\ +\lambda(\vec{\mathbf{f}}-\lambda\mathbf{1})^k\vec{\mathbf{v}}=\vec{\mathbf{0}}. \tag{13.38}$$

Nyní použijeme <u>DŮLEŽITÉ LEMMA.</u> $\mathbb{V} = \mathbb{I}\mathrm{m}_\lambda \oplus \mathbb{K}\mathrm{er}_\lambda$; navíc $f(\mathbb{K}\mathrm{er}_\lambda) \subseteq \mathbb{K}\mathrm{er}_\lambda$, $f(\mathbb{I}\mathrm{m}_\lambda) \subseteq \mathbb{I}\mathrm{m}_\lambda$, kde

$$\mathbb{I}\mathrm{m}_\lambda^j = \{\vec{\mathbf{w}} = (\vec{\mathbf{f}} - \lambda\mathbf{1})^j \vec{\mathbf{v}} \,|\, \vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{V}\} \tag{13.39}$$

a $\mathbb{I}\mathrm{m}_\lambda$ je poslední člen posloupnosti

$$\mathbb{I}\mathrm{m}_\lambda^1 \supsetneq \mathbb{I}\mathrm{m}_\lambda^2 \supsetneq \ldots \supsetneq \mathbb{I}\mathrm{m}_\lambda^k \equiv \mathbb{I}\mathrm{m}_\lambda^{k+1}. \tag{13.40}$$

<u>DŮKAZ LEMMATU.</u> *Pišme $f_\lambda := (f - \lambda\mathbf{1})$ (můžeme si klidně představovat, že $\lambda = 0$). Je důležité si uvědomit snad nejpoužívanější vztah zimního semestru*

$$\dim \mathbb{I}\mathrm{m}_\lambda + \dim \mathbb{K}\mathrm{er}_\lambda = \dim \mathbb{V}, \tag{13.41}$$

aby stačilo dokázat, že $\mathbb{I}\mathrm{m}_\lambda \cap \mathbb{K}\mathrm{er}_\lambda = \{\vec{\mathbf{0}}\}$.

Nechť $\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{I}\mathrm{m}_\lambda$ je nenulový vektor. Pak $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{f}}_\lambda^k(\vec{\mathbf{u}})$ pro vhodné $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{V}$. Vztah $\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{K}\mathrm{er}_\lambda$ by znamenal, že $\vec{\mathbf{f}}_\lambda^{k+j}(\vec{\mathbf{u}}) = \vec{\mathbf{0}}$ pro vhodné $1 \leq j \leq k$. To však není možné, neboť $\mathbb{I}\mathrm{m}_\lambda^k = \mathbb{I}\mathrm{m}_\lambda^{k+1} = \ldots = \mathbb{I}\mathrm{m}_\lambda^{k+j}$ a tedy by již platilo $\vec{\mathbf{f}}_\lambda^k(\vec{\mathbf{u}}) = \vec{\mathbf{0}}$, tzn. $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{0}}$.

Zbývá ověřit invarianci vůči f; ta je ale zřejmá ze vztahu

$$\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}}) = (\vec{\mathbf{f}} - \lambda\mathbf{1})\vec{\mathbf{v}} + \lambda\vec{\mathbf{v}} \tag{13.42}$$

a tak pro $\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{I}\mathrm{m}_\lambda$ resp. $\mathbb{K}\mathrm{er}_\lambda$ je $(\vec{\mathbf{f}} - \lambda\mathbf{1})\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{I}\mathrm{m}_\lambda$ resp. $\mathbb{K}\mathrm{er}_\lambda$ a následně také $\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}}) \in \mathbb{I}\mathrm{m}_\lambda$ resp. $\mathbb{K}\mathrm{er}_\lambda$.

<u>POKRAČOVÁNÍ DŮKAZU VĚTY.</u> *Všimněme si, že λ již nepatří do spektra zúženého operátoru $f : \mathbb{I}\mathrm{m}_\lambda \to \mathbb{I}\mathrm{m}_\lambda$!!!*

Podle operátoru $f : \mathbb{I}\mathrm{m}_\lambda \to \mathbb{I}\mathrm{m}_\lambda$ opět rozložíme prostor $\mathbb{I}\mathrm{m}_\lambda = \mathbb{I}\mathrm{m}_{\lambda'} + \mathbb{K}\mathrm{er}_{\lambda'}$ (zvolíme další prvek spektra λ'), kde $\mathbb{K}\mathrm{er}_{\lambda'}$ je kořenový podprostor λ' a $\mathbb{I}\mathrm{m}_{\lambda'} = (f - \lambda'\mathbf{1})^{k'} \mathbb{I}\mathrm{m}_\lambda$, kde k' je řád λ' (snadno nahlédneme, že řády λ' jsou stejné pro operátor f na $\mathbb{V} \to \mathbb{V}$ jako na $\mathbb{K}\mathrm{er}_\lambda \to \mathbb{K}\mathrm{er}_\lambda$).

Indukcí takto dokončíme (alespoň v situaci konečné dimense, jde to však často i jindy) důkaz věty.

Nyní aplikujeme větu o struktuře nilpotentního operátoru na každý $f - \lambda\mathbf{1} : \mathbb{K}\mathrm{er}_\lambda \to \mathbb{K}\mathrm{er}_\lambda$. Dostáváme tento závěrečný výsledek.

<u>JORDANOVA VĚTA PODRUHÉ.</u> Nechť $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ je libovolný operátor.

Pak existuje base $\mathbb{V}$, v níž má f matici tvaru

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & \circ & \cdots & \circ \\ \circ & \mathbf{J}_2 & \cdots & \circ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \cdots & \mathbf{J}_N \end{pmatrix}, \tag{13.43}$$

kde jednotlivé buňky $\mathbf{J}_i$ mají tvar

$$\mathbf{J}_i = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \circ & \cdots & \cdots & \circ \\ \circ & \lambda & 1 & \cdots & \cdots & \circ \\ \circ & \circ & \lambda & \cdots & \cdots & \circ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \circ & \cdots & \ddots & 1 \\ \circ & \circ & \circ & \cdots & \cdots & \lambda \end{pmatrix} \tag{13.44}$$

(čísla λ jsou ze spektra f). Konkrétněji, každá matice $\mathbf{A}$ lze zapsat pomocí podobné matice $\mathbf{J}$ výše uvedených vlastností jako

$$\mathbf{A} = \mathbf{CJC}^{-1}, \tag{13.45}$$

kde matice $\mathbf{C}$ má ve sloupcích vlastní vektory $\vec{\mathbf{v}}$ ($(\vec{\mathbf{f}} - \lambda\mathbf{1})\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{0}}$) resp. vektory z řetězců ($(\vec{\mathbf{f}} - \lambda\mathbf{1})\vec{\mathbf{v}}$ =vektor vlevo od $\vec{\mathbf{v}}$).

<u>Motivující a zatemňující poznámky.</u> Jednou z nejobecnějších matematických disciplín je **teorie kategorií**, jejímž cílem je porovnávání formalismů jednotlivých matematických disciplín a hledání jejich společných rysů. Aniž bychom se například jakkoli pokoušeli formalisovat podobnost např. mezi teorií konečných množin a zobrazení na nich na jedné a LA na druhé straně, zkusíme na intuitivní úrovni vyjádřit podobnou ideu, jaká se používá při konstrukci Jordanova tvaru, při znázornění struktury zobrazení na množině: znázorňování prvků množiny jako bodů a zobrazení jako šipek jsme již používali u studia permutací (kdy jsme kreslili cykly permutace). Obecné zobrazení lze znázornit obrázkem, v němž lze vybarvit černě „návratné“ body y zobrazení, tj. takové, pro něž $\forall n\ \exists x \in X\ f^n(x) = y$, a hrají roli $\mathbb{I}\mathrm{m}_\lambda$. V konkrétním obrázku lze podmínku $\forall n$ nahradit podmínkou jen „pro n=3“ apod. Ty ostatní, odpovídající $\mathbb{K}\mathrm{er}_\lambda$, ponecháme bílé.

Náš nynější rozklad je opět invariantní vůči působení zobrazení f, alespoň v tom smyslu, že bod přiřazený černému bodu je opět černý.

PODROBNĚJŠÍ KOMENTÁŘ K JORDANOVĚ VĚTĚ. Přechod od formulace věty 1 k formulaci věty 2 (od direktního rozkladu k blokové matici) je umožněn následujícím obecným tvrzením, které sice potřebujeme pro direktní rozklad na libovolný počet sčítanců, ale pro pohodlí zformulujeme pouze takto:

TVRZENÍ. Buď $\mathbb{V} = \mathbb{N} \oplus \mathbb{R}$ (alternativní značení pro $\mathbb{K}\mathrm{er}$ a $\mathbb{I}\mathrm{m}$) a $f(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$, $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$. Nechť $\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n$ tvoří basi $\mathbb{N}$ a $\vec{\mathbf{w}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{w}}_m$ tvoří basi $\mathbb{R}$. Nechť $\mathbf{A}$ je matice $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a $\mathbf{B}$ matice $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pak matice $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ má vůči basi $\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n, \vec{\mathbf{w}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{w}}_m$ blokovou matici

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \circ \\ \circ & \mathbf{B} \end{pmatrix}. \tag{13.46}$$

Důkaz si každý, kdo již ovládl pojem base a vyjadřování zobrazení maticí (a nečeká, že úplně každou formulaci za něho udělá někdo jiný) může provést sám. Ti, kteří jsou schopni i samostatného výběru indexů (...), mohou dokázat i (potřebné) zobecnění pro $\mathbb{V} = \bigoplus_\lambda \mathbb{N}_\lambda$.

Nyní podrobněji okomentujeme počet a délku různých bloků v Jordanově matici ve větě 2. Bloky odpovídající danému vlastnímu číslu dávají vlastně (po odečtení $\lambda\mathbf{1}$) Jordanův tvar nilpotentního operátoru

$$(f - \lambda\mathbf{1}) : \mathbb{K}\mathrm{er}_\lambda \to \mathbb{K}\mathrm{er}_\lambda. \tag{13.47}$$

Dříve, než ukončíme diskusi nalezení Jordanova tvaru obecné matice, ještě doplňující poznámky k nilpotentním operátorům.

PŘÍKLAD. Mějme nilpotentní operátor F na $\mathbb{R}^{11}$ zadaný v nějaké basi (vynechávejme šipky) $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$ vztahy (šipka od t k u znamená $F(t) = u$)

$$k \to h \to g \to \vec{\mathbf{0}}, f \to e, d \to e \to \vec{\mathbf{0}}, c \to b, a \to b \to \vec{\mathbf{0}}, i \to \vec{\mathbf{0}}, j \to \vec{\mathbf{0}}. \tag{13.48}$$

Je jasné, že hledanou tabulkou řetězců z věty o struktuře může být např.

$$\begin{gathered} k \to h \to g \to \vec{\mathbf{0}}, i - g \to \vec{\mathbf{0}}, j - g \to \vec{\mathbf{0}}, d \to e \to \vec{\mathbf{0}}, \\ f - d \to \vec{\mathbf{0}}, a \to b \to \vec{\mathbf{0}}, c - a \to \vec{\mathbf{0}}. \end{gathered} \tag{13.49}$$

K obecným diagramům s netriviálními smyčkami se ještě za chvíli vrátíme.

<u>PROBLÉM.</u> Nechť F je nilpotentní operátor. Charakterisujte všechny operátory, které komutují s F. Najděte dále podmínku na F, aby fakt komutování F a G implikoval, že G je polynom od F:

$$G = \sum_{k=0}^{n} a_k F^k \tag{13.50}$$

(Řešení b) se dá říci „operátor F má jediný řetězec“.)

Diskuse délek a počtu jednotlivých Jordanových buněk pro obecnou matici: návod pro praktické počítání lze shrnout do dvou kroků, z nichž vám řekneme jenom tři.

1. Najdeme spektrum dané matice $\mathbf{A}$ (případně daného operátoru, není-li tento již přímo zadán maticí $\mathbf{A}$ v nějaké „přirozené“ basi).

   <u>POZNÁMKA.</u> „Najít spektrum“ je universální rada pro téměř všechny situace LA, kdy nás v souvislosti se zadanou čtvercovou maticí nenapadá nic vhodnějšího. Jasný kandidát pro „radu č. 1“ v „Helpu“ (F1) jakéhokoliv představitelného software, který by měl za cíl procvičit znalosti LA. V analýze by podobná universální rada mohla znít „nenapadá-li vás nic rozumnějšího, derivujte“.

2. Najdeme dimense prostorů

$$\mathbb{K}\mathrm{er}\,_\lambda^1 \subsetneq \mathbb{K}\mathrm{er}\,_\lambda^2 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathbb{K}\mathrm{er}\,_\lambda^k = \mathbb{K}\mathrm{er}\,_\lambda \tag{13.51}$$

   neboli hodnosti matic $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1})$, $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1})^2$, ...

3. Najdeme kořenový podprostor $\mathbb{K}\mathrm{er}\,_\lambda$ a v něm podrobně prostudujeme již probranými metodami nilpotentní operátor

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1}) : \mathbb{K}\mathrm{er}\,_\lambda \to \mathbb{K}\mathrm{er}\,_\lambda. \tag{13.52}$$

   <u>POZOR.</u> „Nejvyšší vektory řetězců“ volíme sice zase třeba „namátkou“, ALE SAMOZŘEJMĚ V PROSTORU $\mathbb{K}\mathrm{er}\,_\lambda^i$ (nikoliv snad ve $\mathbb{V}$).

<u>PŘÍKLAD.</u> Na $\mathbb{R}^{10}$ mějme operátor F zadaný opět šipkami

$$g \to f \to e \to a \to b \to c \to d \to e, k \to j \to i \to j. \tag{13.53}$$

1. Spektrum sestává z hodnot (ověřte! Nakreslete si cykly daného zobrazení a nakoukněte do úvodu kapitoly o Penroseově pokrytí)
$$-1, 0, 1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4, \quad \text{kde} \quad \varepsilon = \exp(2\pi i/5). \tag{13.54}$$

2. Jelikož je zřejmě
$$(g-c) \to (f-d) \to \vec{\mathbf{0}}, (i-k) \to \vec{\mathbf{0}}, \tag{13.55}$$
je násobnost vlastního čísla 0 alespoň tři. Větší ovšem býti nemůže, protože máme ještě šest dalších vlastních čísel, z nichž jednotka je alespoň dvojnásobná (protože jsou dva cykly)
$$F(i+j) = i+j, \quad F(a+b+c+d+e) = a+b+c+d+e \tag{13.56}$$
a platí $1+1+1+1+1+2+3 = 10$ (součet násobností).

3. Najdeme ještě zbývající vlastní vektory
$$\begin{gathered}(F+\mathbf{1})(i-j) = \vec{\mathbf{0}} \quad \text{vlastní číslo } -1 \\ (F-\varepsilon^K)(a+\varepsilon^K b+\varepsilon^{2K} c+\varepsilon^{3K} d+\varepsilon^{4K} e) = \vec{\mathbf{0}} \quad K = 1,2,3,4 \\ \text{vektory označme } v_{\varepsilon^K}, \text{ vlastní čísla } \varepsilon^K\end{gathered} \tag{13.57}$$

<u>ZÁVĚR.</u> Vůči basi
$$(f-d), (g-c), (i-k), (i+j), (i-j), (a+b+c+d+e), v_\varepsilon, v_{\varepsilon^2}, v_{\varepsilon^3}, v_{\varepsilon^4} \tag{13.58}$$
má naše zobrazení F matici
$$\mathbf{J} = \operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} \circ & 1 \\ \circ & \circ \end{pmatrix}, 0, 1, -1, 1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4\right). \tag{13.59}$$
(Symbol „diag“ vytváří blokovou diagonální matici s uvedenými prvky na diagonále, jinde jsou nuly.)

<u>POZNÁMKA.</u> V tomto konkrétním případě se mnohým nebude zdát Jordanův tvar jednodušší než matice vůči basi $g, f, e, a, b, c, d, k, j, i$:
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ +1 & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & +1 & \circ & \circ & \circ & \circ & +1 & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & +1 & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & +1 & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & +1 & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & +1 & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & +1 & \circ & +1 \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & +1 & \circ \end{pmatrix}. \tag{13.60}$$
Jednodušší je, ale přesto poučení, že bývá užitečné zkoumat i jiné „kanonické“ tvary matice, je správné.

Cyklický vektor

Mějme lineární operátor $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ (ne nutně nilpotentní). Zkoumejme vektor $\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{V}$ a řetězec

$$\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}}), \vec{\mathbf{f}}^2(\vec{\mathbf{v}}), \ldots, \vec{\mathbf{f}}^k(\vec{\mathbf{v}}) \tag{13.61}$$

maximální možné délky, při níž jsou vektory z řady ještě nezávislé. Může se nám stát, že takto sestrojíme celou basi $\mathbb{V}$ (pro jakýpak nilpotentní operátor to nastane?) a takové basi říkáme **cyklická base** prostoru (vzhledem k f) a f má vůči basi

$$\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}}), \ldots, \vec{\mathbf{f}}^k(\vec{\mathbf{v}}) \quad \text{matici} \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \circ & \circ & \cdots & \circ & a_0 \\ 1 & \circ & \cdots & \circ & a_1 \\ \circ & 1 & \cdots & \circ & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \circ & \circ & \cdots & 1 & a_k \end{pmatrix}, \tag{13.62}$$

kde $\vec{\mathbf{f}}^{k+1}(\vec{\mathbf{v}}) = a_0\vec{\mathbf{v}} + a_1\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}}) + \ldots + a_k\vec{\mathbf{f}}^k(\vec{\mathbf{v}})$. (Chcete-li mít jedničky nad diagonálou, jak jsme zvyklí, napište pořadí prvků base pozpátku.)

Diskusi pojmu **cyklický vektor** je třeba chápat jako alternativní možnost (paralelně rozvíjenou) k pojmu Jordanovy buňky. Srovnejme vyjádření

$$\mathbf{A} = \mathbf{CJC}^{-1} \quad \text{versus} \quad \mathbf{A} = \mathbf{DQD}^{-1}, \tag{13.63}$$

kde $\mathbf{J}$ je Jordanova buňka

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \circ & \circ \\ \circ & \lambda & 1 & \circ \\ \circ & \circ & \lambda & 1 \\ \circ & \circ & \circ & \lambda \end{pmatrix}. \tag{13.64}$$

- U Jordanova tvaru se velmi snadno počítá $\mathbf{J}^n$, $\exp \mathbf{J}$ a tedy i $\exp \mathbf{A}$, a bez namáčení. (Zopakujte.)

- U vyjádření v cyklické basi netřeba znát spektrum $\mathbf{A}$, a proto ho doporučují běžné kursy diferenciálních rovnic (tradičně pro převádění soustavy diferenciálních rovnic prvého řádu na jednu rovnici vyššího řádu). Cyklický vektor — nástroj skutečných šampionů.

Místo Jordanových bloků bychom tedy mohli vyjadřovat operátor maticí složenou z nilpotentních bloků a z bloků právě popsaných. Tento způsob kanonického rozkladu se tedy také leckdy používá (např. při převádění soustavy diferenciálních rovnic na jednu rovnici vyššího řádu) a volba mezi ním a Jordanovým tvarem je někdy záležitostí vkusu.

CVIČENÍ.

1. Spočtěte charakteristickou rovnici

$$0 = \det(\mathbf{Q} - \lambda \mathbf{1}). \tag{13.65}$$

POZNÁMKA. Pro případ operátoru derivování se tato rovnice nazývá **charakteristickou rovnicí** rovnice

$$y^{(k+1)} = a_k y^{(k)} + \ldots + a_0 y. \tag{13.66}$$

2. Charakterisujte případy, kdy vyjádření „$\mathbf{Q}$" existuje! (V řeči Jordanova tvaru: kolik buněk příslušejících danému elementu spektra musí existovat apod.) Platí totiž

VĚTA. ($\sharp$) Cyklický vektor operátoru existuje (tzn. existuje ve vhodné basi vyjádření pomocí matice, mající nenulové prvky jen těsně nad diagonálou a v levém sloupci) právě tehdy, když pro každý prvek spektra existuje **právě jedna** Jordanova buňka.

POZNÁMKA. Poznamenali jsme již, že o nalezení cyklického vektoru je řeč vždy, převádíme-li soustavu lineárních diferenciálních rovnic prvého řádu na jednu lineární diferenciální rovnici vyššího řádu. Převedení tedy není možné zcela vždycky (jak by se dalo při absenci pojmu Jordanova tvaru v mnohých kursech diferenciálních rovnic mylně vyvozovat). ($\heartsuit$)

13.3 Polynomy a funkce matic

Z funkcí matic lze čistě lineárně algebraickými prostředky zkoumat exponenciálu, ale i polynomy. Místo rozvíjení systematičtější **teorie λ-matic** tak, jak to dělají četné knihy o LA, zde uvedeme jeden výrazný výsledek.

HAMILTON-CAYLEYOVA VĚTA. Nechť p je charakteristický polynom matice $\mathbf{A}$ resp. operátoru f (zopakujte pojem determinantu operátoru!):

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}) \quad \text{resp.} \quad p(\lambda) = \det(f - \lambda \hat{1}). \tag{13.67}$$

$$\text{POTOM PLATÍ} \quad p(\mathbf{A}) = \mathbf{0} \quad \text{resp.} \quad p(f) = \hat{0}. \tag{13.68}$$

<u>DŮKAZ.</u> *Vyjdeme z direktního rozkladu (viz obecnou Jordanovu větu)*

$$\mathbb{V} = \bigoplus_i \mathbb{K}\mathrm{er}_{\lambda_i}. \tag{13.69}$$

Víme, že $p(\lambda) = \prod_i (\lambda_i - \lambda)^{n_i}$, *kde* $n_i = \dim \mathbb{K}\mathrm{er}_{\lambda_i}$ *je násobnost* λ_i.

Nechť $\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{V}$. *Pišme* $\vec{\mathbf{v}} = \sum \vec{\mathbf{v}}_i$, *kde* $\vec{\mathbf{v}}_i \in \mathbb{K}\mathrm{er}_{\lambda_i}$. *Jenomže*

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1})^{n_i} \vec{\mathbf{v}}_i = \vec{\mathbf{0}} \quad \text{(proč?)} \tag{13.70}$$

$$\Rightarrow p(\mathbf{A}) \vec{\mathbf{v}}_i = \vec{\mathbf{0}} \quad \textit{jelikož} \quad p(\mathbf{A}) = \prod_i (\lambda_i \mathbf{1} - \mathbf{A})^{n_i} \tag{13.71}$$

$$\Rightarrow p(\mathbf{A}) \vec{\mathbf{v}} = 0 \quad \forall \vec{\mathbf{v}} \quad \Rightarrow \quad p(\mathbf{A}) = \mathbf{0}. \tag{13.72}$$

Pro nilpotentní operátory nám věta nic překvapivého nenabízí. Objasněte. Ověřte dále, že za n_i stačí dosadit délku nejdelšího řetězce příslušejícímu danému vlastnímu číslu.

<u>POUŽITÍ.</u> Hamilton-Cayleyovu větu můžeme použít například k výpočtu mocnin matice. Chtějme třeba spočítat prvních deset mocnin matice $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \tag{13.73}$$

Charakteristický mnohočlen $\mathbf{A}$ je $p(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 17\lambda + 13$

$$\text{a proto} \quad \mathbf{A}^3 = 5\mathbf{A}^2 - 17\mathbf{A} + 13 \quad \text{a} \quad \mathbf{A}^4 = 5\mathbf{A}^3 - 17\mathbf{A}^2 + 13\mathbf{A}. \tag{13.74}$$

Do druhého vztahu lze dosadit $\mathbf{A}^3$ z prvého[1] a stačí tedy spočítat druhou mocninu matice $\mathbf{A}$ a pak jen sčítat.

Přesto nezapomeňte na standardní způsob výpočtu pomocí podobné diagonální matice:

$$\mathbf{A} = \mathbf{C} \begin{pmatrix} 1 & \circ & \circ \\ \circ & 2+3i & \circ \\ \circ & \circ & 2-3i \end{pmatrix} \mathbf{C}^{-1} \tag{13.75}$$

a tak kupříkladu

$$\mathbf{A}^{10^6} = \mathbf{C} \begin{pmatrix} 1 & \circ & \circ \\ \circ & (2+3i)^{10^6} & \circ \\ \circ & \circ & (2-3i)^{10^6} \end{pmatrix} \mathbf{C}^{-1} \tag{13.76}$$

[1] Přičítáme-li k matici číslo, míníme tím toto číslo vynásobené jednotkovou maticí.

Soustavy diferenciálních rovnic

Vraťme se k řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty typu

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= a^1_1 x^1 + \ldots + a^1_n x^n \\ &\vdots \\ \dot{x}^n &= a^n_1 x^1 + \ldots + a^n_n x^n, \end{aligned} \tag{13.77}$$

krátce $\dot{\vec{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}$, $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(t) \in \mathbb{R}^n$. Jak jsme se již zmínili, řešení lze hledat ve tvaru

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = \exp(t\mathbf{A})\vec{\mathbf{c}}, \quad \vec{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^n. \tag{13.78}$$

POZNÁMKA. Ukážeme, že každé řešení má tento tvar, pomocí **Banachovy věty o kontrakci**. Rovnici $\dot{\vec{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}$ zapíšeme ekvivalentně ve tvaru rovnice integrální

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = \vec{\mathbf{x}}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}(s)ds. \tag{13.79}$$

Na prostoru všech vektorových funkcí $\vec{\mathbf{y}}()$ s hodnotami v $\mathbb{R}^n$ uvažujme lineární operátor

$$\vec{\mathbf{y}}() \mapsto F(\vec{\mathbf{y}}()), \quad \text{kde} \quad [F(\vec{\mathbf{y}})](t) = \vec{\mathbf{y}}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}\vec{\mathbf{y}}(s)ds. \tag{13.80}$$

CVIČENÍ Z ANALÝZY. Zaveďte na tomto prostoru co nejjednodušší metriku (čímž se stane metrickým), aby F bylo kontrakcí, uvažujeme-li funkce na nějakém malém intervalu (t_0, t_1).

Potom můžeme hledat řešení rovnice $\dot{\vec{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}$ jako **pevný bod** zobrazení F metodou iterací. Budeme počítat $\vec{\mathbf{y}}_n()$ jako $F(\vec{\mathbf{y}}_{n-1}())$ a začneme s funkcí

$$\vec{\mathbf{y}}_0 = \vec{\mathbf{c}}, \quad \vec{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^n. \tag{13.81}$$

Iterováním nám vyjde

$$\vec{\mathbf{y}}_1(t) = \vec{\mathbf{c}} + \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}\vec{\mathbf{c}}\, ds = (\mathbf{1} + (t - t_0)\mathbf{A})\vec{\mathbf{c}}, \tag{13.82}$$

v dalším kroku

$$\vec{\mathbf{y}}_2(t) = \vec{\mathbf{c}} + \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}\vec{\mathbf{y}}_1(s)\, ds = (\mathbf{1} + (t - t_0)\mathbf{A} + \frac{(t - t_0)^2\mathbf{A}^2}{2!})\vec{\mathbf{c}} \tag{13.83}$$

a obecně matematickou indukcí

$$\vec{\mathbf{y}}_m(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(t-t_0)^k \mathbf{A}^k}{k!} \vec{\mathbf{c}}. \tag{13.84}$$

Zřejmě tedy hledaný „fixpoint“ má tvar

$$\vec{\mathbf{y}}(t) = (\exp(t-t_0)\mathbf{A})\vec{\mathbf{c}}. \tag{13.85}$$

<u>Spočteme exponenciálu.</u> K dořešení soustavy rovnic nám již stačí umět počítat exponenciálu matice. Vyjádříme matici $\mathbf{A}$ v Jordanově tvaru

$$t\mathbf{A} = \mathbf{C} \cdot t\mathbf{J} \cdot \mathbf{C}^{-1} \tag{13.86}$$

a jak jsme již dokazovali,

$$\exp(t\mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot \exp(t\mathbf{J}) \cdot \mathbf{C}^{-1}. \tag{13.87}$$

Potřebujeme nyní spočítat exponenciálu t-násobku matice v Jordanově tvaru. Ta se ale skládá z bloků a exponenciálu spočteme tak, že exponenciály jednotlivých bloků vypočteme samostatně a složíme je opět do blokové matice.

Poslední, co musíme umět, je tedy výpočet exponenciály t-násobku Jordanova bloku, např.

$$\exp \mathbf{B}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \lambda t & t & \circ \\ \circ & \lambda t & t \\ \circ & \circ & \lambda t \end{pmatrix}. \tag{13.88}$$

Ovšem $\mathbf{B} = \lambda t \mathbf{1} + t\mathbf{N}$ (kde $\mathbf{N}$ je matice s jednotkami nad diagonálou), a jelikož $\lambda t \mathbf{1}$ jako každý číselný násobek jednotkové matice komutuje se všemi maticemi, užijeme vztahu

$$\mathbf{XY} = \mathbf{YX} \Longrightarrow \exp(\mathbf{X}+\mathbf{Y}) = \exp \mathbf{X} \cdot \exp \mathbf{Y} \tag{13.89}$$

(mohli bychom se bez toho obejít, ale nebylo by to ekonomické) a exponenciálu bloku již lze psát jako

$$\exp \mathbf{B} = \exp(\lambda t) \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k \mathbf{N}^k}{k!}. \tag{13.90}$$

Příklad exponenciály $\exp t\mathbf{N}$

$$\exp\begin{pmatrix} \circ & t & \circ & \circ \\ \circ & \circ & t & \circ \\ \circ & \circ & \circ & t \\ \circ & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & t^3/6 \\ \circ & 1 & t & t^2/2 \\ \circ & \circ & 1 & t \\ \circ & \circ & \circ & 1 \end{pmatrix}. \tag{13.91}$$

Novým rysem řešení ve srovnání s diagonalisovatelnou $\mathbf{A}$ bude fakt, že souřadnice již nebudou vždy kombinacemi $\exp(\lambda t)$, ale budou moci být i kombinacemi $t^k \exp(\lambda t)$.

FUNKCE JORDANOVY BUŇKY. Nejen exponenciálu t-násobku lze dobře spočítat pro Jordanovy buňky. Obecnou funkci $f(x)$ nilpotentní buňky (kterou dosadíme za x) spočteme podle Taylorova předpisu (pro názornost jen pro matici 4×4)

$$f\begin{pmatrix} \circ & 1 & \circ & \circ \\ \circ & \circ & 1 & \circ \\ \circ & \circ & \circ & 1 \\ \circ & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} f(0) & f'(0) & f''(0)/2! & f'''(0)/3! \\ \circ & f(0) & f'(0) & f''(0)/2! \\ \circ & \circ & f(0) & f'(0) \\ \circ & \circ & \circ & f(0) \end{pmatrix}. \tag{13.92}$$

Zkontrolujte, že pro polynomy (stačí mocniny) a exponenciálu nám dává tento vztah známé předpisy.

PŘÍKLAD NA JORDANŮV TVAR. Řešme homogenní soustavu lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= -2x^1 + x^2 + 2x^3 \\ \dot{x}^2 &= -x^1 + 2x^3 \\ \dot{x}^3 &= -2x^1 + 3x^3. \end{aligned} \tag{13.93}$$

Víme již, že obecné řešení má tvar

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = (\exp t\mathbf{A})\vec{\mathbf{c}}, \tag{13.94}$$

kde $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^3$. Jde o to určit $(\exp t\mathbf{A})\vec{\mathbf{c}}$.

Najdeme Jordanův tvar $\mathbf{A}$: spočteme vlastní čísla (proveďte podrobněji) $1, 1, -1$. Máme

$$(\mathbf{A} - \mathbf{1}) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & \circ & 2 \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{A} - \mathbf{1})^2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ 2 & -2 & \circ \end{pmatrix}, \tag{13.95}$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{1}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & \circ & 4 \end{pmatrix}. \tag{13.96}$$

Vlastní vektor příslušející -1 je (ověřte)

$$\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 2 \\ \circ \\ 1 \end{pmatrix} \tag{13.97}$$

Z tvarů matic vidíme

$$\dim \mathbb{K}\mathrm{er}\,{}^1_1 = 1, \quad \dim \mathbb{K}\mathrm{er}\,{}^2_1 = 2, \quad \dim \mathbb{K}\mathrm{er}\,{}^1_{-1} = 1 \tag{13.98}$$

a $\mathbb{V} = \mathbb{K}\mathrm{er}\,{}^2_1 \oplus \mathbb{K}\mathrm{er}\,{}^1_{-1}$.

V prostoru $\mathbb{K}\mathrm{er}\,{}^2_1$ (všech vektorů se stejnými prvními dvěma souřadnicemi, jelikož $(\mathbf{A}-\mathbf{1})^2$ má vzájemně opačné první dva sloupce a nulový třetí) vybereme třeba vektor

$$\vec{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \circ \end{pmatrix} \tag{13.99}$$

Pak je $\vec{\mathbf{w}}' = (\mathbf{A}-\mathbf{1})\vec{\mathbf{w}} = (-2,-2,-2)^T \in \mathbb{K}\mathrm{er}\,{}^1_1$.

<u>ZÁVĚR.</u>

$$\begin{aligned} (\exp t\mathbf{A})\vec{\mathbf{v}} &= e^{-t}\vec{\mathbf{v}} \\ (\exp t\mathbf{A})\vec{\mathbf{w}}' &= e^{t}\vec{\mathbf{w}}' \\ (\exp t\mathbf{A})\vec{\mathbf{w}} = \exp t(\mathbf{A}-\mathbf{1}\,+\,\mathbf{1})\vec{\mathbf{w}} &= e^{t}(\vec{\mathbf{w}} + t\vec{\mathbf{w}}') \end{aligned} \tag{13.100}$$

Libovolné řešení je lineární kombinací zmíněných

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = e^{-t}\alpha\vec{\mathbf{v}} + e^{t}(\beta\vec{\mathbf{w}}' + \gamma\vec{\mathbf{w}} + \gamma t\vec{\mathbf{w}}'), \tag{13.101}$$

kde α, β, γ jsou libovolné konstanty (lze je určit, jsou-li zadány okrajové podmínky).

Metoda variace konstant a speciální pravé strany

Soustavu n diferenciálních rovnic prvního řádu (lze modifikovat i pro rovnice vyššího řádu, viz Kopáčkova skripta) s nenulovou pravou stranou, napsanou v maticovém tvaru

$$\dot{\vec{\mathbf{x}}} - \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{f}}(t), \quad \vec{\mathbf{x}}(t), \vec{\mathbf{f}}(t) \in \mathbb{R}^n \tag{13.102}$$

lze řešit metodou variace konstant: Hledejme řešení ve tvaru

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = \exp(t\mathbf{A})\vec{\mathbf{c}}(t), \tag{13.103}$$

kde $\vec{\mathbf{c}}$ je vhodná vektorová funkce. Dosazením do (13.102) máme

$$\dot{\vec{\mathbf{c}}}(t) = \exp(-t\mathbf{A})\vec{\mathbf{f}}(t), \quad \text{tedy} \quad \vec{\mathbf{c}}(t) = \int_0^t \exp(-s\mathbf{A})\vec{\mathbf{f}}(s)ds + \vec{\mathbf{c}}(0). \tag{13.104}$$

Tento integrál lze snadno spočítat v případě, kdy $\vec{\mathbf{f}}(t)$ má tvar

$$\vec{\mathbf{f}}(t) = e^{\lambda t}p(t)\vec{\mathbf{f}}; \quad \vec{\mathbf{f}} \in \mathbb{R}^n, \tag{13.105}$$

kde λ je komplexní číslo a p je polynom. (To zahrnuje i případ pravých stran typu $e^{\lambda t}\cos(\omega t + \alpha) \cdot p(t)$, kde λ, ω, α jsou reálné. Vyjasněte.)

Rozložme počáteční podmínku $\vec{\mathbf{f}}$ do Jordanovy base matice $\mathbf{A}$. Předpokládejme tedy už rovnou, že $\vec{\mathbf{f}}$ je prvkem takovéto base, to znamená, že

$$(\mathbf{A} - \mu\mathbf{1})^k\vec{\mathbf{f}} = \vec{\mathbf{0}}, \tag{13.106}$$

kde μ je vhodné vlastní číslo matice $\mathbf{A}$ a k je přirozené číslo.

Předpokládejme nejprve, že $\mu \neq \lambda$. Pak, označíme-li $\vec{\mathbf{f}}_j := (\mathbf{A} - \mu\mathbf{1})^j\vec{\mathbf{f}}$,

$$\exp(-t\mathbf{A})\vec{\mathbf{f}}(t) = \exp(-t(\mathbf{A} - \mu\mathbf{1}))e^{(\lambda-\mu)t}p(t)\vec{\mathbf{f}} = e^{(\lambda-\mu)t}p(t)\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\vec{\mathbf{f}}_j \tag{13.107}$$

a primitivní funkci k součinu polynomu a exponenciály již jistě umíte spočítat metodou *per partes.*

<u>PRAVIDLO PRO ZAPAMATOVÁNÍ.</u> Pokud $\lambda \neq \mu$, tak řešení k pravé straně typu $e^{\lambda t}p(t)\vec{\mathbf{f}}$ je sumou výrazů tvaru $e^{\lambda t}q(t)\vec{\mathbf{f}}_m$, kde stupeň q je stejný jako stupeň p a $m \leq k$.

<u>CVIČENÍ.</u> Modifikujte pro případ, že $\lambda = \mu$.

Na závěr ještě uveďme krátkou obecnou informaci na téma

<u>INVARIANTNÍ PODPROSTORY OPERÁTORU.</u> Tak nazýváme podprostor $\mathbb{W}$ prostoru $\mathbb{V}$, které daný operátor $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ přenáší do sebe, tzn. $f(\mathbb{W}) \subseteq \mathbb{W}$. Viděli jsme již několik zajímavých příkladů invariantních podprostorů (dokonce invariantních rozkladů) při diskusi trojrozměrných isometrií, při konstrukci Penroseova pokrytí, nedávno při důkazu obecné Jordanovy věty a jinde. Platí následující jednoduché

LEMMA. Pro každé $n \leq \dim \mathbb{V}$ existuje invariantní podprostor operátoru $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$, který má dimensi n.

CVIČENÍ. Dokažte to (třeba jako důsledek invariantního rozkladu na kořenové podprostory s použitím věty o struktuře nilpotentního operátoru; existují však i jiné důkazy).

POZNÁMKA. Pojem invariantního podprostoru je důležitý i v nekonečné dimensi, kde ovšem situace takto jednoduchá není a byly sestrojeny příklady (snad poněkud patologické) operátorů nemajících žádný netriviální invariantní podprostor.

Důležitý je následující DŮSLEDEK. Každý operátor lze ve vhodné basi vyjádřit trojúhelníkovou maticí. (Podívejte se na poznámku na straně 75.) Pro jisté třídy operátorů na prostorech se skalárním součinem platí dokonce silnější výsledek, tzv. věta o spektrálním rozkladu.

DŮKAZ. Stačí sestrojit basi $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \dots \vec{\mathbf{v}}_n$ takovou, aby lineární obal každé k-tice vektorů $\vec{\mathbf{v}}_1, \dots, \vec{\mathbf{v}}_k$ byl invariantním podprostorem f.

`Nepleťte laskavě tuto větu s faktem, že matici lze vždy převést na trojúhelníkový tvar pomocí ekvivalentních řádkových úprav.`

Tento důsledek ještě použijeme později.

Zakončeme tuto kapitolu dvěma kontrolními úlohami:

CVIČENÍ. Jaký je Jordanův tvar exponenciály matice $\mathbf{A}$?

(Obdobný jako u $\mathbf{A}$, ale s exponenciálou původních hodnot na diagonále; stačí ověřit pro jednu buňku.)

CVIČENÍ. Na nějakém prostoru polynomů konečné dimense mějme diferenciální operátor (třeba druhého řádu pro konkrétnost) s polynomiálními koeficienty. Jaký může být jeho Jordanův tvar? (Zde maximální možný počet buněk pro jeden každý prvek spektra závisí na tom, jaké je minimum z čísel (nezáporných, je-li operátor rozumně definován!) tvaru

$$n \text{ minus stupeň polynomu, který je koeficientem u } n\text{-té derivace,} \tag{13.108}$$

pričemž nabude-li se toto minimum vícekrát, je diskuse ještě jemnější. Objasněte a uveďte příklady třeba s odkazem na níže uvedenou sekci Ortogonální polynomy; speciálně charakterisujte operátory, jejichž Jordanův tvar je diagonální.)

Kapitola 14

Positivní matice

Zaměříme se nyní na zkoumání (reálných) matic s nezápornými prvky ($a^i{}_j \geq 0$). Takové matice vznikají v nejrůznějších aplikacích (teorie pravděpodobnosti, biologie, fysika, ekonomie); $a^i{}_j$ mají význam korelace mezi j-tým vstupem a i-tým výstupem a jejich nezápornost bývá dána kontextem úlohy.

Z hlediska čistě algebraického vypadá asi otázka „zkoumejme matice s nezápornými prvky" nepříliš zajímavě – množina těchto matic netvoří příliš výraznou algebraickou strukturu. Na druhé straně lze říci leccos zajímavého o struktuře samotných positivnich matic. Většina příslušných výsledků byla nejprve získána v souvislosti s aplikacemi, hlavně v teorii pravděpodobnosti. Zájemci o teorii pravděpodobnosti naleznou v této kapitole zjednodušené formulace některých základních tvrzení např. z teorie Markovských procesů, ale i nekonečně dělitelných pravděpodobnostních rozložení, Brownova pohybu,... Celá tato kapitola by po expansi mohla být jakýmsi zakukleným úvodem do teorie pravděpodobnosti...

<u>Příklad 1, model epidemie.</u> Zkoumejme průběh nemoci s konstantní „intensitou nakažlivosti" v ideální populaci, kde x^z, x^n, x^i, x^d označuje procento zdravých, nemocných, imunních a mrtvých jedinců populace (jejich součet je jedna) a matice

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p^z{}_z & \circ & p^z{}_i & \circ \\ p^n{}_z & p^n{}_n & \circ & \circ \\ \circ & p^i{}_n & p^i{}_i & \circ \\ \circ & p^d{}_n & \circ & 1 \end{pmatrix} \tag{14.1}$$

s jednotkovými součty ve všech sloupcích – to lze vyjádřit rovností

$$(1,1,1,1)\mathbf{P} = (1,1,1,1) \tag{14.2}$$

označuje pravděpodobnost změny stavu daného jedince do příštího dne (např. ${p^i}_n$ je pravděpodobnost, že dnes nemocný člověk bude zítra imunní; trivialita pravého sloupce souvisí s tím, že mrtví jedinci to již mají spočtené). Je-li počáteční stav populace dán vektorem $\vec{\mathbf{x}}$, za n dní bude dán vektorem $\mathbf{P}^n\vec{\mathbf{x}}$; při volbě konstanty 1 v pravém dolním rohu ovšem bude průběh nemoci fatální.

PŘÍKLAD 2, VĚKOVÁ STRUKTURA OBYVATELSTVA. Nechť z^n, $n = 0, 1$ až 120 označuje počet žen věku $\langle n, n+1)$ v populaci. Ve stabilisované tržní společnosti uvažujme veličiny ${p^{n+1}}_n$, pravděpodobnost přežití o jeden rok a ${p^0}_n$, pravděpodobnost narození dcerky n-leté matce.

Věková struktura ženské populace v roce N je potom dána vektorem $\mathbf{P}^N\vec{\mathbf{z}}$(rok 0).

CVIČENÍ. Nalezněte podmínky na veličiny ${p^{n+1}}_n$ a ${p^0}_n$, při nichž populace expanduje resp. vymírá.

Matice z obou příkladů byly **positivní** (měly nezáporné prvky) a matice z prvého příkladu byla navíc **stochastická**, měla jednotkovou sumu v každém sloupci.

Místo „positivní“ bychom měli přesněji říkat „nezáporná“. V aplikacích se však nejčastěji setkáváme se situací, kdy buď již přímo prvky zkoumané matice jsou všechny ostře větší než nula nebo toto alespoň platí pro dostatečně velkou mocninu dané matice (a tudíž se systém nerozpadá na několik „vzájemně nekomunikujících“ částí). To budeme mlčky předpokládat i my v dalším zkoumání, kterému však pro kontrast předešleme jednoduché

CVIČENÍ. Nezáporná matice $\mathbf{A}$ je nilpotentní právě tehdy když *neexistují* cykly libovolné délky $n_1, \ldots, n_k = n_1$ takové, že $a_{n_i,n_{i+1}} \neq 0$.

(Je vůbec třeba předpokládat nezápornost matice ???) Pro positivní matice (ve smyslu předchozí poznámky) platí následující důležité tvrzení.

14.1 Perron-Frobeniova věta

Nechť $\mathbf{A}$ je positivní matice. Označme symbolem

$$\rho(\mathbf{A}) = \max_{\lambda \in \text{spektrum}} |\lambda| \tag{14.3}$$

spektrální poloměr A.

Pak $\rho(\mathbf{A}) = \lambda$ pro nějaké vlastní kladné číslo λ. Navíc, toto „největší vlastní číslo“ je jednoduché. Dále, pro libovolnou počáteční volbu kladného vektoru $\vec{\mathbf{x}}$ platí

$$(\mathbf{A}/\lambda)^n \vec{\mathbf{x}} = c_x \vec{\mathbf{v}} + \text{zbytek}, \tag{14.4}$$

kde c_x je konstanta závisící na $\vec{\mathbf{x}}$, vektor $\vec{\mathbf{v}}$ je vlastní vektor příslušící λ (tato věta implikuje, že je jen jeden!) a zbytek má řád q^n, kde q je podíl druhého největšího čísla ku λ.

Je-li navíc $\mathbf{A}$ stochastická, je $\lambda = 1$. Vektor $\vec{\mathbf{v}}$ potom nazveme **stacionárním stavem** a je $c_x = \sum x^i$.

<u>Poznámka.</u> Je tedy

$$\mathbf{A}^{n+1} \vec{\mathbf{x}} \approx \lambda \mathbf{A}^n \vec{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{A}^n \vec{\mathbf{x}} \approx \text{const } \vec{\mathbf{v}}. \tag{14.5}$$

Tyto dva vztahy nám dávají návod k přibližnému výpočtu $\lambda = \rho(\mathbf{A})$ a $\vec{\mathbf{v}}$.

<u>Cvičení.</u> Pokuste se samostatně dokázat některá z uvedených fakt.

<u>Návod k důkazu Perron-Frobeniovy věty.</u> ($\sharp$)

- Důkaz stačí provést v případě, že $\rho(\mathbf{A}) = 1$, protože vezmeme-li matici $\mathbf{B} = (\rho(\mathbf{A}))^{-1}\mathbf{A}$, platí $\rho(\mathbf{B}) = 1$.

- Nechť tedy $\rho(\mathbf{A}) = 1$. Nechť je dále $\mathbf{A}\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}$, předpokládejme, že <u>ne</u> všechny složky v^i mají stejné znaménko. Pišme pak $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}^+ - \vec{\mathbf{v}}^-$, kde $v^{+,i} = \max(v^i, 0)$. Vzhledem k positivnosti prvků $\mathbf{A}$ jsou vektory $\mathbf{A}\vec{\mathbf{v}}^+$ a $\mathbf{A}\vec{\mathbf{v}}^-$ také positivní. Zaveďme vektor $\vec{\mathbf{w}}$

$$w^i = \min[(\mathbf{A}\vec{\mathbf{v}}^+)^i, (\mathbf{A}\vec{\mathbf{v}}^-)^i] \tag{14.6}$$

  a pak lze spatřit, že vektory $\vec{\mathbf{z}}^+$ a $\vec{\mathbf{z}}^-$ v následujících rozpisech jsou opět nenegativní.

$$\mathbf{A}\vec{\mathbf{v}}^+ = \vec{\mathbf{w}} + \vec{\mathbf{z}}^+, \quad \mathbf{A}\vec{\mathbf{v}}^- = \vec{\mathbf{w}} + \vec{\mathbf{z}}^-. \tag{14.7}$$

  Pak je $\mathbf{A}(\vec{\mathbf{v}}^+ + \vec{\mathbf{v}}^-) = 2\vec{\mathbf{w}} + \vec{\mathbf{z}}^+ + \vec{\mathbf{z}}^-$, na druhé straně však je $\mathbf{A}(\vec{\mathbf{v}}^+ + \vec{\mathbf{v}}^-) = \mathbf{A}\vec{\mathbf{v}} + 2\mathbf{A}\vec{\mathbf{v}}^-$, a tak $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{z}}^+ - \vec{\mathbf{z}}^-$, ale protože každá souřadnice je nulová u alespoň jednoho vektoru ze $\vec{\mathbf{z}}^+$ a $\vec{\mathbf{z}}^-$, musí být $\vec{\mathbf{v}}^\pm = \vec{\mathbf{z}}^\pm$.

  Měli bychom pak $\mathbf{A}(\vec{\mathbf{z}}^+ + \vec{\mathbf{z}}^-) = \vec{\mathbf{z}}^+ + \vec{\mathbf{z}}^- + 2\vec{\mathbf{w}} \geq (1+\rho)(\vec{\mathbf{z}}^+ + \vec{\mathbf{z}}^-)$ pro vhodné $\rho > 0$, což je možné pouze v triviálním případě $\vec{\mathbf{v}} = 0$. (Jinak by pak musel existovat vlastní číslo větší než jedna.)

- Obdobný argument se dá provést v obecnějším a užitečnějším případě, kdy místo kladnosti všech prvků $\mathbf{A}$ předpokládáme jen jejich nezápornost a kladnost prvků vhodné mocniny $\mathbf{A}^k$.

- Nechť $\mathbf{A}\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}$, $\mathbf{A}\vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{w}}$. Argumenty podobnými jako v druhém bodě ukážete jednoznačnost vlastního vektoru, tedy vztah

$$\vec{\mathbf{v}} = \alpha\vec{\mathbf{w}}. \tag{14.8}$$

- Tedy existuje jediný řetězec příslušející vlastnímu číslu jedna. Navíc je to však řetězec jednočlenný, protože kdyby $\exists\vec{\mathbf{z}}$, že

$$(\mathbf{A} - \mathbf{1})\vec{\mathbf{z}} = \vec{\mathbf{v}}, \quad (\mathbf{A} - \mathbf{1})\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{0}}, \tag{14.9}$$

platilo by také (roznásobte)

$$\mathbf{A}^n\vec{\mathbf{z}} = (\mathbf{A} - \mathbf{1} + \mathbf{1})^n\vec{\mathbf{z}} = \vec{\mathbf{z}} + n\vec{\mathbf{v}}, \tag{14.10}$$

což však není možné, protože posloupnost $\mathbf{A}^n\vec{\mathbf{z}}$ má všechny složky omezené (dokažte!), zatímco $\{\vec{\mathbf{z}} + n\vec{\mathbf{v}}\}$ je neomezená (pro nenulové $\vec{\mathbf{v}}$).

Poznámka o přibližném výpočtu spektrálního poloměru. Uvedené vztahy

$$\mathbf{A}^{n+1}\vec{\mathbf{x}} = \lambda\mathbf{A}^n\vec{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{A}^n\vec{\mathbf{x}} = \text{const } \vec{\mathbf{v}}, \tag{14.11}$$

kde $\mathbf{A}\vec{\mathbf{v}} = \lambda\vec{\mathbf{v}}$, $|\lambda| = \rho(\mathbf{A})$, lze zobecnit pro libovolnou matici (i pro případ, kdy $\rho(\mathbf{A}) = |\lambda|$ s komplexním λ); tam však musíme pracovat s dvěma přibližnými rovnostmi místo jedné).

Formulujte toto zobecnění a (ovládáte-li již dobře teorii Jordanova tvaru) dokažte příslušná tvrzení.

Cvičení. Pohyb bludištěm. Mějme dvojrozměrné konečné bludiště tzn. systém pokojů s dveřmi (některé z nich vedou ven) takový, že v každém pokoji máme zadáno rozdělení pravděpodobnosti, udávající s jakou střední četností budeme jednotlivými dveřmi z daného pokoje vystupovat popř. zda zůstaneme sedět na místě. (Například předpoklad rovnocennosti všech viditelných dveří tzn. totální desorientace putujícího.) Předpokládejme že kterékoliv dveře fungují oboustranně tzn. používají li se, tak oběma směry – i když nikoliv nutně se stejnou četností. (Takovýto předpoklad neexistence pastí lze definovat i obecněji, zformulujte.) Potom náhodný (nezemdlený, tudíž stále se pohybující ovšem) poutník „časem určitě vyleze z bludiště". Matematisujte (rozměr matice je dán počtem pokojů plus jedna, zkoumaným vektorem je pravděpodobnost pobytu v různých pokojích v daném čase uplynulém od vchodu do bludiště zvolenými dveřmi), vyřešte a případně i odhadněte střední čas strávený pobytem v bludišti pro nějaký konkrétní labyrint. (Chcete-li ovšem podrobnější odhady druhého největšího vlastního čísla atp., dá to dost práce.)

O nalezení „největšího" vlastního vektoru

Následující dvě věty vznikly původně v teorii Markovských procesů a jsou nyní známy jako podmínka tzv. detailní rovnováhy v knihách o nerovnovážné statistické fysice. Tyto věty dobře ilustrují osud některých matematických tvrzení, která postupně vznikla odpozorováním zákonitostí v jistých speciálních situacích, aby po patřičném zobecnění a zjednodušení nabyla vzhledu malého cvičení ze sbírky úloh lineární algebry.

<u>VĚTA.</u> Je-li stochastická matice $\mathbf{A}$ symetrická, je vektor

$$\vec{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{14.12}$$

jejím vlastním vektorem příslušným největšímu vlastnímu číslu 1.

Tato a následující věta nacházejí důležité aplikace v nerovnovážné statistické fysice. Uvědomme si například, že při zkoumání systému o 10^{23} částic (z nichž každá nabývá třeba jen dvou různých stavů – jako spin nahoru nebo dolů – takto nějak vypadá třeba tzv. **Isingův model** statistické fysiky) pracujeme s konfiguračním prostorem o $2^{10^{23}}$ prvcích (kvantově s lineárním prostorem této dimense). Máme tedy co do činění s maticemi poněkud velkého rozměru...

Následující větu lze chápat také (pro nezájemce o statistickou fysiku) jako cvičení na témata užití Perron-Frobeniovy věty, vlastních vektorů, hodnosti,...

<u>VĚTA.</u> Označíme-li symbolem ρ spektrální poloměr positivní matice $\mathbf{A}$ (tj. největší vlastní číslo), tak platí

$$(\rho^{-1}\mathbf{A})^n \to \mathbf{D}\Pi\mathbf{D}', \quad n \to \infty, \tag{14.13}$$

kde $\mathbf{D}$, $\mathbf{D}'$ jsou vhodné positivní diagonální matice a $\mathbf{\Pi}$ označuje matici, jejíž všechny (i nediagonální) prvky jsou 1. Navíc platí

$$\sum_{i=1}^{m} d^i{}_i d'^i_i = 1 \quad (m \text{ je rozměr matice } \mathbf{A}) \tag{14.14}$$

a příslušný vlastní vektor k ρ je tvaru

$$\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} d^1{}_1 \\ \vdots \\ d^m_m \end{pmatrix}. \tag{14.15}$$

Je-li $\mathbf{A}$ symetrická, tak $\mathbf{D} = \mathbf{D}'$ a $\sum_{i=1}^{m} (d^i{}_i)^2 = 1$ a pro stochastickou $\mathbf{A}$ dostáváme vztah

$$d'^i_i = \frac{1}{d}, \qquad \text{kde} \qquad d = \sum_{i=1}^{m} d^i{}_i, \qquad \text{tzn. } \mathbf{A}^n \to \frac{1}{d}\mathbf{D\Pi}. \tag{14.16}$$

Konečně pro symetrickou stochastickou $\mathbf{A}$ máme rovnost $d^i{}_i = 1/\sqrt{m}$, tzn. předchozí větu.

Nechť $\mathbf{A}$ je stochastická matice taková, že existuje diagonální matice $\mathbf{Q}$ taková, že matice $\mathbf{AQ}$ je symetrická. Potom řešení $\mathbf{A}\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{u}}$ je tvaru

$$\vec{\mathbf{u}} = \text{const } \mathbf{Q} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{14.17}$$

<u>DŮKAZ.</u> *První část si zkuste dokázat sami s použitím Perron-Frobeniovy věty. Druhá část plyne z prvé takto:*

$\mathbf{AQ}$ *je symetrická* $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{AQ} = \mathbf{QA}^T$, *z čehož*[1] $\mathbf{A}^n\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{A}^T)^n$, *a tak je symetrická i* $\mathbf{A}^n\mathbf{Q}$.

S použitím prvé části máme (díky stochastičnosti $\mathbf{A}$*)* $\mathbf{A}^n \to \mathbf{P\Pi}$ *s diagonální* $\mathbf{P}$ *s jednotkovou stopou a (díky symetrii* $\mathbf{A}^n\mathbf{Q}$*)* $\mathbf{A}^n\mathbf{Q} \to \mathbf{D\Pi D}$, *tedy* $\mathbf{D} = \mathbf{Q} = \mathbf{P}$, $\vec{\mathbf{u}} = \mathbf{A}^n\vec{\mathbf{u}} \to \mathbf{P\Pi}\vec{\mathbf{u}} = \textit{const } \mathbf{Q}(1, 1, \dots, 1)^T$.

[1] Ukažte si např. indukcí: $\mathbf{AAQ} = \mathbf{AQA}^T = \mathbf{QA}^T\mathbf{A}^T$ atd.

Grupy positivních matic

Začněme následujícím cvičením.

<u>CVIČENÍ.</u> Charakterisujte matice $\mathbf{A}$ takové, že $\exp(t\mathbf{A})$ je positivní resp. stochastická matice pro všechny reálné hodnoty parametru t.

<u>ODPOVĚĎ.</u> Jde o matice, jejichž všechny prvky mimo diagonálu jsou nezáporné resp. navíc suma prvků v každém sloupci je rovna nule! Abychom toto nahlédli, stačí se podívat na případ, kdy $t \to 0$.

Zajímáme-li se speciálně o tzv. konvoluční matice (viz odstavec dualita grup; jde o matice komutující s maticí „posunu“ v cyklické grupě $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2..., n-1\}$, tedy přesněji řečeno v lineárním „formálním“ obalu této grupy), máme tuto odpověď: infinitesimálním generátorem takovéto konvoluční grupy je opět nějaká konvoluce, jejíž jádro je kladné přičteme-li k němu vhodný násobek „Diracovy delta funkce v nule“! Pro stochastické konvoluční grupy je navíc suma jednotlivých hodnot jádra nulová.

Toto je jakousi jednoduchou analogií tvrzení o tvaru tzv. „nekonečně dělitelných pravděpodobnostních rozložení“ z teorie pravděpodobnosti, kde se zhruba řečeno dokazuje, že takováto pravděpodobnostní rozložení jsou buď gaussovská nebo Poissonovská – či jakási „mixáž“ těchto dvou. Prohlédnemeli si konvoluční jádro sestrojené již v zimním semestru při diskusi Vandermondovy matice (při diskusi náhrady vyšších derivací diferencemi), vidíme, že nemůže být kladné (ani po přičtení vhodné hodnoty v bodě nula) pro derivace vyššího řádu než dvě. Takže nás moc nepřekvapí, že diferenční (resp. diferenciální při přechodu ke spojitému případu) operátory řádu vyššího než dvě se při studiu grup positivních matic nebudou vyskytovat jakožto generátory. To, jak diferenční operátory řádu nejvýše dva vedou k Poissonovským či – ve vhodně pojaté limitě – dokonce ke gaussovským mírám, jsme již trochu nahlédli v kapitole exponenciála matice. Přesné formulace takovýchto tvrzení samozřejmě vyžadují detailnější analýzu, viz monografie z teorie pravděpodobnosti.

14.2 Feynmanův integrál

Idea „**integrálu přes všechny trajektorie**“ vznikla nejprve v pracích N.Wienera (1920→30) budujících teorii Brownova pohybu. Jde o zkoumání pologrupy $\{\exp(t\Delta) \mid t \geq 0\}$, kde Δ je Laplaceův operátor v $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ apod.

V tomto případě byla vybudována matematicky rigorosní analogie úvah, které budeme provádět v této sekci.

Podobnou ideu rozvinul heuristicky Richard Phillips Feynman poté, co ho do reje fysiky opět vtáhl problém, proč má tenký talíř rotující a houpající se ve vzduchu poměr frekvencí těchto dvou pohybů právě $1 : 2$, a získal tak alternativní formulaci kvantové mechaniky, která je dnes velmi populární. Jeho konstrukce analogií vztahů, jež uvedeme za chvíli, pro operátor $(i\Delta + U)$ dosud nenašla matematicky precisní tvar (vyjma případu diskutovaného níže v odstavci *Feynmanův integrál a exp. matice*). Za posledních 40 let bylo učiněno několik pokusů „zařadit tento pojem plně do matematiky". Vyšlo i několik přehledných článků, dokonce i knih majících ambiciózní názvy jako „matematicky rigorózní teorie Feynmanova integrálu"; ještě více matematiků si na předmětu asi vylámalo zuby (které naštěstí někdy narostly znovu) a dost bylo asi také těch, kteří si na čas mysleli (koneckonců i jeden z autorů těchto skript před mnoha lety...), že se s problémem vyrovnali tím, že dokázali, že Feynmanův integrál „neexistuje". On skutečně existuje jako „integrál" či „míra" (ve smyslu mat. teorie míry) prakticky pouze pro grupy konečných matic (viz níže) resp. nekonečných positivních matic, jak specialisté dobře vědí. (Však je na něm také založena rozsáhlá část soudobé teorie pravděpodobnosti a teorie potenciálu). Konkrétně, Feynmanův integrál vybudovaný pro rovnici vedení tepla je matematicky zcela v pořádku na rozdíl od rovnice Schrödingerovy. Rozdíl je dán kladností příslušného „jádra" $\exp(-x^2)$ v kontrastu s komplexním jádrem $\exp(ix^2)$ pro rovnici Schrödingerovu. Rozdíl v matematických potížích v těchto dvou zdánlivě analogických situacích je tak propastný, že vedl po dobu několika desetiletí matematické i teoretické fysiky (viz poznámku na téma vztahu těchto dvou – poněkud odlišných – způsobů nazírání fysiky na konci této kapitoly) ke konstruování „euklidovských variant", jakýchsi analogií skutečné fysiky založených, zjednodušeně řečeno, na náhradě čísla i číslem -1 v exponenciále, tzn. na náhradě Schrödingerovy rovnice rovnicí vedení tepla. (Tak postupují i fysici, prodlužují-li analyticky problém do „imaginárního času" resp. do „euklidovského časoprostoru", kde dostanou výsledky, které převedou opět do reálného času.)

Zdá se však, že přistupovat k problému Feynmanova integrálu jenom z matematických posic není rozumné. Lepší je asi objekt intensivně (nerigorózně, co se dá dělat...) zkoumat (což se třeba v teorii elementárních částic vydatně děje; tam i v jiných oblastech současné fysiky jsou Feynmanovy integrály skutečným pilířem teorie) a tím vyjasnit jeho požadované vlastnosti před tím, než se ho násilně pokusíme vměstnat do existujících matematických struktur (ať už to je teorie míry či cokoliv jiného), z nichž žádná nemusí být adekvátní. Pokud je metoda skutečně užitečná, tak se asi někdy vhodný matematický formalismus objeví – podobně, jako se časem objevil pro popis delta funkce, operátorového kalkulu apod. (Už to ale trvá v případě Feynmanova integrálu dost dlouho... zdá se však, že vhodný formalismus je nyní do značné míry připraven v současném pojmovém aparátu tzv. clusterových rozvojů matematické statistické fysiky.) A nyní tedy blíže k věci:

Feynmanova interpretace kvantové fysiky se dá zjednodušeně vyložit takto: při běžném přechodu od teorie klasické k teorii kvantové nahradíme veličiny klasické teorie nějakými operátory, vydedukujeme jejich komutátory atd. a získáme vzorec pro hamiltonián, podle něhož se v čase mění stavový vektor (Schrödingerovo pojetí) nebo operátory (Heisenbergovo pojetí).

Skutečnost, že částice už nemá přesnou trajektorii (resp. v teorii pole že pole nemá přesné hodnoty ve všech místech prostoru a ve všech časech), lze spolu s Feynmanem vyložit tak, že všechny myslitelné trajektorie přispívají k **amplitudě pravděpodobnosti** (což je komplexní číslo takové, že čtverec jeho absolutní hodnoty nám dává pravděpodobnost nebo její hustotu) činitelem

$$\exp(\frac{iS}{\hbar}), \tag{14.18}$$

kde S je účinek (časový integrál z lagranžiánu) a $\hbar$ je Planckova konstanta. Skutečnost, že limitním případem kvantové teorie je klasický pohyb po konkrétní trajektorii, teď vysvětlíme tak, že v tomto případě se fáze $S/\hbar$ rychle mění a příspěvky (komplexní jednotky) se s velkou přesností ruší s výjimkou trajektorií v blízkosti klasické, která splňuje $\delta S = 0$, a proto přispívá největším dílem.

Feynman vtipně aplikoval své integrály na kvantovou teorii pole; integroval tedy přes všechny možné hodnoty pole a získal pravidla pro výpočet elementů **S-matice**[2] (z níž se dají spočítat účinné průřezy různých rozptylových procesů). Amplitudy (elementy S-matice) se získají sumací přes různé **Feynmanovy diagramy**. To jsou ty obrázky, kde např. jeden ze dvou vstupujících elektronů „vyšle“ **virtuální** foton, který druhý z nich „pohltí“, a tím modelujeme interakci mezi elektrony (k amplitudě přispívají i složitější procesy, kde se např. virtuální foton změní na moment na elektron-positronový pár).

Navíc, Feynmanovy diagramy jdou pozměnit na případ, kdy elementární

[2] Písmeno „S“ pochází od německého „Streung“ nebo anglického „scattering“.

stavební objekty nejsou bodové částice, ale struny tak, že získají tvar spojujících se a rozpojujících „trubek“ (např. „kalhot“), a lze získávat i amplitudy pro teorie stringů. Jestliže u „bodových“ diagramů již diagramy s jedním rozdělením fotonu na elektron-positronový pár (diagram **polarisace vakua**) dávaly nekonečný příspěvek, ze kterého se získává konečná hodnota určitou **regularisací** (přiřazováním konečných hodnot divergujícím integrálům), některé (super)stringové teorie vycházejí zcela konečné.

V průběhu let se objevily i jiné způsoby (než jsou integrály po trajektoriích), jak odvodit Feynmanovy diagramy (např. Freemana Dysona), ale „path-integrály“ zůstávají nejoblíbenějšími.

Podíváme se nyní na nejjednodušší příklady.

Násobení mnoha matic alias Feynmanův integrál

($\flat$) Součin $\mathbf{\Pi}$ matic rozměru $n \times n$ $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots, \mathbf{Z}$ má, jak známo, elementy

$$\Pi^{i'}{}_{j'} = \sum_{(a,b,\dots,y)} a^{i'}{}_a b^a{}_b c^b{}_c \cdot \dots \cdot z^y{}_{j'}, \tag{14.19}$$

kde suma je přes všechny **trajektorie**, čili uspořádané pětadvacetice indexů $(a, b, \dots, y)$. ($\heartsuit$)

Exponenciála matice a Feynmanův integrál

($\sharp\sharp$) Použijeme vztah

$$\exp t\mathbf{A} = (\exp \frac{t\mathbf{A}}{N})^N = \lim_{N\to\infty} (\mathbf{1} + \frac{t\mathbf{A}}{N})^N. \tag{14.20}$$

V dalším si představujme interval $\langle 0, t\rangle$ rozdělen na N stejných dílů dělícími body $t_m = mt/N$, $m = 0, 1, \dots, N$.

Trajektorií nazvěme libovolnou posloupnost[3]

$$y = (y(0), y(1), \dots, y(N)) \quad \text{s hodnotami v } \{1, 2, \dots, n\}, \tag{14.21}$$

kde $n \times n$ je rozměr matice $\mathbf{A}$.

Je-li $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ vektor, můžeme vektor $\vec{\mathbf{z}} := (\exp t\mathbf{A})\vec{\mathbf{x}}$ napsat jako limitu výrazů tvaru (v dalším píšeme indexy matice neodsazeny těsně nad sebou, z estetických důvodů; horní index má být více vlevo)

$$\vec{\mathbf{z}} = (\mathbf{1} + \frac{t\mathbf{A}}{N})^N \vec{\mathbf{x}} \quad \text{a tedy} \tag{14.22}$$

[3]Pod $y(m)$ míníme totéž, co $y(t_m)$.

$$z^j_{(N)} = \sum_{y:y(N)=j} \prod_{i=0}^{N-1} (\mathbf{1} + \frac{t\mathbf{A}}{N})^{y(i+1)}_{y(i)} x^{y(0)}. \tag{14.23}$$

Pišme $\mathbf{A}$ ve tvaru $\mathbf{A} = \mathbf{U} + \mathbf{\Delta}$ s diagonální maticí $\mathbf{U}$ a s maticí $\mathbf{\Delta}$ s nulovými diagonálními prvky. Pak je

$$\prod_{i=0}^{N-1} (\mathbf{1} + \frac{t}{N}\mathbf{U} + \frac{t}{N}\mathbf{\Delta})^{y(i+1)}_{y(i)} = \tag{14.24}$$

$$= \prod_{i:y(i+1)=y(i)} (\mathbf{1} + \frac{t}{N}\mathbf{U})^{y(i+1)}_{y(i)} \prod_{i:y(i+1)\neq y(i)} (\mathbf{1} + \frac{t}{N}\mathbf{\Delta})^{y(i+1)}_{y(i)}, \tag{14.25}$$

což je přibližně (v limitě $N \to \infty$ přesně) rovno, s označením $U(y) = U^y_y$

$$\exp\left(\frac{t}{N} \sum_{i:y(i+1)=y(i)} U(y(i))\right) \left(\frac{t}{N}\right)^s \prod_{i:y(i+1)\neq y(i)} \Delta^{y(i+1)}{}_{y(i)}, \tag{14.26}$$

kde s je počet „skoků“ $(y(i+1) \neq y(i))$ trajektorie y (končící v bodě j).

Úhrnem (vztah je přesný pro $N \to \infty$, pak $s \ll N$)

$$z^j = \sum_y P(y) \exp\left(\int_0^t U(y(u))du\right) x^{y(0)}, \qquad (**) \tag{14.27}$$

kde váha $P(y)$ („Feynmanova míra“ přes y; $y(t) = j$) je dána výrazem

$$P(y) = \left(\frac{t}{N}\right)^s \prod_{i=0}^{N-1} \Delta^{y(i+1)}{}_{y(i)}. \tag{14.28}$$

Výraz (**) nazýváme **Feynmanovým integrálem** funkce

$$y \mapsto \exp \int_0^t U(y(u))du \cdot x^{y(0)} \tag{14.29}$$

podél váhy P.

S použitím pojmu míry (viz kursy analýzy) lze vzorci (**) dát zcela přesný smysl pro jakoukoli matici $\mathbf{A}$ i pro $N \to \infty$. (Dá to ovšem jistou práci. Pro znalce: P má charakter Poissonova pole na prostoru po částech konstantních trajektorií.)

<u>Cvičení.</u> Vyjasněte (**) pro případ operátoru

$$(\mathbf{A}\vec{\mathbf{f}})^n = f^{n+1} + f^{n-1} + U(n)f^n. \tag{14.30}$$

Formule (**), často nazývaná **Feynman-Kacova**, dává řešení počáteční úlohy

$$\dot{\vec{\mathbf{z}}} = \mathbf{A}\vec{\mathbf{z}}, \quad \vec{\mathbf{z}}(0) = \vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n. \tag{14.31}$$

Okrajovou úlohou (termín z teorie diferenciálních rovnic) rozumíme nalezení řešení $\dot{\vec{\mathbf{z}}} = \mathbf{A}\vec{\mathbf{z}}$ za podmínky, že hodnota některých složek $\vec{\mathbf{z}}$ je předepsána pro každý čas t (případně jen pro některé časy).

Příklad pro $\mathbf{A} = \mathbf{\Delta}$: na mřížce 6×6 bodů mohou tvořit hraniční body dvacet okrajových indexů.

Hledáme-li řešení na intervalu $t \in \langle t_0, \infty)$, pak obvykle zadáváme také počáteční podmínku $\vec{\mathbf{z}}(t_0)$. (Je-li z^k v daném čase t zadáno jako okrajová podmínka, tak platnost vztahu $\dot{\vec{\mathbf{z}}} = \mathbf{A}\vec{\mathbf{z}}$ suspendujeme (`dočasně rušíme`) po dobu platnosti okrajové podmínky pro z^k.)

Pro každou trajektorii označme symbolem τ poslední okamžik t, pro níž je $y(t)$ z množiny, kde je předepsána okrajová hodnota v daném čase t. Potom místo (**) máme formuli ($\hat{y}$ je úsek trajektorie od τ k t)

$$\begin{aligned} z^j = \textstyle\sum_y P(\hat{y}) \exp\left(\int_\tau^t U(y(u))du\right) z^{y(\tau)} + \qquad (***) \\ + \textstyle\sum_{y:\tau=t_0} P(y) \exp\left(\int_{t_0}^t U(y(u))du\right) x^{t_0} \end{aligned} \tag{14.32}$$

$$\text{kde} \qquad P(\hat{y}) = \left(\frac{t}{N}\right)^s \prod_{t_m \geq t}^{t} \Delta_{y(t_m)}^{y(t_{m+1})}. \tag{14.33}$$

<u>Poznámka.</u> Formuli (***) lze dále zobecnit, definujeme-li operaci $\hat{y}$ (useknutí trajektorie od t_0 do τ) pro libovolnou veličinu τ definovanou nejen jako „okamžik posledního pobytu trajektorie“ v nějaké zadané množině, která se může měnit s časem, ale obecněji jako „okamžik prvního objevení se určité události formulované pouze v termínech další budoucnosti trajektorie“. Takovéto veličiny se nazývají **hitting time** nebo **stopping time** (což má smysl, pokud se díváme na trajektorii směrem do minulosti).

<u>Cvičení.</u> Dokažte (***) i v případě, že τ je libovolný hitting time. (Využijte multiplikativity $\exp \int_{t_0}^t = \exp \int_{t_0}^\tau \exp \int_\tau^t$ a $P(y) = P(\check{y})P(\hat{y})$, kde $\check{y}$ resp. $\hat{y}$ je úsek y do resp. po času τ.)

<u>Jednodušší příklad s ideou Feynmanova integrálu.</u>
Hledejme funkci f na oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, splňující rovnici

$$\Delta f = 0, \tag{14.34}$$

kde $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ je (dvourozměrný) laplacián, která navíc splňuje okrajovou podmínku $f = g$ na hranici $\partial\Omega$ dané oblasti. Interpretujme úkol třeba jako hledání stacionárního rozložení teploty v autě (nepředpokládáme ovšem proudění vzduchu, představte si třeba auto naplněném pískem) při zadané teplotě různých míst na karosérii.

Problém diskretisujeme (a snad nediskreditujeme): místo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ vezmeme konečnou podmnožinu Ω mříže $\mathbb{Z}^2$; některé body prohlásíme za hraniční ($\partial\Omega$) a předepíšeme na nich okrajovou podmínku g. (Tento předpis se nebude v uvažovaném nejjednodušším případě s časem měnit.) Místo běžné diskretisované verse laplaciánu

$$(\Delta f)^{\vec{\mathbf{x}}} = \frac{1}{4}(f^{\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{e}}_1} + f^{\vec{\mathbf{x}}-\vec{\mathbf{e}}_1} + f^{\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{e}}_2} + f^{\vec{\mathbf{x}}-\vec{\mathbf{e}}_2} - 4f^{\vec{\mathbf{x}}}) \tag{14.35}$$

pracujme s operátorem průměru přes sousedy $P = \mathbf{1} + \Delta$ (poslední člen Δ mu chybí; $(Pf)^{\vec{\mathbf{h}}}$ pro hraniční body definujme jako konstantu $g^{\vec{\mathbf{h}}}$) a chceme tedy vyřešit rovnici $P\vec{\mathbf{f}} = \vec{\mathbf{f}}$ při podmínce $f = g$ na $\partial\Omega$, tzn. najít vlastní vektor příslušející největšímu vlastnímu číslu jedna stochastické matice P; tato interpretace nás však už nyní tolik nezajímá.

Dosazujme do pravé strany definice P

$$(Pf)^{\vec{\mathbf{x}}} = \frac{1}{4}(f^{\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{e}}_1} + f^{\vec{\mathbf{x}}-\vec{\mathbf{e}}_1} + f^{\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{e}}_2} + f^{\vec{\mathbf{x}}-\vec{\mathbf{e}}_2}) \tag{14.36}$$

za f výraz Pf (mají se rovnat), názorně řečeno „nechme teplo stěn působit na auto, dokud nedojde k rovnováze“, až narazíme na $\partial\Omega$. (To znamená, $f^{\vec{\mathbf{h}}}$ pro $\vec{\mathbf{h}} \in \partial\Omega$ už nerozepisujme, ale nahraďne okrajovou podmínkou $g^{\vec{\mathbf{h}}}$.)

Získáme vztah (připomeňme, že τ označuje okamžik dosažení stěny)

$$f^{\vec{\mathbf{x}}} = \sum_y g(y(\tau))\frac{1}{4^\tau}, \tag{14.37}$$

kde sumace je přes všechny „náhodné procházky“ po $\mathbb{Z}^2$, startující v $\vec{\mathbf{x}}$ a končící okamžikem dosažení $\partial\Omega$.

Říkáte „tolik práce a žádný výsledek“? Nemáte zas tak pravdu. Alespoň je ze vzorce vidět, že více ovlivňují „teplotu v bodě x“ trajektorie krátké (a tedy také body blízké), z čehož plyne poučení, že když se chceme ohřát, je lepší býti k topení blíže než dále.

Co více, uvěříme-li, že dostatečně jemná mřížka je dobrou aproximací kontinua, pochopíme, proč platí věta, že hodnota funkce f ve středu koule, uvnitř které má f nulový laplacián, je rovna ustřednění přes povrch.

$$f(\vec{\mathbf{0}}) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{||\vec{\mathbf{a}}||=r} f(\vec{\mathbf{a}})\,|dS|\,. \tag{14.38}$$

Z integrálu po trajektoricích je zřejmé, že $f(\vec{\mathbf{0}})$ je kombinací (váženým průměrem) hodnot f na povrchu a cit pro symetrii nám napoví, že pro případ středu koule budou všechny body povrchu vystupovat se stejnou vahou. (V analýze se tvrzení dokazuje ve **větě o třech potenciálech**.)

Poznámka. Poslední vztah pro $f(x)$ je velmi speciálním případem (***), navíc pro případ „diskrétního času", kdy místo grupy $\{\exp t\Delta\}$, $t \in \mathbb{R}$, máme posloupnost operátorů $P, P^2, P^3, P^4, \ldots$

Feynmanův integrál v kvantové teorii pole

Ukážeme si filosofii převedení integrálu po trajektoriích na integrál obyčejný (několikarozměrný). Jako příklad si nevypůjčíme obvyklou (bodovou) teorii pole, nýbrž teorii strun. Výpočty, které naznačíme, se provádějí při výpočtu rozptylových amplitud v teoriích bosonových (neobsahujících antikomutující proměnné) uzavřených strun (z topologického hlediska kružnice).

Pro danou funkci J komplexní proměnné $z = x + iy$ (kterou budeme pojímat jako parametrisaci sféry promítnuté ze severního pólu do roviny rovnoběžné s rovníkem) chtějme spočítat Feynmanův integrál přes všechny funkce X proměnné z z exponenciály jakéhosi integrálu:

$$I_J = \int \mathcal{D}X(z) \exp\left(\int dx\,dy \left[-(\nabla X)^2 + iJ(z)X(z)\right]\right), \tag{14.39}$$

kde $(\nabla X)^2 = (\partial/\partial x(X))^2 + (\partial/\partial y(X))^2$. Metoda doplnění na čtverec nám teď pomůže tak, že provedeme vhodnou[4] substituci $X(z) = X'(z) + M(z)$ (posunutí), čímž zůstane nezměněna míra integrace $\mathcal{D}X = \mathcal{D}X'$, protože jde o jakýsi „součin diferenciálů funkce X ve všech bodech roviny". Tím se nám exponent upraví (užíváme nový symbol pro čtverec gradientu, ∂_α je derivace podle x nebo y)

$$-\partial_\alpha X \partial_\alpha X + iJX = -\partial_\alpha X' \partial_\alpha X' - 2\partial_\alpha M \partial_\alpha X' - \partial_\alpha M \partial_\alpha M + iJ(X' + M) \tag{14.40}$$

a vidíme, že když upravíme per partes jeden člen

$$-2\partial_\alpha M \partial_\alpha X' = -2\partial_\alpha (X \partial_\alpha M) + 2X\Delta M, \tag{14.41}$$

[4] Nic se neděje, bude-li M komplexní; funkce $\exp -z^2$ je holomorfní.

vyškrtneme podle Gaussovy věty první člen pravé strany, který nepřispívá díky spojitosti X v nekonečnu, a zvolíme $M(z)$ natolik vhodně, aby bylo $J(z) = 2i\Delta M(z)$, vyruší se nám kombinované členy JX' a v exponenciále bude jen

$$-\partial_\alpha X'\partial_\alpha X' - \partial_\alpha M\partial_\alpha M + iJM \tag{14.42}$$

a když přepíšeme exponenciálu součtu jako součin exponenciál, můžeme druhou z nich vytknout před Feynmanův integrál a výsledkem tedy je (od členu $\partial_\alpha M\partial_\alpha M$ jsme opět odečetli totální divergenci)

$$I_J = \exp\int dx\,dy\frac{i}{2}JM\cdot I_{J=0}, \tag{14.43}$$

protože to co v dráhovém integrálu zbylo (po přejmenování integrační proměnné funkce $X' \to X$) je právě $I_{J=0}$, o němž třeba již víme, že je roven jedné… ($\heartsuit\heartsuit$)

O vztahu matematické a teoretické fysiky

Čtenáři možná zatím tyto pojmy splývaly. Tyto pojmy však odpovídají dvěma odlišným úrovním zkoumání: spojuje je samozřejmě používání matematiky jako základního prostředku, liší se však v úrovni rigoróznosti. Zatímco matematická fysika připouští jen zcela rigorózní použití matematických prostředků – včetně stylu vyjadřování věta/důkaz; což ovšem nevylučuje i zde občasnou „volnost“, spojenou třeba s vynecháním precisního důkazu (pokud je ovšem zřejmé, že jej lze vytvořit!), teoretická fysika se nesvazuje vždy tímto (někdy opravdu velmi destruktivním) omezením.

Více elegantních „kouzel“, ale i zásadních objevů, za něž se dává například Nobelova cena, je v teoretické fysice. Vztah teoretických fysiků k matematické fysice bývá někdy trochu arogantní respektive hraničí až s nechápavostí typu „proč se ještě hrabete v problémech, které jsou přece už třicet let vyřešeny?“ Jen občas mohou matematičtí fysikové kontrovat „ano, ale špatně vyřešeny; správná odpověď je totiž úplně jiná“. Častěji jen potvrzují podrobným matematickým zkoumáním to, co jejich teoretičtí předchůdci „uhádli“ dříve.

Takto dramaticky se ovšem rozdíl mezi matematickou a teoretickou fysikou jeví jen v některých partiích fysiky, hlavně v problémech s „nekonečně stupni volnosti“, jako je statistická fysika, teorie pole a teorie pevných látek (a Feynmanův integrál). V jiných oblastech fysiky, zvláště tam, kde geometrie je hlavním matematickým nástrojem, bývá rozdíl méně výrazný až žádný.

<u>Cvičení.</u> (Doplněk k Jordanovu tvaru.)[5]

Nechť $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ je nilpotentní operátor s jedním řetězcem: $\vec{\mathbf{v}}_0 = \vec{\mathbf{0}}$, $\vec{\mathbf{v}}_i = \vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}}_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots n-1$. (Zobecnění níže provedených úvah na obecný i nenilpotentní operátor je možné. Promyslete si jej.) Vezměme nějaký jiný operátor $\tilde{f}$ málo se lišící od f (jinak úvahy níže ztrácejí zajímavost) a pišme jeho charakteristickou rovnici ve tvaru $P(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - \varepsilon_i)$, kde ε_i jsou prvky spektra $\tilde{f}$. Vezměme nějaký nový počáteční vektor $\vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{w}}_n \in \mathbb{V}$ a sestrojme řetězec (musí být $\vec{\mathbf{w}}_0 = \vec{\mathbf{0}}$; odůvodněte!)

$$\{\vec{\mathbf{w}}_i = \tilde{f}(\vec{\mathbf{w}}_{i+1}) - \varepsilon_{i+1}\vec{\mathbf{w}}_{i+1}, \quad i = 0, 1 \ldots, n-1\}.$$

Jde-li o *basi* $\mathbb{V}$ (obvykle tomu tak bude, volíme-li $\vec{\mathbf{w}}$ namátkou; zformulujte podmínku na basi přesně!), má pak $\tilde{f}$ vůči ní matici

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 1 & & \\ & \varepsilon_2 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

Všimněte si, že tato matice obsahuje n parametrů, (na rozdíl od Jordanovy buňky, která obsahuje jen jeden), tak jako v případě diagonalisovatelné matice.

Důležitost takovéhoto vyjádření je v tom, že *nemění* svůj tvar v limitě $\tilde{f} \to f$. Tím se odstraní asi nejhorší vada na kráse konstrukce Jordanovy base; totiž její skokově se měnící tvar v okamžicích, kdy operátor *přestává* být diagonalisovatelný.

Toto je důležité třeba při řešení diferenciálních rovnic (zde už se pohybujeme obvykle v nekonečné dimensi, kde je třeba většinou vhodně měnit i počáteční vektor $\vec{\mathbf{w}}$, tak aspoň náznakem): Vezmeme v třídě diferenciálních operátorů 2. řádu s konstantními koeficienty nějaký operátor D s *dvojnásobným* vlastním číslem λ. Nechť $\tilde{D}$ je malá perturbace D s vlastními funkcemi $\exp(\tilde{\lambda}x)$, $\exp((\tilde{\lambda} + \varepsilon)x)$. Pak je určitě rozumnější místo uvedených, skoro stejných funkcí brát do Jordanovy base třeba dvojici

$$\vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{w}}_2 = \frac{\exp((\tilde{\lambda} + \varepsilon)x) - \exp(\tilde{\lambda}x)}{\varepsilon} \to x \exp(\lambda x)$$

a

$$\vec{\mathbf{w}}_1 = \tilde{D}\vec{\mathbf{w}}_2 - (\tilde{\lambda} + \varepsilon)\vec{\mathbf{w}}_2 \to \exp(\lambda x)$$

Tato base se mění spojitě i v bodě degenerace $\tilde{D} = D$.

[5] Pro ušetření místa umisťujeme zde. Spočtěte detailně.

Kapitola 15

Dualita

Dualita je jev, na který narazíme v mnohých oblastech vědy a lidské činnosti: v historii (v Rakousko-Uhersku), v...

V této kapitole se pokusíme vyložit podstatu některých významů tohoto slova.

15.1 Duální grupa

DEFINICE. Říkejme **charakter** grupy (budeme mluvit jen o Abelových) každému jejímu homomorfismu do $\mathbb{U}_1$, multiplikativní grupy komplexních jednotek. **Duální grupou** pak nazveme množinu charakterů s operací násobení:

$$(\phi_1 \cdot \phi_2)(a) = \phi_1(a) \cdot \phi_2(a). \tag{15.1}$$

Můžete ověřit, že duální grupa k $(\mathbb{R}, +)$ je opět ona (isomorfní jí), duální grupa k $(\mathbb{Z}, +)$ je $\mathbb{U}_1$ a naopak, duální grupa k $\mathbb{Z}_n$ je zase isomorfní $\mathbb{Z}_n$; všechny charaktery mají tvar

$$x \in \mathbb{Z}_n \mapsto \exp(2\pi ikx/n) := \varphi_k(x) \quad \text{pro} \quad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}. \tag{15.2}$$

Po chvíli myšlení uvěříte, že charaktery direktního součinu cyklických grup jsou právě součiny charakterů těchto grup, a budete tak umět najít duální grupu k libovolné Abelově grupě podle poznámky na straně 31. To se vám bude hodit později v analýze při zkoumání Fourierových řad a transformací více proměnných.

Lze také definovat skalární součin komplexních funkcí na grupě (N je počet prvků neboli řád grupy)

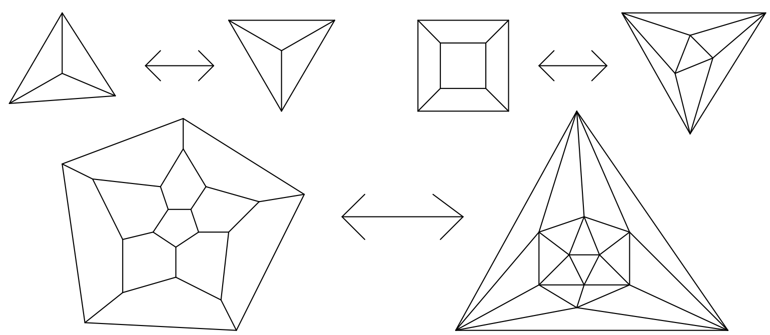
$$\mathbf{b}(\vec{\mathbf{F}}, \vec{\mathbf{G}}) = \frac{1}{N} \sum_{g \in \mathbb{G}} F(g)\overline{G(g)} \tag{15.3}$$

(pozn.: pro Lieovy grupy lze nahradit integrací „podle rovnoměrné míry“, tzn. s vhodnou váhou takovou, aby na integrál neměla vliv substituce $g \mapsto g_0 \cdot g$).

CVIČENÍ. Dokažte, že všechny charaktery cyklické grupy (ale i obecné konečné Abelovy grupy, viz větu o struktuře Abelových konečných grup) tvoří ortogonální basi prostoru komplexních funkcí na této grupě.

15.2 Duální grafy a tělesa

Mluvit v kombinatorice o polyedrech a rovinných grafech je prakticky totéž. Máme-li rovinný graf, představíme si ho nalepen na kouli a hranám grafu budou „po narovnání“ odpovídat hrany polyedru.



CVIČENÍ. Identifikujte polyedry, jejichž grafy vidíte na obrázku. Nakreslete odpovídající graf i pro třicetistěn ze strany 130.

($\sharp$) Nakreslíme-li si (kombinatorické) grafy Platónových těles (neboli nakreslíme-li bod za každý vrchol tělesa a pospojujeme-li body těch vrcholů, které jsou spojeny hranou) a jinou barvou vyznačíme do plošek tečky (i do nekonečné plošky okolí, odpovídající spodní stěně, dáme jednu) a pospojujeme ty tečky, plošky kterých sousedí stranou (nestačí vrcholem), získáme tak **duální grafy** k původním. Zopakujeme-li operaci znovu, získáme výchozí graf.

Graf čtyřstěnu je samoduální, krychle je duální k osmistěnu (a naopak) a dvanáctistěn je duální k dvacetistěnu (a obráceně).

Hrubý popis říká, že těleso má tolik vrcholů, kolik má jeho duál stěn. Navíc duální tělesa mají stejný počet hran.

Kreslení grafů však není jediný způsob, kterak získávat duální tělesa. Mějme obrazec v rovině nebo těleso v prostoru, přesněji řečeno nějakou konvexní množinu bodů M, uvnitř které leží počátek souřadnic. **Duální množinu bodů** M' pak definujme jako[1]

$$M' = \{\vec{\mathbf{x}} \,|\, \forall \vec{\mathbf{y}} \in M \quad \mathbf{b}(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) \leq 1\} \tag{15.4}$$

Pokud lze získat M jako **konvexní obal** nějaké menší podmnožiny P, tj.

$$M = \{\vec{\mathbf{x}} \,|\, \vec{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{x}}_i \lambda^i,\, \vec{\mathbf{x}}_i \in P,\, \sum_{i=1}^{n} \lambda^i = 1\}, \tag{15.5}$$

stačí text $\forall \vec{\mathbf{y}} \in M$ nahradit $\forall \vec{\mathbf{y}} \in P$.

Duální normy

<u>Definice.</u> Nechť $\|\ldots\|$ je norma na lineárním prostoru $\mathbb{V}$, tj. platí

$$\|\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}}\| \leq \|\vec{\mathbf{v}}\| + \|\vec{\mathbf{w}}\|\,, \quad \|\lambda \vec{\mathbf{v}}\| = |\lambda|\, \|\vec{\mathbf{v}}\| \tag{15.6}$$

a norma nenulového vektoru je kladná. Potom **duální normou** (na duálním prostoru; viz odstavec duální prostory níže, zatím si představujte euklidovský prostor a $v'(\vec{\mathbf{v}})$ chápejte jako $\mathbf{b}(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{v}}'))$ rozumíme normu

$$\|\vec{\mathbf{v}}'\|' = \sup_{\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{V}, \|\vec{\mathbf{v}}\| \leq 1} |v'(\vec{\mathbf{v}})|\,. \tag{15.7}$$

Dokažte, že jde o normu!

<u>Příklad.</u> Nechť K je konvexní (jinak by neplatila trojúhelníková nerovnost pro normu za okamžik definovanou) těleso středově symetrické podle počátku v $\mathbb{R}^n$. Pak

$$\|\vec{\mathbf{v}}\|_K = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \{|\lambda| \mid \vec{\mathbf{v}} \in \lambda K\} \tag{15.8}$$

[1] Vedeni pragmatickými zájmy zatím umisťujeme duální těleso do téhož prostoru – protože v něm máme skalární součin– a nikoli do prostoru duálního, což by mělo hlubší logiku.

je norma na $\mathbb{R}^n$. (Norma nabývá jednotky na povrchu K, je tedy poměrem délky daného vektoru a délky vektoru s ním rovnoběžného, který ukazuje na povrch K.) Příklady K jsou krychle, osmistěn, dvanáctistěn a dvacetistěn, a připustíme-li i centrálně nesymetrická tělesa, tak i čtyřstěn. **Duální těleso** ke K pak lze definovat jako

$$K' := \{\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{\mathbf{x}}\|' \leq 1\}. \tag{15.9}$$

Dokažte, že duální norma k duální je zase původní. Dokažte, že duální tělesa podle poslední definice se shodují s dříve zavedenými.

15.3 Dualita v geometrii

Asi jste už někde[2] slyšeli, že existuje princip, podle něhož každou pravdivou větu o geometrii lze modifikovat tak, že tato modifikace bude také pravdivá, a získáme ji tak, že nahradíme slovo „bod“ slovem „rovina“ (vždy doplňte „a naopak“), slovo přímka ponecháme beze změny, frázi „body leží na přímce“ frází „roviny se protínají v přímce“, „průsečík tří rovin“ vyměníme za „rovina, na níž leží tři body“ atd.

V případě rovinné geometrie vyměníme slova „bod“ a „přímka“, pojmy „průsečík přímek“ a „spojnice bodů“, fráze „tři přímky se protínají v jednom bodě“ a „tři body leží na přímce“ atd.

Abychom byli konkrétní, lze přiřadit bodu, přímce nebo rovině[3], jednotně množině bodů M, následující množinu M', to jest rovinu, přímku nebo bod

$$M' = \{\vec{\mathbf{x}} \mid \forall \vec{\mathbf{y}} \in M \quad \mathbf{b}(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = 1\}. \tag{15.10}$$

(Dokažte, že jde opravdu o rovinu, přímku nebo bod a že duální objekt k duálnímu objetku je původní objekt.)

V dalším textu mluvme o rovinné geometrii. Schopnosti principu by byly slabé, pokud bychom si nevšimli například skutečnosti, že množina duálních přímek[4] k bodům nějaké kuželosečky obsahuje právě tečny nějaké (další) kuželosečky (a naopak). (Dokažte.)

Teď již lze ukázat vztah mezi **Pascalovou** a **Briančelovou** větou.

[2]Inspirací k této sekci byla přednáška Petra Vopěnky *Základy matematického myšlení.*

[3]V případě rovinné geometrie přiřazujeme bodu přímku a naopak.

[4]Říká se jí **přímková kuželosečka** na rozdíl od obyčejné **bodové**. Skutečnost, že v trojrozměrném prostoru jsou třeba čtyři reálná čísla na nenásilné určení přímky, byl jedním z historických impulsů ke zkoumání vícerozměrných prostorů.

Pascalova věta tvrdí, že pokud vybereme na kuželosečce nějakých šest bodů $1, 2, 3, 1', 2', 3'$ a body A, B, C získáme jako průsečíky

$$A = 23' \cap 2'3, \quad B = 31' \cap 3'1, \quad C = 12' \cap 1'2, \tag{15.11}$$

kde např. $23'$ znamená přímku spojující body 2 a $3'$, potom budou body A, B, C ležet na přímce.

Duální věta Briančelova tvrdí, že pokud narýsujeme šest tečen nějaké kuželosečky $1, 2, 3, 1', 2', 3'$ a přímky A, B, C získáme jako spojnice[5]

$$A = 23' \heartsuit 2'3, \quad B = 31' \heartsuit 3'1, \quad C = 12' \heartsuit 1'2, \tag{15.12}$$

kde např. $23'$ znamená průsečík přímek 2 a $3'$, potom se budou přímky A, B, C protínat v jednom bodě. ($\heartsuit$)

15.4 Duální prostory

Začátečník může mít pocit, že rozlišovat vektor např. v $\mathbb{R}^n$ a lineární formu na $\mathbb{R}^n$ (což „je" opět pouhá n-tice čísel předepisujících hodnotu dané formy na vektorech kanonické base) je samoúčelné. Vyjasnění jakési dvojstranné symetrie (prostor$\to$prostor forem na něm$\to$původní prostor) – a právě to je obsahem pojmu **dualita** – dává důležitou informaci nejen v (pozdějších) konstrukcích analýzy a funkcionální analýzy resp. teoretické fysiky (dualismus „vlna/částice" sotva objevíte v elementárních konstrukcích níže, ale patří sem také), ale již nyní: přináší určitou systematisaci v náhledu na otázky typu:

„Proč je v jedné formuli $\mathbf{A}$ nebo $\mathbf{A}^{-1}$ a v jiné $\mathbf{A}^T$ nebo $\mathbf{A}^{-1T}$?
Proč se transformují jinak vektory a jinak jejich souřadnice? … "

Duálním prostorem k prostoru $\mathbb{V}$ budeme rozumět prostor všech lineárních forem, to jest lineárních zobrazení, přiřazujících prvkům $\mathbb{V}$ reálné nebo komplexní číslo, podle toho, nad jakým tělesem je sestrojen prostor $\mathbb{V}$. Budeme ho značit $\mathbb{V}'$ a podobně jeho vektory budeme obvykle psát s čárkou.

Sčítání a násobení konstantou z tělesa zde definujeme nejpřirozenějším způsobem:

$$(\vec{\mathbf{u}}' + \vec{\mathbf{v}}')(\vec{\mathbf{w}}) = \vec{\mathbf{u}}'(\vec{\mathbf{w}}) + \vec{\mathbf{v}}'(\vec{\mathbf{w}}), \qquad (\lambda \cdot \vec{\mathbf{u}}')(\vec{\mathbf{w}}) = \lambda \cdot \vec{\mathbf{u}}'(\vec{\mathbf{w}}). \tag{15.13}$$

[5]Znak $\heartsuit$ znamená spojnici bodů stojících na stranách tohoto symbolu.

<u>TERMINOLOGICKÁ POZNÁMKA.</u> Odpovídající objekty duálu často označujeme předponou „**kontra**“. Naopak, pokud jsme již pojmenovali objekty ve $\mathbb{V}'$ a chceme označit odpovídající objekty $\mathbb{V}$, používáme předpony „**ko**“. (Názvy **kovektor**, **kontravektor** užijeme v kapitole o tensorech.)

V této knize zvolená konvence horních a dolních indexů (přičemž index více vlevo (obvykle horní) nám vždy říká, o jakou jde řádku, a index vpravo (obvykle dolní), o kolikátý jde sloupec) pro svoji konsistenci přímo vybízí k tomu, abychom v duálním prostoru používali přesně opačný zápis proti prostoru původnímu (souřadnice duálního prostoru do řádky, značené x'_i); neopomeneme však vždy poznamenat, co bychom získali, kdybychom krátkozrace psali vše stejně jako v prostoru původním.

Budeme tedy značit $\vec{\mathbf{v}}'^i$ prvky **duální base** k basi $\vec{\mathbf{v}}_j$ tak, že

$$\vec{\mathbf{v}}'^i(\vec{\mathbf{v}}_j) = \delta^i_j. \tag{15.14}$$

Můžeme tedy i-tou souřadnici vektoru $\vec{\mathbf{x}}$ vůči basi $\{\vec{\mathbf{e}}_j\}$ interpretovat jako hodnotu i-tého prvku duální base (jakožto formy) v bodě $\vec{\mathbf{x}}$:

$$x^i = v'^i(\vec{\mathbf{x}}) \quad \text{pokud} \quad \vec{\mathbf{x}} = \sum \vec{\mathbf{v}}_i x^i. \tag{15.15}$$

<u>PROČ JDE O BASI.</u>

$$\vec{\mathbf{v}}'(\sum \vec{\mathbf{v}}_i x^i) = \sum \vec{\mathbf{v}}'(\vec{\mathbf{v}}_i) x^i = \sum y_i x^i = (\sum y_j \vec{\mathbf{v}}'^j)(\sum \vec{\mathbf{v}}_i x^i) \tag{15.16}$$

Poslední tvar $(\sum y_j \vec{\mathbf{v}}'^j)\vec{\mathbf{v}}$ *lze jednoznačně přepsat vyjádřením* $\vec{\mathbf{v}}'$ *jako* $\vec{\mathbf{v}}' = \sum y_j \vec{\mathbf{v}}'^j$.

<u>DEFINICE.</u> Mějme lineární zobrazení $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$. Nazvěme **duálním zobrazením** k f

$$f' : \mathbb{W}' \to \mathbb{V}' \quad \{\vec{\mathbf{w}}' \mapsto \vec{\mathbf{w}}' \circ f\}. \tag{15.17}$$

<u>VĚTA V RŮZNÝCH KONVENCÍCH.</u> Nechť $\mathbf{A}$ značí matici zobrazení f vůči basím $\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_m$ resp. $\vec{\mathbf{w}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{w}}_n$.

Používáme-li konvenci této knihy a píšeme-li souřadnice duálního vektoru do řádky, máme pro duální zobrazení touž matici vůči basím $\vec{\mathbf{w}}'^1, \ldots, \vec{\mathbf{w}}'^n$ a $\vec{\mathbf{v}}'^1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}'^m$ jako pro původní zobrazení:

$$f' : \vec{\mathbf{w}}' \mapsto \vec{\mathbf{w}}'\mathbf{A}. \tag{15.18}$$

Samozřejmě, pokud bychom psali souřadnice do sloupce[6] i v duálním prostoru, bude mít zobrazení matici transponovanou, a proto budeme duálnímu zobrazení říkat také **transponované**:

$$f : \vec{\mathbf{w}}'^T \mapsto \mathbf{A}^T \vec{\mathbf{w}}'^T. \tag{15.19}$$

V naší versi větě ihned uvěříte pohledem na

$$\left[\vec{\mathbf{f}}'(\vec{\mathbf{w}}')\right](\vec{\mathbf{v}}) = \vec{\mathbf{w}}' \cdot \mathbf{A}\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{w}}'\mathbf{A} \cdot \vec{\mathbf{v}}. \tag{15.20}$$

<u>DEFINICE.</u> Nechť $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}$ je base $\mathbb{V}$, nechť $\{\vec{\mathbf{e}}'^i\}$ je (duální) base $\mathbb{V}'$ a base $\{\vec{\mathbf{e}}''_i\}$ duální[7] basí k $\{\vec{\mathbf{e}}'^i\}$ v prostoru $\mathbb{V}''$. Potom ztotožnění

$$\vec{\mathbf{e}}_i \leftrightarrow \vec{\mathbf{e}}''_i \tag{15.21}$$

dává tzv. **kanonický isomorfismus** mezi $\mathbb{V}$ a $\mathbb{V}''$.

Toto ztotožnění je mnohem přirozenější a jednoznačnější, než ztotožnění mezi $\mathbb{V}$ a $\mathbb{V}'$, která zkoumáme dále!

<u>TVRZENÍ.</u> V tomto ztotožnění je $f'' = f$.

Protějškem pojmu <u>lineární forma</u> je v analýze pojem funkce. V úvodu ke knize jsme konstatovali, že LA vyrostla ze zkoumání „linearisovaných“ problémů analýzy a je užitečné se z tohoto hlediska podívat na některé základní věty analýzy funkcí více proměnných a obnažit jejich lineárně algebraické jádro. Udělejme si tedy toto malé odbočení k analýze.

<u>PŘÍKLAD.</u> Ve tvrzení „derivace ve směru je skalární součin směru a gradientu“ substituujeme za slova „směr, funkce, derivace ve směru x, gradient“ slova „vektor, forma, hodnota v x, representující vektor formy“. Dostáváme větu o representaci lineární formy — zjednodušenou, lineární versi uvedeného tvrzení.

<u>CVIČENÍ.</u> Identifikujte věty analýzy, jimž jsou následující tvrzení linearisovanou karikaturou.

[6]Abychom psali jen podle našich konvencí, připsali jsme k vektoru $\vec{\mathbf{w}}'$ písmeno „T“. Samozřejmě, ti, kteří píší souřadnice vždy do sloupce, toto „T“ u vektorů vynechávají.

[7]Zajisté, že duální k duální má indexy umístěny zase jako původní.

VĚTA. Lineární forma $\{\vec{\mathbf{x}} \mapsto \vec{\mathbf{a}}^T\vec{\mathbf{x}}\}$ nemůže být konstantní na $\mathbb{R}^n$ pokud $\vec{\mathbf{a}} \neq \vec{\mathbf{0}}$. Je-li však konstantní pro vektory, na nichž jsou konstantní jisté další formy $\vec{\mathbf{b}}_i$, $\{\vec{\mathbf{x}} \mapsto \vec{\mathbf{b}}_i^T\vec{\mathbf{x}}\}$, tak existují **multiplikátory** $\lambda_j \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\vec{\mathbf{a}} = \sum \lambda_j \vec{\mathbf{b}}_j. \tag{15.22}$$

VĚTA. Komposici lineárních zobrazení odpovídá násobení matic.

VĚTA. Rovnici $F(x,y)$ =const pro zobrazení $F(x,y) = Ax + By$ lze řešit i v případě, že A, B, x, y,const jsou matice (vektory) správného rozměru; pokud B^{-1} existuje, tak

$$y = -B^{-1}Ax + \text{const'}. \tag{15.23}$$

Jak již bylo poznamenáno, nahradíme-li ve větách analýzy slovo „funkce" slovem „lineární forma" (tedy linearisujeme-li problém; linearisace je synonymem vzetí diferenciálu), dostáváme jednoduchá tvrzení LA, která přitom vyjadřují podstatu uvedených vět. Pro úplnost uveďme ještě jedno tvrzení z teorie kvadratických forem (které teprve budou probírány níže):

VĚTA. Kvadratické formě odpovídá symetrická matice (a co matice druhých parciálních derivací?).

V analýze nás ani nenapadne plést si body prostoru $\mathbb{R}^n$ a funkce na nich definované (těch je trochu více). V lineární algebře máme místo bodů vektory, místo funkcí formy. Neměl by nás mást (v této zjednodušené situaci) fakt, že dimense vektorového prostoru a jeho duálu (prostoru forem) jsou stejné a že máme větu o representaci (díky existenci skalárního součinu a euklidovské metriky na $\mathbb{R}^n$).

ZMĚNA DUÁLNÍ BASE. Pokud je $\mathbf{C}$ matice přechodu od base $\vec{\mathbf{v}}_1, ...\vec{\mathbf{v}}_n$ k basi $\vec{\mathbf{w}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{w}}_n$, tj.

$$(\vec{\mathbf{w}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{w}}_n) = (\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n)\mathbf{C}, \tag{15.24}$$

potom lze vyjádřit vztah mezi duálními basemi formulí[8]

$$\begin{pmatrix} \vec{\mathbf{w}}'^1 \\ \vdots \\ \vec{\mathbf{w}}'^n \end{pmatrix} = \mathbf{C}^{-1} \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{v}}'^1 \\ \vdots \\ \vec{\mathbf{v}}'^n \end{pmatrix}. \tag{15.25}$$

[8]Fakt přítomnosti inversní matice k $\mathbf{C}$ je analogický změně měřítka mapy: na podrobnější mapě jsou vzdálenosti větší a naopak.

Lehce se o tom přesvědčíte, pokud zapíšete (násobením prvků $\vec{\mathbf{w}}'$ krát $\vec{\mathbf{w}}$ teď myslíme $w'(\vec{\mathbf{w}})$)

$$\begin{pmatrix} \vec{\mathbf{w}}'^1 \\ \vdots \\ \vec{\mathbf{w}}'^n \end{pmatrix} (\vec{\mathbf{w}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{w}}_n) = \mathbf{1} = \mathbf{C}^{-1} \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{v}}'^1 \\ \vdots \\ \vec{\mathbf{v}}'^n \end{pmatrix} (\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n)\mathbf{C}. \qquad (15.26)$$

Jestliže (proti konvencím této knihy) budeme psát jednotlivé prvky duální base vedle sebe (tak jako v původní basi), bude matice přechodu od base $\vec{\mathbf{v}}'^1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}'^n$ k basi $\vec{\mathbf{w}}'^1, \ldots, \vec{\mathbf{w}}'^n$ dána tzv. **kontragradientní** maticí k matici $\mathbf{C}$, totiž $\mathbf{C}^{-1T}$:

$$(\vec{\mathbf{w}}'^1, \ldots, \vec{\mathbf{w}}'^n) = (\vec{\mathbf{v}}'^1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}'^n)\mathbf{C}^{-1T}. \qquad (15.27)$$

15.5 Dualita a skalární součin

V této sekci nebudeme dualisovat daný skalární součin na $\mathbb{V}$, nýbrž užijeme tohoto skalárního součinu ke ztotožnění $\mathbb{V}$ a $\mathbb{V}'$.

<u>Věta o representaci.</u> Nechť $\mathbf{b}(\vec{.}, \vec{.})$ je skalární součin na $\mathbb{V}$. Potom pro každý prvek $\vec{\mathbf{v}}' \in \mathbb{V}'$ existuje jednoznačně určený **representující vektor** $\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{V}$ takový, že

$$\forall \vec{\mathbf{w}} \in \mathbb{V} \qquad v'(\vec{\mathbf{w}}) = \mathbf{b}(\vec{\mathbf{w}}, \vec{\mathbf{v}}). \qquad (15.28)$$

<u>Důkaz.</u> *Nechť $\mathbb{K}\mathrm{er} = \{\vec{\mathbf{w}} \,|\, v'(\vec{\mathbf{w}}) = 0\}$ je nulový prostor $\vec{\mathbf{v}}'$, nechť $\vec{\mathbf{v}} \perp \mathbb{K}\mathrm{er}$ (mimo jiné, $\mathbb{K}\mathrm{er}^{\perp}$ je jednorozměrný). Pak lze volit $\vec{\mathbf{v}}$ tak, aby $v'(\vec{\mathbf{w}}) = \mathbf{b}(\vec{\mathbf{w}}, \vec{\mathbf{v}})$, a tak forma*

$$\{\vec{\mathbf{w}} \mapsto \mathbf{b}(\vec{\mathbf{w}}, \vec{\mathbf{v}})\} \qquad (15.29)$$

má stejný nulový prostor jako $\vec{\mathbf{v}}'$, navíc obě formy nabývají stejné hodnoty i pro $\vec{\mathbf{v}}$, takže obě formy jsou totožné i na $\mathbb{V} = \mathcal{L}(\{\vec{\mathbf{v}}, \mathbb{K}\mathrm{er}\,\})$.

<u>Definice.</u> Nechť je na $\mathbb{V}$ definován skalární součin $\mathbf{b}(\vec{.}, \vec{.})$. Definujme zobrazení $j : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$ (nepleťte se ztotožněním $\mathbb{V}$ a $\mathbb{V}''$) vztahem

$$\left[\vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{v}})\right](\vec{\mathbf{u}}) = \mathbf{b}(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}). \qquad (15.30)$$

Toto zobrazení (tvrdíme) je **antilineární** („anti“ kvůli tomu pruhu), tzn.

$$\vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{v}}_1 + \vec{\mathbf{v}}_2) = \vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{v}}_1) + \vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{v}}_2), \qquad \vec{\mathbf{j}}(\lambda\vec{\mathbf{v}}) = \overline{\lambda}\vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{v}}). \qquad (15.31)$$

Nebylo by správné hledat ztotožnění pomocí výrazu $\mathbf{b}(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{u}})$ místo $\mathbf{b}(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}})$, poněvadž $\vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{v}})$ by pak nebyla lineární forma (ale antilineární).

Speciálně, máme-li ortonormální basi, přiřadí zobrazení j prvku base přímo příslušný prvek duální base.

Důležitou modifikací transponovaného zobrazení pro případ komplexního skalárního součinu s pruhem je **adjungované (hermitovsky sdružené)** zobrazení.

DEFINICE. Označíme jím zobrazení

$$f^* = j^{-1} \circ f' \circ j \quad \text{alternativně:} \quad \mathbf{b}(\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}}), \vec{\mathbf{w}}) = \mathbf{b}(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{f}}^*(\vec{\mathbf{w}})). \tag{15.32}$$

Toto zobrazení má v téže basi **adjungovanou** neboli **hermitovsky sdruženou** (viz důkaz níže) matici:[9]

$$\mathbf{A}^* = \overline{\mathbf{A}^T}. \tag{15.33}$$

DŮKAZ. *Nechť je* $\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n$ *ortogonální*[10] *base* $\mathbb{V}$, *nechť* $f^* = j^{-1} f' j$ *je adjungovaný operátor k* $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$, *kde* $\vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{v}})$ *je definováno (ve větě o representaci) vztahem* $[\vec{j}(\vec{\mathbf{v}})](\vec{\mathbf{u}}) = \mathbf{b}(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}})$.

Těm, kterým vztah $f^* = j^{-1} f' j$ *působí bolesti hlavy (což může být v určité konstelaci i autor těchto řádek), připomínáme, že je to totéž jako vztah*

$$\mathbf{b}(f(\vec{\mathbf{u}}), \vec{\mathbf{v}}) = \mathbf{b}(\vec{\mathbf{u}}, f^* \vec{\mathbf{v}}). \tag{15.34}$$

Vskutku,

$$\begin{gathered} \mathbf{b}(\vec{\mathbf{u}}, f^*(\vec{\mathbf{v}})) = [j(f^*(\vec{\mathbf{v}}))](\vec{\mathbf{u}}) = \\ = (f'(j(\vec{\mathbf{v}})))(\vec{\mathbf{u}}) = j(\vec{\mathbf{v}})(f(\vec{\mathbf{u}})) = \mathbf{b}(f(\vec{\mathbf{u}}), \vec{\mathbf{v}}) \end{gathered} \tag{15.35}$$

úprava na zlomu řádky platí právě když $j f^* = f' j$, *což je to samé jako* $f^* = j^{-1} f' j$.

Je-li $f(\vec{\mathbf{v}}_i) = \sum \vec{\mathbf{v}}_j a^j{}_i$, $f^*(\vec{\mathbf{v}}_k) = \sum \vec{\mathbf{v}}_j b^j{}_k$, *tak*

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(f(\vec{\mathbf{v}}_i), \vec{\mathbf{v}}_k) \quad &= \textstyle\sum_j a^j{}_i \mathbf{b}(\vec{\mathbf{v}}_j, \vec{\mathbf{v}}_k) = a^k{}_i \mathbf{b}(\vec{\mathbf{v}}_k, \vec{\mathbf{v}}_k) \\ \updownarrow = \quad & \\ \mathbf{b}(\vec{\mathbf{v}}_i, f^*(\vec{\mathbf{v}}_k)) \quad &= \textstyle\sum_j \overline{b^j{}_k} \mathbf{b}(\vec{\mathbf{v}}_i, \vec{\mathbf{v}}_j) = \overline{b^i{}_k} \mathbf{b}(\vec{\mathbf{v}}_i, \vec{\mathbf{v}}_i), \end{aligned} \tag{15.36}$$

[9] Mnohdy se adjunkce značí křížkem místo hvězdičky.

[10] Slovem „ortogonální“ se zde, ale i mnohde jinde, míní to, že kromě toho, že jsou kolmé, mají i stejnou velikost (nejčastěji jednotkovou, pak mluvíme o **ortonormální basi**). V protikladu k tomu se neužívá pojmu „ortonormální matice“ (z grupy $\mathbb{O}(n)$).

čímž je důkaz $b^i{}_k = \overline{a^k_i} = a^{*i}{}_k$ *hotov.*

(Znovu připomínáme, že pro smysluplnost adjunkce je nutná existence skalárního součinu, který má za následek, že se indexy v rovnostech nevyskytují ve všech členech ve stejné výšce.)

<u>Tvrzení.</u> Podobně jako u duálního zobrazení,

$$f^{**} = f. \tag{15.37}$$

Důkaz je zřejmý, vyjádříme-li zobrazení maticí vůči nějaké ortonormální basi. Obecněji,

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(f(\vec{\mathbf{u}}), \vec{\mathbf{v}}) = \mathbf{b}(\vec{\mathbf{u}}, f^*(\vec{\mathbf{v}})) = \overline{\mathbf{b}(f^*(\vec{\mathbf{v}}), \vec{\mathbf{u}})} = \\ = \overline{\mathbf{b}(\vec{\mathbf{v}}, f^{**}(\vec{\mathbf{u}}))} = \mathbf{b}(f^{**}(\vec{\mathbf{u}}), \vec{\mathbf{v}}) \end{aligned} \tag{15.38}$$

<u>Poznámka o takzvané formální adjunkci.</u>

V souvislosti se známým vzorcem „per partes“ se často mluví o tzv. „formální adjunkci“ operátoru. Jde o to, že „zapomeneme-li hranaté závory“, můžeme tento vzorec interpretovat tak, že operátor minus derivace je adjunkcí k operátoru derivace! Slovo „formální“ se používá právě v souvislosti s oním „zapomenutím“. Podobně i pro operátory derivace vyšších řádů. Uvidíme později, že (z nejrůznějších důvodů) se na vhodných prostorech funkcí kupodivu budou ony „zapomenuté hranaté závory“ anulovat, takže formální adjunkce bude dávat správný výsledek.

<u>Adjunkce součinu.</u> Komposice dvou operátorů má adjunkci

$$(fg)^* = g^* f^*. \tag{15.39}$$

To je zřejmé v maticové formulaci, obecněji

$$\mathbf{b}(f(g(\vec{\mathbf{u}})), \vec{\mathbf{v}}) = \mathbf{b}(g(\vec{\mathbf{u}}), f^*(\vec{\mathbf{v}})) = \mathbf{b}(\vec{\mathbf{u}}, g^*(f^*(\vec{\mathbf{v}}))) \tag{15.40}$$

(při prvé úpravě nakládejte jako s normálním vektorem s $g(\vec{\mathbf{u}})$*, ve druhé s* $f^*(\vec{\mathbf{v}})$*).*

Toto tvrzení má za následek, že na nějakém z prostorů funkcí, které budeme diskutovat v kapitole o adjunkci, bude platit[11]

$$\left(a(x)\frac{d^2}{dx^2} + b(x)\frac{d}{dx} + c(x) \right)^* = \frac{d^2}{dx^2}\overline{a(x)} - \frac{d}{dx}\overline{b(x)} + \overline{c(x)}, \tag{15.41}$$

[11] Matematickým jazykem, operátor nalevo, který sdružujeme, přiřazuje $f \mapsto a(x)f'' + b(x)f' + c(x)$.

kde je třeba např. první člen vpravo nejprve násobit $\overline{a}(x)$ a pak teprve derivovat (pruh nad $a(x)$ v našich příkladech půjde vynechat, polynomy a, b, c budeme mít reálné).

Tato rovnost pro svoji platnost potřebuje, aby x byl hermitovský operátor (pak budou hermitovské i jeho reálné funkce), aby d/dx byl antihermitovský (což bude oboje splněno na prostorech funkcí např. kvantového harmonického oscilátoru). Poznamenejme ještě trivialitu, že adjungovaný operátor k operátoru násobení komplexním číslem c je násobení $\overline{c}$.

<u>Definice.</u> Zavedme čtyři nová adjektiva pro operátor f. (Totéž platí pro matice.)

- **samoadjungovaný** neboli **hermitovský**, je-li $f^* = f$
- **antihermitovský**, je-li $f^* = -f$
- **unitární**, je-li $f^* = f^{-1}$
- **normální**, je-li $ff^* = f^*f$

Prvý pojem přechází v reálném prostoru na „symetrický“, druhý pojem na „antisymetrický“, třetí na „ortogonální“ (matice přechodu mezi ortonormálními basemi). Místo samoadjungovaný se též říká samosdružený.

Antihermitovský operátor lze též definovat jako takový, jehož i-násobek je hermitovský. (Ověřte ekvivalenci.)

Pojem normálního operátoru nemá příliš veliký samostatný význam, ale dobře zastřešuje předchozí tři skupiny. (To neznamená, že každý normální operátor patří do některé z těchto skupin. Normálním je jakýkoli násobek unitárního, hermitovského, ale i mnohé jiné operátory, třeba konvoluční – viz strana 256.)

<u>Cvičení.</u> Nalezněte všechny normální nilpotentní operátory.

(Nulový operátor. Nevidíte-li to hned, počkejte na větu o spektrálním rozkladu.)

Reálný násobek (anti-)hermitovského je (anti-)hermitovský, komplexní jednotkou vynásobený unitární je unitární atd. V kvantové fysice je důležité následující pozorování.

<u>Pozorování.</u> Exponenciála antihermitovského operátoru je unitární operátor.

$$f^* = -f \;\Rightarrow\; (\exp(f))^* = \exp(-f) = (\exp(f))^{-1} \tag{15.42}$$

<u>Uvádíme důležité příklady.</u>

Hermitovský operátor	Jeho exponenciála
energie (hamiltonián) $\hat{H}$	$\exp(\hat{H}t/i\hbar)$ – počkej čas t
složka hybnosti $\hat{p}_z$	$\exp(i\hat{p}_z z/\hbar)$ – posun podél z
Složka momentu hybnosti $\hat{J}_z$	$\exp(i\hat{J}_z\varphi/\hbar)$ – rotace o φ kol z

(Posun souřadné osy o z ve směru osy z je ekvivalentní posunu systému o $-z$. Podobně pro otočení.)

Vysloveně netriviální aplikace má však pojem duality jinde v analýze (rigorosní konstrukce složitých objektů, které bychom jinak stěží dokázali definovat).

15.6 Dualita ve funkcionální analýze

($\sharp\sharp$) Když už se občas jinde probírají ty lokálně kompaktní metrické (ba i topologické) prostory, uveďme informativně, k čemu to může být třeba užitečné.

<u>Pojem pravděpodobnosti a míry.</u> Je-li X (lokálně) kompaktní prostor (třeba $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, prostor trajektorií,... viz dále) a je-li $\mathcal{C}(X)$ prostor spojitých funkcí s normou

$$\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|\,, \tag{15.43}$$

případně pro X lokálně kompaktní bereme soubor pseudonorem

$$\|f\|_K = \sup_{x\in K} |f(x)|\,, \quad \text{kompaktní } K \subseteq X, \tag{15.44}$$

nazveme **mírou** každou spojitou lineární formu na $\mathcal{C}(X)$. Je-li navíc forma (míra) μ nezáporná ($\mu(f) \geq 0\ \forall f \geq 0$) a $\mu(1) = 1$, mluvíme o **pravděpodobnosti** na X.

<u>Příklad 1.</u> Dá se ukázat, že lineární forma

$$f \mapsto \int_a^b f(x)g(x)dx \tag{15.45}$$

je mírou pokud

$$\int_a^b |g(x)|\, dx < \infty; \tag{15.46}$$

je-li $g(x) \geq 0$ a $\int_a^b g(x)dx = 1$, jde o pravděpodobnost.

Pro nekonečný interval (a, b) nastávají drobné potíže s touto definicí: například známá **Gaussova míra** (pravděpodobnost)

$$f \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-x^2} dx \tag{15.47}$$

není ještě spojitou formou ve výše uvedené topologii. Místo abychom měnili topologii, raději dále rozšíříme pojem míry na objekty tvaru

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \tag{15.48}$$

s mírami μ_n v předchozím smyslu, kde buď

- $\mu_n \geq 0$ a $\sum \mu_n(1) < \infty$ (do této škatulky spadne výše uvedená Gaussova míra) nebo obecněji
- kde pro každou funkci f s kompaktním nosičem vyžadujeme splnění pro
$$\|\mu_n\|_f := \sup_{|g| \leq f} |\mu_n(g)| \tag{15.49}$$
požadavku $\sum_n \|\mu_n\|_f < \infty$. Sem patří **Lebesgueova míra**, přiřazující integrovatelným funkcím f veličinu $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

Teorie míry a integrálu je výraznou (snad až hypertrofovanou) součástí látky přednášené studentům MFF UK v druhém ročníku. (Je ale obvykle budována alternativním přístupem bez důrazu na pojem míry jako funkcionálu.) Její užitečnost vynikne ani ne tak při výpočtu integrálů v $\mathbb{R}^n$ (tam by koneckonců stačila nějaká varianta Riemannova integrálu), spíše ve složitějších situacích v teorii pravděpodobnosti a teoretické fysice. Např. objekt $P(y)$ resp. $P(\hat{y})$ zavedený v úvodu k Feynmanově integrálu je mírou na prostoru všech trajektorií, dokonce pravděpodobností jsou-li $\exp t\mathbf{A}$ stochastické matice. (Pro nepositivní, nekonečné matice ovšem nastávají značné potíže s Feynmanovým integrálem, pojem míry už nestačí k rozumnému popisu tohoto objektu.)

Dualita a distribuce

S distribucemi a delta-funkcemi začal ze zcela pragmatických důvodů pracovat Paul Dirac. Diracova delta-funkce je intuitivně funkce nulová všude kromě bodu nula, kde má tak nekonečnou hodnotu, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1, \tag{15.50}$$

a tedy pro libovolnou funkci $f(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f(x)dx = f(0). \tag{15.51}$$

Pokud si chceme takovou funkci představit, vyberme si některý z obvyklých předpisů (M je číslo jdoucí nade všechny meze):[12]

$$\begin{array}{c} \delta(x) = \frac{M}{\sqrt{\pi}} \exp -M^2x^2, \quad \delta(x) = M \cdot (x \in (-\frac{1}{2M}, \frac{1}{2M})), \\ \delta(x) = \frac{\sin Mx}{\pi x} \dots, \quad \delta(x) = \frac{\sin^2 Mx}{\pi M x^2} \end{array}. \tag{15.52}$$

Pokud má x fysikální rozměr (délky), má $\delta(x)$ rozměr převrácené délky, protože $\delta(x)$ si lze představit jako polovinu „derivace“ (bezrozměrné) funkce signum(x).

Ukázalo se, že je užitečné pracovat i s derivacemi delta-funkce. Budeme-li n-tou derivaci funkce g značit jako $g^{(n)}(x)$, lze dokázat (bez byrokratických úvah o podmínkách) matematickou indukcí a metodou per partes vztah (hranaté závorky vymizí)

$$\begin{array}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(x)f(x)dx = \left[\delta^{(n-1)}(x)f(x)\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n-1)}(x)f'(x)dx = \\ = \dots = (-1)^n f^{(n)}(0) \end{array}. \tag{15.53}$$

První derivaci delta-funkce si můžete představit jako ($M \to \infty$, derivujeme vztahy výše)

$$\begin{array}{c} \delta'(x) = \frac{-2M^3}{\sqrt{\pi}} e^{-M^2x^2}, \\ \delta'(x) = -\mathrm{sgn}\ x \cdot M^3 \left(|x| \in (\frac{1}{2M}, \frac{1}{2M} + \frac{1}{M^2})\right) \end{array} \tag{15.54}$$

S delta funkcemi se manipuluje dobře i ve více rozměrech: například ve třech rozměrech chápeme delta-funkci (připisujeme index „3“) vektoru jako součin delta funkcí jeho složek (je tedy nulová vyjma počátku souřadnic)

$$\delta^3(\vec{\mathbf{x}}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z) \tag{15.55}$$

[12] Výraz $x \in Y$ nabývá hodnoty jedna, je-li pravdivý, jinak je nepravdivý.

a lze bez nedorozumění pracovat s identitami jako (r znamená $\|\vec{\mathbf{r}}\|$)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{1}{r}=-4\pi\delta^3(\vec{\mathbf{r}}), \tag{15.56}$$

která názorně říká, že hustota náboje, vytvářejícího potenciál $q/4\pi\epsilon_0 r$, je $q\delta^3(\vec{\mathbf{r}})$; tímto rozdělením hustoty náboje imitujeme bodový náboj velikosti q umístěný v počátku souřadnic.

Poznamenejme, že v kvantové teorii pole se původně klasická pole (my mluvíme o skalárním poli ϕ a jeho časové derivaci $\partial_0\phi$, podobně je tomu ale i u vektorů elektrické intensity a magnetické indukce) stávají operátory – řekněme přesněji **operátor-distribucemi** – takovými, že

$$[\hat{\phi}(\vec{\mathbf{x}}),\partial_0\hat{\phi}(\vec{\mathbf{x}}')]=i\delta^3(\vec{\mathbf{x}}-\vec{\mathbf{x}}'),\quad [\hat{\phi}(\vec{\mathbf{x}}),\hat{\phi}(\vec{\mathbf{x}}')]=[\partial_0\hat{\phi}(\vec{\mathbf{x}}),\partial_0\hat{\phi}(\vec{\mathbf{x}}')]=0 \tag{15.57}$$

komutují každé dva operátory v různých bodech.

Greenovy funkce

Jde o výpočet funkce ψ, splňující rovnici

$$\mathbf{L}\psi=f \tag{15.58}$$

s pravou stranou. Hned je jasné, že ke každému nalezenému řešení lze přičíst jakékoli řešení ψ_0 odpovídající rovnice bez pravé strany

$$\mathbf{L}\psi_0=0 \tag{15.59}$$

tak, že i součet bude řešením. Zbývá nalézt jedno řešení. Najdeme-li ale pro všechna x_0 funkce ψ_{x_0} splňující

$$[\mathbf{L}\psi_{x_0}](x)=\delta(x-x_0), \tag{15.60}$$

budeme pak moci zapsat řešení rovnice z úvodu pro jakoukoliv funkci f jako integrál

$$\psi(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x_0)\psi_{x_0}(x)dx_0, \tag{15.61}$$

o čemž se lehce přesvědčíte dosazením ($\mathbf{L}$ působí jen na proměnnou x)

$$[\mathbf{L}\psi](x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x_0)\mathbf{L}\psi_{x_0}(x)dx_0=f(x). \tag{15.62}$$

Greenova funkce je označení pro správně normované ψ_{x_0}

$$G(x,x_0)=\kappa\psi_{x_0}(x) \tag{15.63}$$

a její hodnoty se dají vyložit jako elementy operátoru $\mathbf{L}^{-1}$.

Zmínka o exaktní teorii distribucí

Matematici obvykle definují **topologický duál** $\mathbb{V}'$ jako prostor všech lineárních forem na $\mathbb{V}$ spojitých v topologii zadané pomocí nějakého systému pseudonorem.

Příkladem je **Schwartzův prostor**[13] $\mathcal{D}$ funkcí nekonečně diferencovatelných s kompaktním **nosičem** (množina všech x, kde je funkce nenulová) na $\mathbb{R}$ s pseudonormami typu (pro určité a, b, n)

$$\|f\|_{a,b,n} = \max_{x\in\langle a,b\rangle} \left| \frac{d^n}{dx^n} f(x) \right| . \tag{15.64}$$

Ti šťouraví z vás se možná diví, jak může mít funkce všechny derivace (být z $\mathcal{C}^\infty$) a přitom mít omezený nosič; říkají si, pokud je funkce pro $x < -1$ nulová, lze vypočítat všechny derivace v bodě -1 (musí být nulové, existují-li) a Taylorovou řadou propočítat, že je funkce nulová i dále. A naopak, funkce nulová pro záporná x a x^6 pro kladná x již nemá sedmou derivaci v bodě nula. Nemají však pravdu; to, že je funkce nekonečně diferencovatelná ještě neznamená, že je **analytická** (z $\mathcal{C}^\omega$). Příkladem budiž funkce nulová pro $x^2 \geq 1$ a v intervalu $(-1, 1)$ nabývající hodnoty

$$\phi(x) = \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) . \tag{15.65}$$

Je tak hladce napojena, že každá její derivace vyjde nulová pro $x \to 1-$ resp. $x \to -1+$, protože vždy obsahuje onu úžasně rychle klesající exponenciálu vynásobenou nějakým podílem polynomů x.

Když už jsme se dostali do těchto partií analýzy, nebylo by ekonomické něříci, že pomocí takové funkce lze každou (integrabilní...) funkci $g(x)$ nekonečně zahladit na funkci $G(x)$, která pak má všechny derivace (a zde určuje šířku rozmazání).

$$G(x) = \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(x + at)\phi(x) \tag{15.66}$$

Faktor M zde znamená (pro funkci nahoře uvedenou)

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, \phi(x)\, (\approx 0.444) . \tag{15.67}$$

Na základě podobného postřehu lze dokázat tzv. **lemma o rozdělení jednotky**: Máme-li otevřené oblasti $O_1, O_2, \dots O_N$, jejichž sjednocení pokrývá kompaktní množinu O, lze jednotkovou funkci na O rozepsat na součet libovolně hladkých funkcí f_i nabývajících hodnot z intervalu $\langle 0, 1\rangle$, každá z nichž je nulová všude kromě oblasti O_i. (Platí i na obecnějších prostorech, než jsou euklidovské.)

[13] L. Schwartz, $\approx$ 1950.

Topologickým duálem $\mathcal{D}'$ je **Schwartzův prostor distribucí** (v našem případě s konečným nosičem) všech spojitých (podle topologie dané soustavou pseudonorem) lineárních forem na $\mathcal{D}$. Každé funkci $f \in \mathcal{D}$ lze přiřadit distribuci (a zkonstruovat tak vnoření $\mathcal{D}$ do $\mathcal{D}'$)

$$\{g \in \mathcal{D} \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx\} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}. \tag{15.68}$$

Podle vzorce per partes máme

$$\int \left(\frac{d}{dx} f(x)\right) g(x)dx = -\int f(x)\frac{d}{dx}g(x)dx, \tag{15.69}$$

což umožňuje definovat operaci derivování

$$\frac{d}{dx} : \mathcal{D}' \to \mathcal{D}' \tag{15.70}$$

jako duální zobrazení k operátoru

$$-\frac{d}{dx} : \mathcal{D} \to \mathcal{D}. \tag{15.71}$$

Takto můžeme např. získat libovolnou derivaci delta-funkce. (♡♡)

<u>Cvičení.</u> Metoda „transfer matice“ (opakování Feynmanova integrálu).

Kolika způsoby je možno obsadit N židlí u kruhového stolu osobami tak, aby žádné dvě osoby neseděly těsně vedle sebe?

<u>Návod.</u> Využijme vztah (14.19). Vezměme 2×2 matici $\mathbf{A} = (0, 1; 1, 1)$. Každé dvojici sousedních prázdných židlí resp. dvojici s obsazenou pravou a prázdnou sousední levou židlí resp. dvojici obsazené levé a prázdné sousední pravé židle v daném cyklickém uspořádání přiřaďme výraz $a_{2,2}$ resp. $a_{2,1}$ resp. $a_{1,2}$. Nepřípustnost sousedících osob vyjadřujeme požadavkem $a_{1,1} = 0$, „osoba“ má všude index 1, „prázdno“ index 2. Hledané číslo je pak rovno (přidejme všemožné součiny z (14.19) obsahující někde též člen $a_{1,1}$ a uplatněme fakt, že první a poslední indexy jsou stejné, neboť jsme v kruhu!)

$$\mathrm{Tr}\, \mathbf{A}^N = \frac{1}{\tau^N} + (-\tau)^N, \tag{15.72}$$

kde $\tau = \tau^{-1} - 1 \approx 0.618$ je zlatý řez. (Ověřte poslední vztah.) Metoda má zobecnění i pro více typů možných „atomů“, i na vícerozměrné mříži.

Kapitola 16

Spektrální rozklad, adjunkce

Lineární algebra tvoří jádro pojmového aparátu současné kvantové teorie. To naznačuje i pohled na obsah této kapitoly. Bohatou informaci o kvantové teorii a o použití LA (a dalších matematických partií) v ní nalezne čtenář v knize J. Formánka [14].

Níže uvedená velmi důležitá věta je koneckonců podrobnější, silnější versí věty Jordanovy pro speciálních případ normálních (čili hlavně hermitovských a unitárních) operátorů.

Provedeme však raději znovu samostatný důkaz této věty.

<u>Věta o spektrálním rozkladu.</u> Je-li $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ normální operátor, tak existuje ortonormální base $\mathbb{V}$ složená z vlastních vektorů operátoru f. (Jiné formulace a četné důsledky této věty pro konkrétní volby f viz později.)

Důkazu předešleme dvě lemmata, z nichž první platí i v obecnějším kontextu lineárních prostorů i bez skalárního součinu (a už jsme se o něm tu a tam zmínili).

<u>Lemma prvé.</u> Dva komutující operátory $f, g : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ mají alespoň jeden společný vlastní vektor.

Označme symbolem $\mathbb{K}\mathrm{er}_{\lambda}$ *(dříve* $\mathbb{K}\mathrm{er}\,\frac{1}{\lambda}$*) nulový prostor* $(f - \lambda\mathbf{1})$ *odpovídající nějakému vlastnímu číslu* λ*.* $\mathbb{K}\mathrm{er}_{\lambda} = \{\vec{\mathbf{v}} \,|\, \vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}}) = \lambda\vec{\mathbf{v}}\}$*. Jelikož platí*[1]

$$g(\mathbb{K}\mathrm{er}_{\lambda}) \subseteq \mathbb{K}\mathrm{er}_{\lambda}, \tag{16.1}$$

tak existuje nějaký vlastní vektor restrikce (zúžení operátoru na $\mathbb{K}\mathrm{er}_{\lambda}$*)*

$$g : \mathbb{K}\mathrm{er}_{\lambda} \to \mathbb{K}\mathrm{er}_{\lambda} \tag{16.2}$$

[1] Důkaz: $\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{K}\mathrm{er}_{\lambda} \Rightarrow \vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}}) = \lambda\vec{\mathbf{v}} \Rightarrow \vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}})) = \lambda\vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{v}}) \Rightarrow \vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{v}})) = \lambda\vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{v}})$.

a ten je právě hledaným netriviálním společným vlastním vektorem.

Toto lemma užijeme pro případ $g = f^*$, které pro normální f komutuje s f.

<u>TVRZENÍ.</u> Speciálně, je-li $\vec{\mathbf{v}}$ společný vlastní vektor f a f^*, tak příslušná vlastní čísla

$$\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}}) = \lambda\vec{\mathbf{v}}, \quad \vec{\mathbf{f}}^*(\vec{\mathbf{v}}) = \lambda'\vec{\mathbf{v}} \tag{16.3}$$

splňují vztah $\lambda' = \overline{\lambda}$, *jelikož*

$$\overline{\lambda'}\mathbf{b}(\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{v}}) = \mathbf{b}(\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{f}}^*(\vec{\mathbf{v}})) = \mathbf{b}(\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}}),\vec{\mathbf{v}}) = \mathbf{b}(\lambda\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{v}}) = \lambda\mathbf{b}(\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{v}}). \tag{16.4}$$

Jako v důkazu Jordanovy věty nyní chceme ověřit, že $\mathbb{K}\mathrm{er}_\lambda$ i $\mathbb{I}\mathrm{m}_\lambda = \{\vec{\mathbf{w}} = (f - \lambda\mathbf{1})\vec{\mathbf{v}} \,|\, \vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{V}\}$ jsou invariantní podprostory vzhledem k oběma operátorům f i f^*; přesněji, dokážeme pouze

<u>LEMMA DRUHÉ.</u> Nechť $\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}}) = \lambda\vec{\mathbf{v}}$. Označme symbolem $\mathbb{W}$ ortogonální doplněk $\{\vec{\mathbf{v}}\}^\perp$. Pak $f^*(\mathbb{W}) \subseteq \mathbb{W}$.

Pro důkaz si stačí uvědomit, že

$$\forall\vec{\mathbf{w}} \in \mathbb{W} \qquad \mathbf{b}(\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{f}}^*(\vec{\mathbf{w}})) = \mathbf{b}(\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{v}}),\vec{\mathbf{w}}) = 0. \tag{16.5}$$

Toto lemma použijeme pro případ, kdy je $\vec{\mathbf{v}}$ společným vlastním vektorem f a f^*. Potom jsou operátory (restrikce)

$$f, f^* : \mathbb{W} \to \mathbb{W} \tag{16.6}$$

opět vzájemně adjungované (ověřte) a zajisté, že stále komutují. Lze tudíž nalézt další vlastní vektor f a f^*, tentokrát v prostoru $\mathbb{W}$. V případě konečné dimense $\mathbb{V}$ (popravdě ale většinou i jindy) takto najdeme za konečnou dobu celou basi, a důkaz je tímto hotov.

Jiný důkaz věty lze získat pomocí následující věty, která je jednoduchou variantou lemmatu zformulovaného na straně 200 na konci kapitoly o Jordanově tvaru.

<u>SCHUROVA VĚTA.</u> Každý operátor lze ve vhodné ortonormální basi vyjádřit trojúhelníkovou maticí. *Není totiž těžké uvidět, že tato trojúhelníková matice musí být pro případ normálního operátoru diagonální (pokud basi odpovídající rostoucímu systému invariantních podprostorů zkonstruovanému na straně 200 bereme ortonormální).*

Maticová reformulace. Pro normální matici $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A}$) existuje komplexní diagonální $\mathbf{D}$ a unitární $\mathbf{U}$ taková, že

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^{-1} \equiv \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^*. \tag{16.7}$$

Je-li navíc $\mathbf{A}$ unitární resp. hermitovská resp. antihermitovská, jsou na diagonále v $\mathbf{D}$ komplexní jednotky resp. reálná resp. ryze imaginární čísla.

Rozklad do projektorů. Pro každý normální operátor $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ existují ortogonální projekce $p_i : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ takové, že

$$p_i p_j = \delta_{ij} p_i, \quad \sum_i p_i = \mathbf{1}, \quad p_i = |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \tag{16.8}$$

a navíc (λ_i jsou elementy spektra)

$$f = \sum_i \lambda_i p_i = \sum_i |\psi_i\rangle \lambda_i \langle\psi_i|, \tag{16.9}$$

kde druhý (Diracův) zápis se užívá v kvantové mechanice a vztahu

$$\mathbf{1} = \sum_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \tag{16.10}$$

říkáme obvykle **relace úplnosti** a vztah

$$p_i p_j = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|\psi_j\rangle\langle\psi_j| = \delta_{ij}|\psi_i\rangle\langle\psi_i| = \delta_{ij} p_i \tag{16.11}$$

platí právě proto, že vlastní vektory $|\psi_i\rangle$ tvoří ortonormální basi a tedy

$$\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \delta_{ij}. \tag{16.12}$$

Funkce normálních operátorů. Rozklad do projektorů

$$f = \sum_i \lambda^i p_i \tag{16.13}$$

umožňuje definovat operátor $F(f)$ pro jakoukoliv funkci $F(\lambda)$ definovanou na spektru předpisem

$$F(f) = \sum F(\lambda^i) p_i. \tag{16.14}$$

Cvičení. Pro $F(x) = x^n$, $F(x) = e^x$ je to v souladu s dřívějšími definicemi. Zopakujte!

Jinou zajímavou funkcí je *odmocnina z matice*. Popište podrobně její konstrukci. Zajimají nás hlavně reálné odmocniny čili případ tzv. positivně definitních, reálných symetrických matic (jejichž spektrum sestává pouze z positivnich hodnot).

Odmocnina z matice je přímo nezbytná při práci třeba s tzv. vícerozměrnými gaussovskými integrály (tzn. např. integrál z funkce $\exp(-\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x})$ popř. ještě dále vynásobené nějakým polynomem). Znáte-li již metody vícerozměrné integrace (Fubiniovu větu a větu o substituci – mimochodem jak zní příslušná lineárně algebraická zjednodušená verse těchto vět, víte?), spočtěte tyto integrály.

<u>Úlohy o adjunkci a transposici.</u>

1. Nechť $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ na obyčejném prostoru bez skalárního součinu má vůči basi $\vec{\mathbf{v}}_1, \dots, \vec{\mathbf{v}}_n$ matici $\mathbf{A}$. Určete matice transponovaného a adjungovaného zobrazení vůči téže basi.

2. Řešte minulou úlohu v případě, je-li zadán skalární součin b na $\mathbb{V}$.

3. Nechť $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ je dáno maticí $\mathbf{A}$ v nějaké basi $\vec{\mathbf{v}}_1, \dots, \vec{\mathbf{v}}_n \in \mathbb{E}^n$, kde $\vec{\mathbf{v}}_i = (c^1_{\ i}, \dots, c^n_{\ i})^T$. Potom duální zobrazení f' má vůči stejné basi matici (píšeme-li vektor vždy vpravo, i když je z duálu; identifikujeme $\mathbb{E}^n = (\mathbb{E}^n)'$) $\mathbf{G}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{G}$, kde $\mathbf{G} = \mathbf{C}^T\mathbf{C}$.

<u>Řešení.</u> Otázky prvé úlohy jsou nekorektně formulovány. V druhé pišme

$$(\vec{\mathbf{v}}_1, \dots, \vec{\mathbf{v}}_n) = (\vec{\mathbf{e}}_1, \dots, \vec{\mathbf{e}}_n)\mathbf{C} \tag{16.15}$$

pomocí matice přechodu $\mathbf{C}$ od nějaké ortonormální base $\vec{\mathbf{e}}_i$ (tj. $\mathbf{b}(\vec{\mathbf{e}}_i, \vec{\mathbf{e}}_j) = \delta_{ij}$) k basi zadané. Potom má f vůči basi $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}$ matici $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ a f^* má vůči této basi matici $\mathbf{C}^*\mathbf{A}^*(\mathbf{C}^{-1})^*$. Konečně vůči basi $\{\vec{\mathbf{v}}_i\}$ má f^* matici

$$\mathbf{C}\mathbf{C}^*\mathbf{A}^*(\mathbf{C}^{-1})^*\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{G}\mathbf{A}^*\mathbf{G}^{-1}, \tag{16.16}$$

kde $\mathbf{G} = \mathbf{C}\mathbf{C}^*$ je tzv. **Grammova matice**. (Setkáme se s ní i jinde.)

16.1 Fyzikální veličiny v kvantové mechanice

Při přechodu od klasické teorie ke kvantové nahradíme fysikální veličiny vhodnými lineárními operátory, účinkujícími na Hilbertově prostoru (lineární prostor se skalárním součinem) stavů (obvykle nekonečněrozměrném prostoru komplexních funkcí; jde o funkce na $\mathbb{R}^3$, studujeme-li pohyb částice ve třech rozměrech). Tak například v kvantové mechanice jedné částice pohybující se v jednom rozměru máme hermitovské (aby vlastní čísla byla reálná a tedy měřitelná) operátory $\mathbf{x}, \mathbf{p}$ s komutační relací

$$[\mathbf{x}, \mathbf{p}] = i\hbar, \tag{16.17}$$

která připouští interpretovat operátor $\mathbf{x}$ jako násobení dané funkce (jde o prostor funkcí $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$) funkcí x a operátor $\mathbf{p}$ jako $-i\hbar d/dx$ (v takovém případě mluvíme o **souřadnicové representaci**).

Podotkněme, že funkci lze Fourierovou transformací převést do **hybnostní representace**, chápat funkci jako funkci proměnné p a operátor $\mathbf{p}$ representovat jako násobení dané funkce funkcí p a operátor $\mathbf{x}$ jako $i\hbar d/dp$. Ověřte, že oba tyto operátory jsou hermitovské v obou representacích.

Zatímco v klasické fysice měly všechny veličiny konkrétní hodnotu, v kvantové mechanice lze o přesné hodnotě mluvit pouze v případě, že systém se nachází ve stavu, který je vlastní funkcí daného operátoru.

Tak například, hledáme-li (v souřadnicové representaci) vlastní stavy operátoru polohy (vlastnímu číslu říkejme x_0), má platit

$$\forall x \qquad \mathbf{x}\psi_{x_0}(x) = x_0\psi_{x_0}(x), \tag{16.18}$$

z čehož dostáváme po vydělení $\psi_{x_0}(x)$, že funkce ψ_{x_0} musí být všude (pro všechna x) nulová, vyjma bodu $x = x_0$. Takovou funkci lze tedy psát

$$\psi_{x_0}(x) = \langle x|x_0\rangle = \delta(x - x_0) \tag{16.19}$$

a nelze ji násobit takovým činitelem, aby měla jednotkovou normu. Jde totiž o případ spojitého spektra (vlastní číslo nabývá hodnot ze spojitého oboru), a tak musíme podmínkou výše nahradit vztah pro ortonormálnost base

$$\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \delta_{ij}. \tag{16.20}$$

Podobně, vlastní funkcí příslušející vlastnímu číslu p_0 operátoru $\mathbf{p}$ je **rovinná vlna**[2]

$$\psi_{p_0}(x) = \langle x|p_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\exp(ip_0x/\hbar) \tag{16.21}$$

a tyto vlny mohou posloužit jako spojitá base prostoru stejně dobře, jako base vektorů $|x_0\rangle$. Ortonormálnost této base a relace úplnosti pro obě base zapíšeme jako

$$\langle p|p'\rangle = \delta(p - p'), \quad \mathbf{1} = \int_{-\infty}^{\infty} |x\rangle dx\langle x| = \int_{-\infty}^{\infty} |p\rangle dp\langle p|. \tag{16.22}$$

[2] Kdybychom nepřipsali jmenovatel $\sqrt{2\pi\hbar}$, museli bychom napsat $2\pi\hbar$ do jmenovatele v relaci úplnosti pro $|p\rangle$-basi.

Heisenbergova relace neurčitosti

($\sharp$) Mluvme o **střední hodnotě** dané veličiny F ve stavu $|\psi\rangle$ (normovaném, $\langle\psi|\psi\rangle = 1$) jako o

$$\langle F\rangle_{\vec{\psi}} = \mathbf{b}(\mathbf{F}\vec{\psi},\vec{\psi}) = \langle\psi|\mathbf{F}|\psi\rangle. \tag{16.23}$$

Neurčitostí veličiny F (ve stavu ψ, tento index budeme dále vynechávat) mějme na mysli[3]

$$\Delta F = \sqrt{\langle(F - \langle F\rangle)^2\rangle}. \tag{16.24}$$

Ujasněte si, že $\Delta F = 0$ je právě když je $|\psi\rangle$ vlastním vektorem $\mathbf{F}$.

Ptejme se nyní, zda mohou dvě (reálné) fysikální veličiny dané (hermitovskými) operátory $\mathbf{F},\mathbf{G}$ nabývat společně přesných hodnot, a hned si odpovězme: pokud komutují, je možné vytvořit basi celého $\mathbb{V}$ ze společných vlastních vektorů. V opačném případě je

$$\mathbf{F}|\psi\rangle = f|\psi\rangle, \quad \mathbf{G}|\psi\rangle = g|\psi\rangle, \quad (\mathbf{FG}-\mathbf{GF})|\psi\rangle = (fg-gf)|\psi\rangle = 0 \tag{16.25}$$

možné nalézt společné vlastní vektory jen ty, které jsou navíc vlastními vektory komutátoru $[\mathbf{F},\mathbf{G}]$ příslušející nulovému vlastnímu číslu. Přesnější vztah pro neurčitosti nám poskytuje

<u>HEISENBERGŮV PRINCIP NEURČITOSTI.</u> Podle něho je pro hermitovské F,G

$$\Delta F\cdot\Delta G \geq \frac{1}{2}\left|\langle[\mathbf{F},\mathbf{G}]\rangle\right|, \tag{16.26}$$

což má například následující důsledek, přejdeme-li do nekonečnědimensionálních prostorů:

Pro operátory $\mathbf{x},\mathbf{p}$ platí $[\mathbf{x},\mathbf{p}] = i\hbar$, střední hodnota tohoto komutátoru je vždy $i\hbar$, a tak

$$\Delta x\cdot\Delta p \geq \frac{\hbar}{2}. \tag{16.27}$$

Poznamenejme, že rovnost nastává pro vlnovou funkci ve tvaru

$$\langle x|\psi\rangle = c\cdot\exp\left(-\frac{1}{4\Delta x^2}(x-x_0)^2 + \frac{ip_0x}{\hbar}\right) \tag{16.28}$$

Gaussovy křivky, tedy pro tzv. **minimalisující vlnový balík.**

[3] Při čtení literatury se nelekněte, je-li neurčitost nazývána **střední kvadratickou odchylkou**, **dispersí** nebo **rozptylem** (posledními dvěma pojmy se spíše nazývá čtverec naší neurčitosti), a že se značí třeba $\delta_\psi F$.

Pro důkaz (jsme opět v konečné dimensi) si uvědomme, že operátory

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} - \langle F \rangle, \quad \mathbf{G}' = \mathbf{G} - \langle G \rangle \tag{16.29}$$

mají stejný komutátor $[\mathbf{F}', \mathbf{G}'] = [\mathbf{F}, \mathbf{G}]$ *díky bilinearitě komutátoru a faktu, že číslo* $\langle F \rangle$ *apod. komutuje se vším. Upravujme: první nerovnost je Cauchyova,* $\mathbb{I}\mathrm{m}$ *zde značí imaginární část, v předposlední úpravě užijeme samoadjungovanost* F, G *a v poslední rovnost komutátorů.*

$$\Delta F \cdot \Delta G \geq |\mathbf{b}(\mathbf{F}'\psi, \mathbf{G}'\psi)| \geq |\mathbb{I}\mathrm{m}\, \mathbf{b}(\mathbf{F}'\psi, \mathbf{G}'\psi)| = \tag{16.30}$$

$$= \frac{1}{2} |\mathbf{b}(\mathbf{F}'\psi, \mathbf{G}'\psi) - \mathbf{b}(\mathbf{G}'\psi, \mathbf{F}'\psi)| = \frac{1}{2} |\mathbf{b}((\mathbf{F}'\mathbf{G}' - \mathbf{G}'\mathbf{F}')\psi, \psi)| = \tag{16.31}$$

$$= \frac{1}{2} |\mathbf{b}([\mathbf{F}, \mathbf{G}]\psi, \psi)| . \tag{16.32}$$

16.2 Prostor Fourierových řad

... Poté, co na jednom semináři skončila Weylova přednáška o Riesz-Fischerově větě[4] se Hilbert údajně Weyla zeptal: „Weyle, řeknete mně, prosím, co to je Hilbertův prostor? Já jsem tomu nerozuměl.“

Popovídáme si o prostoru komplexních funkcí periodických s periodou 2π a se skalárním součinem

$$\mathbf{b}(\vec{\mathbf{f}}, \vec{\mathbf{g}}) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx \tag{16.33}$$

splňujících nějakou podmínku rozumnosti, konkrétně integrovatelnost v kvadrátu, tj.

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx < \infty \tag{16.34}$$

(těmito detaily vás budou zatěžovat příští rok dosti). Uvažme, že operátor hybnosti $\mathbf{P} = -id/dx$ je[5] hermitovský, protože (podle metody per partes, hranaté závory se tentokrát anulují díky periodičnosti)

$$\int_{-\pi}^{\pi} (-i\frac{d}{dx}f)\overline{g}\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} f\overline{(-i\frac{d}{dx}g)}\, dx. \tag{16.35}$$

[4]O isomorfnosti dvou prostorů se skalárním součinem: prostoru posloupností s konečnou sumou kvadrátů absolutních hodnot členů a prostoru funkcí na intervalu s konečným integrálem čtverce absolutní hodnoty – ztotožněných v Lebesgueově smyslu.

[5]Pro srovnání: na prostoru polynomů je tento operátor nilpotentní, což je jako nebe a dudy.

Operátor $\mathbf{P}$ má vlastní funkce odpovídající celému vlastnímu číslu p

$$\psi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp ipx, \tag{16.36}$$

které jsme normovali (násobili faktorem, zaručujícím jednotkovou normu). (Každá funkce $\mathbf{P}$, jmenovitě jeho čtverec, má tytéž vlastní vektory jako $\mathbf{P}$. Čtverec $\mathbf{P}^2$ bychom museli uvažovat v případě reálných prostorů a vidíme, že by podprostory odpovídající vlastnímu číslu p^2 byly dvojrozměrné. Komplexní výklad je „fundamentálnější".)

Tyto vlastní funkce můžeme užívat jako basi prostoru funkcí. Předtím jsme funkce vyjadřovali jako „integrální lineární kombinaci vektorů (nespočetné spojité) base vlastních vektorů unitárního operátoru" e^{ix} (s vlastními čísly – komplexními jednotkami) nebo hermitovského operátoru x s vlastními čísly $x_0 \in (-\pi, \pi\rangle$. Vyjádření funkce ψ ve spojité basi lze psát

$$\psi(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x_0)\delta(x - x_0)dx_0, \tag{16.37}$$

kde $\psi(x_0)$ hrají roli koeficientů lineární kombinace a $\psi_{x_0}(x) = \delta(x - x_0)$ jsou funkce tvořící basi. (Delta-funkce je vyložena v kapitole o dualitě.)

Takováto vyjádření ovšem pojmem Hilbertova prostoru ještě správně formalisována *nejsou*; to vyžaduje další matematické konstrukce jako je např. tzv. „osnaščonnoje prostranstvo" I. M. Gelfanda.

V řeči bracketů lze psát relace úplnosti a vztahy mezi basemi

$$1 = | = \sum_{p\in\mathbb{Z}} |p\rangle\langle p| = \int_{-\pi}^{\pi} |x\rangle\langle x| dx, \quad \langle x|p\rangle = \frac{e^{ipx}}{\sqrt{2\pi}} = \overline{\langle p|x\rangle}. \tag{16.38}$$

16.3 Kvantový harmonický oscilátor

Tomuto problému je poprávu věnováno mnoho pozornosti v mnohých knihách; nejen proto, že na mnohé situace lze nahlížet v přiblížení, kdy je síla úměrná výchylce (tedy potenciální energie roste kvadraticky s výchylkou), ale i proto, že identická úloha se objevuje v kvantové teorii pole, včetně (super)strun, a proto, že má svoji velkou krásu a jednoduchost.

Mluvme o prostoru komplexních funkcí na reálné ose (dostatečně slušně se chovajících, integrovatelných v kvadrátu, v nekonečnu jdoucích k nule i se svojí prvou derivací atd.), v němž mějme operátory souřadnice a impulsu

$$\hat{x}, \quad \hat{p} = -i\hbar\frac{d}{dx}, \quad [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \tag{16.39}$$

(aby byl text lépe využitelný i fysikálně, vkládáme všude konstanty $\hbar, k, m$ a $\omega = \sqrt{k/m}$), o nichž si čtenář může mysliti, že jsou rovny jedné; pak vyhlížejí vzorce zvláště elegantně.

Na tomto prostoru mějme skalární součin

$$\langle g|f\rangle = \mathbf{b}(\vec{\mathbf{f}}, \vec{\mathbf{g}}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx. \tag{16.40}$$

Hledáme vlastní čísla a vektory **hamiltoniánu** kvantového oscilátoru, to jest operátoru energie ($k = m\omega^2$ je „tuhost“, m je hmotnost částice)

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}k\hat{x}^2. \tag{16.41}$$

Bez dlouhých řečí, začněme nejefektivnější cestu: víme, že operátory $\hat{x}$ a $\hat{p}$ jsou hermitovské (v důkazu hermitovosti $\hat{p}$ tentokrát vypadnou hranaté závorky proto, že funkce spolu se svými prvými derivacemi jdou v nekonečnu k nule); jako vždy, když se nám vyskytne výraz tvaru a^2+b^2, je i teď výhodné užít pro analýzu komplexní kombinace $a + bi, a - bi$.

Zaveďme tedy **anihilační operátor** $\hat{c}$ a k němu adjungovaný **kreační operátor** $\hat{c}^*$ vztahy

$$\hat{c} = \sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}(m\omega\hat{x} + i\hat{p}), \quad \hat{c}^* = \sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}(m\omega\hat{x} - i\hat{p}). \tag{16.42}$$

Pomocí bilinearity komutátoru lehce ověříte, že $[\hat{c}, \hat{c}^*] = \hat{1}$, (16.43)

a snadným roznásobením[6] schválíte, že

$$\hat{H} = (\hat{c}^*\hat{c} + \frac{1}{2})\hbar\omega. \tag{16.44}$$

Připravme si ještě komutátory $[\hat{H}, \hat{c}^*] = \hbar\omega\hat{c}^*$, $[\hat{H}, \hat{c}] = -\hbar\omega\hat{c}$, (16.45)

které lehce spočtete, znáte-li rovnost, již lehce zkontrolujete rozepsáním

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B. \tag{16.46}$$

Máme-li vlastní vektor $|\psi\rangle$ operátoru $\hat{H}$ odpovídající energii (vlastnímu číslu E)

$$\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle, \tag{16.47}$$

[6] Pozor, $(\hat{a} + \hat{b})^2 = \hat{a}^2 + \hat{a}\hat{b} + \hat{b}\hat{a} + \hat{b}^2 \neq \hat{a}^2 + 2\hat{a}\hat{b} + \hat{b}^2$, pokud $\hat{a}$ a $\hat{b}$ nekomutují.

potom vektory $\hat{c}|\psi\rangle$, $\hat{c}^*|\psi\rangle$ jsou také vlastní stavy $\hat{H}$ s energií $E-\hbar\omega$ resp. $E+\hbar\omega$ (užito roznásobení, fakt, že číslo E komutuje se vším atd.):

$$\hat{H}\hat{c}|\psi\rangle = ([\hat{H},\hat{c}]+\hat{c}\hat{H})|\psi\rangle = -\hbar\omega\hat{c}|\psi\rangle + \hat{c}E|\psi\rangle = (E-\hbar\omega)\hat{c}|\psi\rangle, \quad (16.48)$$

$$\hat{H}\hat{c}^*|\psi\rangle = ([\hat{H},\hat{c}^*]+\hat{c}^*\hat{H})|\psi\rangle = \hbar\omega\hat{c}^*|\psi\rangle + \hat{c}^*E|\psi\rangle = (E+\hbar\omega)\hat{c}^*|\psi\rangle. \quad (16.49)$$

Tyto rovnosti platí nesporně, avšak také máme požadavek, že vlastní číslo $\hat{c}^*\hat{c}$ nemůže být záporné (a tedy vlastní číslo $\hat{H}$ menší než $\hbar\omega/2$), protože střední hodnota operátoru $\hat{c}^*\hat{c}$ v normovaném stavu $|\psi\rangle$

$$\langle\psi|\hat{c}^*\hat{c}|\psi\rangle = \lambda\langle\psi|\psi\rangle, \quad \langle\psi|\psi\rangle = 1, \quad (16.50)$$

která je pro vlastní vektor $|\psi\rangle$ přímo rovna vlastnímu číslu λ, je vlastně čtvercem normy vektoru $\hat{c}|\psi\rangle$.

Řešení záhady záleží v tom, že rovnosti výše jsou splněny proto, že celý vektor $\hat{c}|\psi\rangle$ se rázem stane nulovým, jdeme-li s energií příliš nízko. Dovolené je jen takové spektrum energií, že pro nějaký vektor $|0\rangle$ (říkejme mu **vakuum**) platí

$$\hat{c}|0\rangle = 0 \Rightarrow \hat{c}^*\hat{c}|0\rangle = 0 \Rightarrow \hat{H}|0\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega|0\rangle. \quad (16.51)$$

Jinak řečeno, spektrum obsahuje hodnoty $\hbar\omega/2, 3\hbar\omega/2, 5\hbar\omega/2, \ldots$, jsou ekvidistantně rozestavěné a toho využil Stvořitel v kvantové teorii pole: každý stav fotonu, stejně jako ostatních bosonů, s danou velikostí a směrem hybnosti a s danou polarisací, představuje jeden oscilátor a stupeň hladiny (vlastní číslo operátoru $\hat{c}^*\hat{c}$) udává počet fotonů v tomto stavu.

Nedávno zavedenou terminologií bychom mohli říci, že je vakuum cyklickým vektorem kreačního operátoru. ($\hat{c}^{*n}|0\rangle$ tvoří celou basi pro $n = 0, 1, 2 \ldots$.)

To, že základní hladina (nula fotonů) nemá nulovou energii, byl jistě jeden ze stimulů k výstavbě **supersymetrických teorií**. Pokud si myslíte, že stačí říci, že $\hat{H} = \hbar\omega\hat{c}^*\hat{c}$ a zbavit se tak energie základního stavu, vězte, že potom nejde celková energie psát jako objemový integrál její hustoty.

16.4 Hermitovy polynomy

Funkce „vakuum“ má v souřadnicové representaci tvar (vracíme se opět k značení obvyklému v matematice)

$$\langle x|0\rangle = \psi_0(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}x_j^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2x_j^2}\right), \quad (16.52)$$

kde x_j je jednotková délka

$$x_j = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \tag{16.53}$$

Vidíme, že k-násobným působením kreačního operátoru (kombinace x a d/dx) se k exponenciále přinásobí polynom k-tého stupně.

To nás vybízí k tomu, abychom exponenciální faktor vytkli (dále stavíme $k = m = \omega = x_j = 1$) a definovali skalární součin na prostoru polynomů ($F = f \exp(x^2/2)$)

$$\mathbf{b}(\vec{\mathbf{F}}, \vec{\mathbf{G}}) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\overline{G(x)}e^{-x^2}\,dx. \tag{16.54}$$

Hermitovy polynomy H_n odpovídající n-krát vzbuzenému vakuu (n **fononů** čili vibračních kvant) se obvykle normují tak, že

$$\mathbf{b}(H_m, H_n) = \delta_{mn} n! \cdot 2^n \sqrt{\pi}. \tag{16.55}$$

Pak lze psát jednoduchý vzorec (s konvenčním znaménkem)

$$H_m(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^m}{dx^m} e^{-x^2}. \tag{16.56}$$

Abychom zjistili, který operátor $\mathbf{G}$ má za své vlastní funkce Hermitovy polynomy, stačí si uvědomit, že tento operátor získáme tím, že polynom násobíme $\exp(-x^2/2)$, čímž ho převedeme na vlnovou funkci harmonického oscilátoru, zapůsobíme na toto hamiltoniánem (z minulé sekce) a opět dělíme $\exp(-x^2/2)$, čímž vlnovou funkci opět převedeme na polynom. (Pamatujme, že $\hat{H} = 1/2(x^2 - d^2/dx^2)$.)

$$\mathbf{G} = \exp(x^2/2)\hat{H}\exp(-x^2/2) = \frac{1}{2}(-\frac{d^2}{dx^2} + 2x\frac{d}{dx} + 1) \tag{16.57}$$

Takový operátor $\mathbf{G}$ má tedy vlastní čísla $1/2$, $3/2$, $5/2$ atd. (Abychom měli vlastní čísla $0, 1, 2$, stačí vynechat jednotku v závorce.)

Tvar několika prvních Hermitových polynomů

$$\begin{gathered} H_0 = 1, \quad H_1 = 2x, \quad H_2 = 4x^2 - 2, \\ H_3 = 8x^3 - 12x, \quad H_4 = 16x^4 - 48x^2 + 12. \end{gathered} \tag{16.58}$$

Platí rekurentní vzorec

$$H_{n+1} - 2xH_n + 2nH_{n-1} = 0 \tag{16.59}$$

a polynomy lze získat jako koeficienty MacLaurinovy řady vytvořující funkce

$$e^{-t^2+2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!}. \tag{16.60}$$

16.5 Legendreovy polynomy

V případě Legendreových polynomů uvažujeme polynomy na $\langle -1, 1\rangle$ se skalárním součinem

$$\langle g|f\rangle = \mathbf{b}(\vec{\mathbf{f}}, \vec{\mathbf{g}}) = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx. \tag{16.61}$$

Na tomto prostoru nás zajímá Legendreův operátor (derivujte, vynásobte $x^2 - 1$ a opět derivujte)

$$\mathbf{L} = (x^2-1)\frac{d^2}{dx^2} + 2x\frac{d}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2-1)\frac{d}{dx}. \tag{16.62}$$

Po substituci $x = \cos\theta$ nabude operátor tvaru

$$\mathbf{L}_\theta = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\sin\theta\frac{d}{d\theta}. \tag{16.63}$$

Ukážeme, že je hermitovský ($\mathbf{L}^* = \mathbf{L}$).

$$\begin{gathered} \textstyle\int_{-1}^{1}(\frac{d}{dx}(x^2-1)\frac{d}{dx}f(x))\overline{g(x)}dx = \\ = -\textstyle\int_{-1}^{1}(x^2-1)(\frac{d}{dx}f(x))\frac{d}{dx}\overline{g(x)}dx = \int_{-1}^{1} f(x)\frac{d}{dx}((x^2-1)\frac{d}{dx}\overline{g(x)})dx \end{gathered} \tag{16.64}$$

Použili jsme dvakrát per partes. Hranaté závory byly tentokrát nulové proto, že obsahovaly činitel (x^2-1), který nabývá v bodech ± 1 nuly (alespoň pokud jsou f, g polynomy).

Vlastními vektory jsou Legendreovy polynomy, obvykle normované podle vztahu

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]. \tag{16.65}$$

Prvních pár polynomů má tvar (jsou přepočteny i na kosiny násobků θ po substituci $x = \cos\theta$)

$$\begin{gathered} P_0 = 1, \quad P_1 = x = \cos\theta, \\ P_2 = \tfrac{1}{2}(3x^2-1) = \tfrac{1}{4}(3\cos 2\theta + 1), \\ P_3 = \tfrac{1}{2}(5x^3-3x) = \tfrac{1}{8}(5\cos 3\theta + 3\cos\theta). \end{gathered} \tag{16.66}$$

To, že jsou vlastními vektory, je vidět z toho, že jsou na sebe kolmé. Provádíme-li ortogonalisaci $1, x, x^2 \ldots$, vyjdou nám jednoznačné (až na koeficienty) vektory. Na druhé straně, hledáme-li mezi polynomy n-tého stupně vlastní vektor $\mathbf{L}$, který (protože vlastní) je kolmý na všechny polynomy nižších stupňů, vyjdou také jednoznačně.

Kolmost ověříte násobným provedením per partes na výrazu

$$\mathbf{b}(P_m, P_n) = \text{konst} \cdot \int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m dx. \tag{16.67}$$

Mimo jiné, pro polynomy normované způsobem výše, platí vztah ortogonality ($n+1/2$ dá dost počítání)

$$\mathbf{b}(P_n, P_m) = \frac{\delta_{mn}}{n+\frac{1}{2}}. \tag{16.68}$$

Přesto nás zajímá spektrum Legendriánu (násobíme koeficientem $\kappa = 2^n \cdot n!$).

$$\begin{gathered}
\mathbf{L}(\kappa P_n)(x) = \tfrac{d}{dx}(x^2-1)\tfrac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^2-1)^n = \\
= 2x\tfrac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^2-1)^n + (x^2-1)\tfrac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}(x^2-1)^n = \\
= \tfrac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^2-1)\tfrac{d}{dx}(x^2-1)^n - 2nx\tfrac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^2-1)^n - \\
-n(n+1)\tfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = \tfrac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}2nx(x^2-1)^n - 2nx\tfrac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^2-1)^n - \\
-n(n+1)\tfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = n(n+1)\kappa P_n(x)
\end{gathered} \tag{16.69}$$

Několikrát byla užita Leibnizova formule pro N-tou derivaci součinu

$$(uv)^{(N)} = u^{(N)}v + Nu^{(N-1)}v' + \frac{N(N-1)}{2}u^{(N-2)}v'' + \ldots + uv^{(N)} \tag{16.70}$$

analogická binomické větě. Tak například v poslední úpravě položíme v prvém členu $N = n+1$, $u = (x^2-1)^n$, $v = 2nx$ a máme (členy, kde se v derivuje více než jednou, jsou nulové)

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}2nx(x^2-1)^n = 2nx\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^2-1)^n + 2n(n+1)\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n. \tag{16.71}$$

Poslední napsaný člen $2n(n+1)$ se trochu odečte s $n(n+1)$ a předposlední vyruší s předposledním v úpravách. Prostřední úpravu při výpočtu spektra kontrolujte pozpátku, při přiřazení $u = d/dx(x^2-1)^n$, $v = (x^2-1)$, $N = n+1$. Tentokrát jsou nulové členy, kde se v derivuje alespoň třikrát.

Vidíme, že P_n je vlastní funkce příslušející vlastnímu číslu $n(n+1)$.

Bez důkazu konstatujme na závěr ještě, že polynomy lze počítat podle rekursivního vzorce

$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)xP_n + nP_{n-1} = 0 \tag{16.72}$$

nebo jako koeficienty Taylorova rozvoje vytvořující funkce

$$(1-2tx+t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \tag{16.73}$$

(konverguje[7] pro $|t| < \left|x \pm \sqrt{x^2-1}\right|$), z toho plyne, že po dosazení $x = 1$ dostaneme nalevo $1/(1-t)$, což je geometrická řada $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$, a tudíž $\forall n \quad P_n(1) = 1$, že jejich definici lze rozepsat

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} n! \left(\frac{(2n)!}{n!} x^n - n \frac{(2n-2)!}{(n-2)!} x^{n-2} + \dots \right) \tag{16.74}$$

nebo ve vyjádření $x = \cos\theta$

$$P_n(\cos\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} \begin{pmatrix} 2i \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2n-2i \\ n-i \end{pmatrix} \cos(n-2i)\theta. \tag{16.75}$$

Převrácenou hodnotu vzdálenosti dvou bodů o sférických souřadnicích $(r, 0, 0)$ a (ρ, θ, ϕ) lze vyjádřit jako

$$(r^2 - 2r\rho\cos\theta + \rho^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta) \frac{\rho^n}{r^{n+1}} \tag{16.76}$$

pro $\rho < r$; pro $\rho > r$ ve vzorci vyměníme r a ρ.

Krokem ke sférickým funkcím jsou **přidružené Legendreovy polynomy**

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x), \tag{16.77}$$

po dosazení

$$P_l^m(x) = \frac{1}{2^l \cdot l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l \tag{16.78}$$

které pro každé $m = 0, 1, \dots, l$ (všimněte si, že vše funguje i pro $m = -l, -l+1, \dots, -1$) tvoří ortogonální basi. Vztah ortogonality je

$$\int_{-1}^{1} P_l^m(x) P_{l'}^m(x) dx = \delta_{ll'} \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}. \tag{16.79}$$

Jsou vlastními vektory (příslušné vlastnímu číslu $l(l+1)$) operátoru

$$(x^2-1)\frac{d^2}{dx^2} + 2x\frac{d}{dx} - \frac{m^2}{x^2-1}. \tag{16.80}$$

Většinou se násobí určitým faktorem. Tzv. **normované přidružené Legendreovy polynomy** jsou

$$\mathcal{P}_{lm} = \left((l + \frac{1}{2}) \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right)^{1/2} P_l^m. \tag{16.81}$$

[7] Pro $|x| \le 1$, což je např. vždy pro $x = \cos\theta$, konverguje vždy je-li $|t| < 1$

Jsou dobře definovány pro všechna $m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$ a

$$\mathcal{P}_{l,-m} = (-1)^m \mathcal{P}_{lm}. \tag{16.82}$$

Sférické funkce

Asi jste už někdy slyšeli o tom, že velikost vektoru orbitálního momentu hybnosti je $\sqrt{l(l+1)}\hbar$. Nedávno jsme našli operátor s vlastními čísly $l(l+1)$. Ano, operátor

$$\hat{\vec{L}}^2 = \hat{L}_x \hat{L}_x + \hat{L}_y \hat{L}_y + \hat{L}_z \hat{L}_z \tag{16.83}$$

má vlastní čísla $l(l+1)\hbar^2$, protože ho jistým způsobem lze převést na operátor Legendreův.

Uvažujme tedy prostor funkcí na jednotkové sféře (to jest množina bodů, kde $r = 1$), jinými slovy – zavedeme sférické souřadnice

$$x = r \sin\theta \cos\phi, \quad y = r \sin\theta \sin\phi, \quad z = r\cos\theta \tag{16.84}$$

a dumejme o prostoru všech funkcí $\theta \in (0, \pi)$, $\phi \in (0, 2\pi)$, na němž definujeme skalární součin vztahem

$$\mathbf{b}(\vec{\mathbf{f}}, \vec{\mathbf{g}}) = \int_{\text{sféra}} d\Omega\, f\overline{g} = \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, f(\theta,\phi)\overline{g}(\theta,\phi), \tag{16.85}$$

v němž jsme vyjádřili element prostorového úhlu $d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\phi$ tak, aby byl invariantní vůči rotaci souřadnic.

Na tomto prostoru mějme dva operátory

$$\mathbf{M} = -i\frac{d}{d\phi}, \quad \mathbf{L} = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}, \tag{16.86}$$

které komutují (jediné, s čím může $\partial/\partial\phi$ nekomutovat, je $f(\phi)$, a ta se zde nevyskytuje). $\mathbf{M}$ má vlastní čísla $m \in \mathbb{Z}$ a $\mathbf{L}$ má vlastní čísla $l(l+1)$, $l = 0, 1, 2\dots$ a společné vlastní funkce Y_{lm} budeme nazývat **kulové** neboli **sférické funkce** s momentem hybnosti l a jeho třetí složkou m. Číslo m nabývá hodnot $-l, -l+1, \dots l-1, l$.

Normované kulové funkce mají tvar

$$Y_{lm}(\theta,\phi) = (2\pi)^{-1/2}\mathcal{P}_{lm}e^{im\phi} \tag{16.87}$$

a někdy se mluví i o nenormovaných

$$\Phi_{lm} = P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}. \tag{16.88}$$

Uvedeme zde tvar několika prvních kulových funkcí, tvořících ortonormální systém vůči zadanému skalárnímu součinu (funkce $Y_{l,-m}$ je rovna $(-1)^m \overline{Y}_{lm}$[8]):

$$\mathbf{b}(Y_{lm}, Y_{l'm'}) = \delta_{ll'}\delta_{mm'} \tag{16.89}$$

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta, \quad Y_{11} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\phi}, \tag{16.90}$$

$$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right), \quad Y_{21} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{i\phi}, \tag{16.91}$$

$$Y_{22} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta e^{2i\phi}, \quad Y_{30} = \sqrt{\frac{7}{4\pi}}\left(\frac{5}{2}\cos^3\theta - \frac{3}{2}\cos\theta\right), \tag{16.92}$$

$$Y_{31} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{21}{4\pi}}\sin\theta(5\cos^2\theta - 1)e^{i\phi}, \quad Y_{32} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{105}{2\pi}}\sin^2\theta\cos\theta e^{2i\phi}, \tag{16.93}$$

$$Y_{33} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{35}{4\pi}}\sin^3\theta e^{3i\phi}, \quad Y_{40} = \sqrt{\frac{9}{4\pi}}\left(\frac{35}{8}\cos^4\theta - \frac{15}{4}\cos^2\theta + \frac{3}{8}\right), \tag{16.94}$$

$$Y_{41} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\sin\theta(7\cos^3\theta - 3\cos\theta)e^{i\phi}, \tag{16.95}$$

$$Y_{42} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{5}{8\pi}}\sin^2\theta(7\cos^2\theta - 1)e^{2i\phi}, \tag{16.96}$$

$$Y_{43} = -\frac{3}{4}\sqrt{\frac{35}{4\pi}}\sin^3\theta\cos\theta e^{3i\phi}, \quad Y_{44} = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{35}{8\pi}}\sin^4\theta e^{4i\phi}. \tag{16.97}$$

Když jsme již zabrousili do prostorů funkcí více proměnných, nemůžeme neříci, že nejpřirozenější způsob, jak získat spočetnou basi „polynomů“ na prostoru funkcí na kartézském součinu intervalů, je uvažovat společné vlastní vektory dvou operátorů působících na dvě různé proměnné (takové komutují).

Tak například na prostoru funkcí

$$f(\phi, x) : (-\pi, \pi\rangle \times \langle -1, 1\rangle \to \mathbb{C} \tag{16.98}$$

existují dva komutující operátory

$$\mathbf{P} = -\frac{\partial}{\partial\phi}, \quad \mathbf{L} = (x^2 - 1)\frac{d^2}{dx^2} + 2x\frac{d}{dx} \tag{16.99}$$

[8] Činitel $(-1)^m$ nám zajišťuje platnost všech vzorců i pro $m < 0$ a ti, kteří definují kulové funkce pro záporná m bez $(-1)^m$, tak činí trochu krátkozrace.

a za basi prostoru funkcí lze vzít společné vlastní vektory obou operátorů, součiny dvou funkcí

$$f_{kn}(\phi, x) = e^{ik\phi} P_n(x). \tag{16.100}$$

16.6 Čebyševovy, Laguerrovy a další polynomy

Volme opět interval $\langle -1, 1\rangle$, tentokrát ovšem se skalárním součinem

$$\mathbf{b}(\vec{\mathbf{f}}, \vec{\mathbf{g}}) = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g}(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{16.101}$$

který po substituci $x = \cos\theta$, $\theta \in \langle 0, \pi\rangle$ dává

$$\mathbf{b}(\vec{\mathbf{f}}, \vec{\mathbf{g}}) = \int_{0}^{\pi} f(\theta)\overline{g}(\theta) d\theta \tag{16.102}$$

a je tedy jakýmsi skalárním součinem na půlkružnici.

Uvažme diferenciální operátor[9]

$$\check{C} = \sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx} = (1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} - x\frac{d}{dx}. \tag{16.103}$$

Větami o substistuci nebo vyjádřením

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{-\sin\theta d\theta} \tag{16.104}$$

ihned usoudíte, že v proměnné θ má tvar $-d^2/d\theta^2$.

Je samoadjungovaným operátorem, protože

$$\begin{gathered}\mathbf{b}(\check{C}\vec{\mathbf{g}}, \vec{\mathbf{f}}) = \textstyle\int_{-1}^{1} \overline{f}\sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx} g\, dx = \\ = \left[\overline{f}\sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}g\right]_{-1}^{1} - \textstyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\left(\frac{d}{dx}\overline{f}\right)\frac{d}{dx} g\, dx = \\ \left[\overline{f}\sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}g - g\sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}\overline{f}\right]_{-1}^{1} + \textstyle\int_{-1}^{1}\left(\frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}\overline{f}\right) g\, dx = \\ = \mathbf{b}(\vec{\mathbf{g}}, \check{C}\vec{\mathbf{f}})\end{gathered} \tag{16.105}$$

hranaté závorky vymizí v případě, že funkce f, g mají konečnou derivaci v bodech $-1, 1$, jelikož $\sqrt{1-x^2}$ je zde nulové.

[9] Nejprve derivuji, pak násobím $\sqrt{1-x^2}$, pak ...

Vlastními vektory jsou **Čebyševovy polynomy** (prvního druhu) příslušející vlastnímu číslu $-n^2$

$$T_n(x) = (1-x^2)^{-1/2}\tfrac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n+1/2} = \cos(n \arccos x) = \\ = x^n - \binom{n}{2} x^{n-2}(1-x^2) + \binom{n}{4} x^{n-4}(1-x^2)^2 - + \ldots \tag{16.106}$$

Dalšími lineárně nezávislými vlastními vektory jsou **Čebyševovy polynomy druhého druhu** (jde o polynomy násobené $\sqrt{1-x^2}$)

$$U_n(x) = \sin(n \arccos x), \tag{16.107}$$

tvořící další ortogonální basi prostoru funkcí. Všimněte si, že i v případě, když obě funkce f, g mají tvar polynom krát $\sqrt{1-x^2}$, tak hranaté závorky vymizí, poněvadž je-li $f = F\sqrt{1-x^2}$ pro polynom F a $g = G\sqrt{1-x^2}$ pro polynom G, je

$$\frac{d}{dx}\overline{f} = -\frac{\overline{F}x}{\sqrt{1-x^2}} + \omega_F, \quad \frac{d}{dx}g = -\frac{Gx}{\sqrt{1-x^2}} + \omega_G, \tag{16.108}$$

kde symbol ω_F a ω_G označuje výrazy, které jsou nulové pro $x = \pm 1$ a (neboť násobeny $\sqrt{1-x^2}$) v hranatých závorkách tedy vymizí. Zbylé členy dají

$$-x\sqrt{1-x^2}[\overline{F}G - \overline{F}G]_{-1}^{1} \tag{16.109}$$

a vymizí tedy také. (Pozor, podmínka samoadjungovanosti nebude splněna v kombinovaném případě, tj. pokud f bude polynom a g bude $G\sqrt{1-x^2}$.)

Uvedeme ještě tvar několika prvních Čebyševových polynomů:

$$\begin{gathered} U_0 = 0, \quad U_1 = \sqrt{1-x^2}, \quad U_2 = 2x\sqrt{1-x^2}, \\ U_3 = (4x^2-1)\sqrt{1-x^2}, \quad U_4 = (8x^3-4x)\sqrt{1-x^2} \ldots \\ T_0 = 1, \quad T_1 = x, \quad T_2 = 2x^2 - 1, \quad T_3 = 4x^3 - 3x, \\ T_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1, \quad T_5 = 16x^5 - 20x^3 + 5x, \\ T_6 = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1, \quad T_7 = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x, \\ T_8 = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1, \\ T_9 = 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x \end{gathered} \tag{16.110}$$

Pro úplnost zde ještě bez důkazů uvádíme rekurentní vzorec (stejný pro T i U)

$$T_{n+1} - 2xT_n + T_{n-1} = U_{n+1} - 2xU_n + U_{n-1} = 0 \tag{16.111}$$

a tzv. vytvořující funkce

$$\frac{1-t^2}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n(x) t^{|n|}, \qquad \frac{1}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{U_{n+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} t^n. \quad (16.112)$$

Shrňme ještě vztahy ortogonality

$$\begin{aligned} \textstyle\int_{-1}^{1} T_m(x) T_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \tfrac{\pi}{2}(\delta_{mn} + \delta_{-m,n}), \\ \textstyle\int_{-1}^{1} U_m(x) U_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \tfrac{\pi}{2}(\delta_{mn} - \delta_{-m,n}). \end{aligned} \qquad (16.113)$$

Nejlepší aproximace jsou pomocí Čebyševových polynomů

Čebyševovy polynomy hrají důležitou úlohu v teorii aproximací (funkcí) polynomy. Polynom p nazveme **nejlepší aproximací** dané spojité funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$ v třídě polynomů $\mathcal{P}_n$ stupně nejvýše n, pokud

$$\inf_{q \in \mathcal{P}_n} \|f - q\| \qquad \left[\|f\| = \max_{t \in \langle a,b \rangle} |f(t)| \right] \qquad (16.114)$$

se realisuje právě pro $q = p$.

<u>Čebyševova věta.</u> Polynom nejlepší aproximace je právě jeden. Dále, je-li p polynomem nejlepší (n-té) aproximace funkce f, tak existují body $a < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < b$ takové, že čísla

$$\delta_i := f(a_i) - p(a_i) \qquad (16.115)$$

střídají znaménka pro $i = 1, \ldots, n$ a $\forall i \quad \delta_i = \|f - p\|$.

<u>Důležitý důsledek věty.</u> Nejlepší aproximací funkce

$$f(x) = x^n \qquad (16.116)$$

v prostoru $\mathcal{P}_{n-1}$ je právě ten polynom $q \in \mathcal{P}_{n-1}$, pro nějž je

$$x^n - q(x) \qquad (16.117)$$

odpovídajícím násobkem $T_n(x)$. Jinými slovy, mezi všemi polynomy n-tého stupně se stejnými koeficienty u x^n je právě (násobek) $T_n(x)$ nejlepší aproximací nulové funkce.

<u>Cvičení.</u> Pokuste se dokázat poslední důsledek, eventuálně i Čebyševovu větu.

Laguerrovy polynomy

Již jen telegraficky si řekneme o **Laguerrových polynomech**

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} \frac{n!}{i!} x^i, \tag{16.118}$$

které tvoří ortogonální basi [10]vůči skalárnímu součinu na intervalu tentokrát $(0, \infty)$ (činitel e^{-x} zajišťuje konvergenci)

$$\mathbf{b}(\vec{\mathbf{f}}, \vec{\mathbf{g}}) = \int_0^\infty e^{-x} f(x) \overline{g}(x) dx. \tag{16.119}$$

Tvar několika prvních je

$$\begin{array}{c} L_0 = 1, \quad L_1 = 1 - x, \quad L_2 = 2 - 4x + x^2, \\ L_3 = 6 - 18x + 9x^2 - x^3, \\ L_4 = 24 - 96x + 72x^2 - 16x^3 + x^4, \\ L_5 = 120 - 600x + 600x^2 - 200x^3 + 25x^4 - x^5 \end{array}, \tag{16.120}$$

dají se počítat podle rekurentního vzorce

$$L_{n+1} - (2n + 1 - x) L_n + n^2 L_{n-1} = 0 \tag{16.121}$$

a vytvořující funkce je

$$\frac{\exp[-xt/(1-t)]}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < 1. \tag{16.122}$$

Funkce L_n jsou vlastnímu číslu n příslušející vlastní funkce hermitovského operátoru

$$- x \frac{d^2}{dx^2} + (x - 1) \frac{d}{dx} \tag{16.123}$$

a jsou tedy ortogonální.

Pro každé $m = 0, 1, 2, \ldots$ lze získat jeden systém ortogonálních polynomů[11] $L^m_m, L^m_{m+1}, L^m_{m+2}, \ldots$, tzv. **přidružené Laguerrovy polynomy** (pro případ $m = 0$ dostáváme přímo původní Laguerrovy polynomy)

$$L^m_n = \frac{d^m}{dx^m} L_n(x) = (-1)^m n! \sum_{i=0}^{n-m} \begin{pmatrix} n \\ m+i \end{pmatrix} \frac{(-x)^i}{i!}, \tag{16.124}$$

[10] Pomocí nich se vyjadřují radiální části vlnových funkcí atomu vodíku.

[11] Aby systém byl $L^q_0, L^q_1, \ldots$, užívají někteří autoři jinou definici: $L^q_p = (-1)^q \frac{d^q}{dx^q} L_{p+q}(x)$.

mají vytvořující funkci

$$\frac{\exp[-xt/(1-t)]}{(-1)^m(1-t)^{m+1}} = \sum_{n=m}^{\infty} L_n^m(x)\frac{t^{n-m}}{n!} \tag{16.125}$$

a vztah ortogonality je

$$\mathbf{b}(L_n^m, L_{n'}^m) = \int_0^\infty x^m e^{-x} L_n^m(x) L_{n'}^m(x)dx = \frac{\delta_{nn'}(n!)^3}{(n-m)!}. \tag{16.126}$$

Funkce $L_n^m(x)$ jsou vlastnímu číslu $n-m$ příslušející charakteristické funkce operátoru

$$-x\frac{d^2}{dx^2} + (x-m-1)\frac{d}{dx}. \tag{16.127}$$

Zjistěte, kterak v tomto případě hodnota hranatých závorek zajistí hermitovost tohoto operátoru.

Na závěr se pokuste vytvořit další hermitovské operátory a skalární součiny, vedoucí k definicím dalších tříd ortogonálních polynomů. Možná dojdete k závěru, že uvedené příklady jsou opravdu těmi nejhezčími.

Také **Besselovy funkce** jsou vlastními funkcemi určitého operátoru a tvoří jisté ortogonální systémy funkcí, ortogonální však nikoli proto, že systém obsahuje vlastní funkce odpovídající různým vlastním číslům, ale naopak obsahuje funkce $J_n(\lambda x)$, čili různě (ve směru osy x) roztažené funkce příslušející jednomu vlastnímu číslu κ_n, a tak se vymykají zde diskutovanému tématu, stejně jako **hypergeometrické funkce** (resp. **Jacobiho polynomy**, které z nich získáme jen určitou transformací parametrů) a kterých jsou Legendreovy a Čebyševovy polynomy speciálním případem pro zvláštní volbu parametrů, a tak zájemce odkazujeme na četnou literaturu.

16.7 Diagonalisace konvolučního operátoru

Připomeňme na úvod pojem charakteru zavedený v odstavci duální grupa.

Nechť $\mathbb{G}$ je konečná Abelova grupa (mysleme třeba přímo na $\mathbb{Z}_p$). Vnořme $\mathbb{G}$ do **formálního lineárního obalu** nad $\mathbb{G}$, tzn. do $\mathbb{R}^{\mathbb{G}}$ (tento prostor dále značíme symbolem $\mathcal{L}(\mathbb{G})$ a jeho prvky jako $\{x_g \,|\, g \in \mathbb{G}\}$; samotné prvky $\mathbb{G}$ potom ztotožníme s $\{\delta_{ga} \,|\, a \in \mathbb{G}\}$). Zobrazení „translace“ („posunu“)

$$\{a \mapsto a-g\} : \mathbb{G} \to \mathbb{G} \tag{16.128}$$

lineárně prodloužíme předpisem

$$\{x_a \,|\, a \in \mathbb{G}\} \mapsto \{(T_g x)_a = x_{a-g} \,|\, a \in \mathbb{G}\} \tag{16.129}$$

na operátor T_g definovaný na celém $\mathcal{L}(\mathbb{G})$.

Definice. Libovolný operátor na $\mathcal{L}(\mathbb{G})$, který je lineární kombinací operátorů posunu, nazveme **konvolučním operátorem** (**konvolucí**). Je-li

$$f = \sum_{g \in \mathbb{G}} F(g) T_g, \tag{16.130}$$

nazveme funkci $\{F(g) \,|\, g \in \mathbb{G}\}$ **jádrem** konvoluce f.

Poznámka. Později budete v analýze zkoumat spojitou analogii tohoto pojmu na $\mathbb{G} = \mathbb{R}$. Tam bude analogicky konvolucí funkcí X a F funkce

$$(F * X)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t-s) X(s) ds \tag{16.131}$$

a tedy $X \mapsto F * X$ bude konvolučním operátorem s jádrem F na vhodném prostoru funkcí na $\mathbb{R}$ (přičemž samozřejmě vyvstanou ve srovnání s konečnou grupou $\mathbb{G}$ nové technické problémy spojené s otázkou, jaká jádra jsou přípustná, aby uvažovaný operátor měl rozumné vlastnosti).

Není těžké nahlédnout, že každý konvoluční operátor je normální (pokud nerozumíte, užijte rejstřík nebo ignorujte) (čemupak je asi rovna adjunkce k T_g!?), takže má smysl chtít ho diagonalisovat. Ve skutečnosti – v důsledku komutování všech translací – lze provést tuto diagonalisaci pro všechny konvoluční operátory najednou. Níže uvedenou větu jsme již jednou použili – při výpočtu cirkulantu:

Věta. Nechť T je konvoluční operátor s jádrem F. Potom je T diagonalisován v ortogonální basi všech charakterů $\mathbb{G}$ a platí

$$T(\varphi) = \widehat{F}(\varphi)\varphi \tag{16.132}$$

pro libovolný charakter φ, kde

$$\widehat{F}(\varphi) = \sum_{g \in \mathbb{G}} \varphi(g) F(g). \tag{16.133}$$

Poznámka. Tato věta je základem celého matematického oboru – tzv. **harmonické analýzy**. Viz teorii Fourierových řad a Fourierových transformací. Přinášíme několik důsledků:

Parsevalova rovnost. (N je počet prvků $\mathbb{G}$.)

$$\sum_{g\in\mathbb{G}} |F(g)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{\varphi\in\mathbb{G}'} \left|\widehat{F}(\varphi)\right|^2, \tag{16.134}$$

Stačí si uvědomit, že přechod od kanonické base k basi dané charaktery normalisovanými faktorem $1/\sqrt{N}$, je unitárním zobrazením.

Druhý důsledek. O užití následující rovnosti se ještě zmíníme v podkapitole o tensorech a nezávislých jevech. *(Je to pouhé skládání diagonálních matic.)*

$$\widehat{F_1 * F_2} = \widehat{F_1} \cdot \widehat{F_2} \tag{16.135}$$

Poznámka. Hezčí, vůči $\mathbb{G}$ a $\mathbb{G}'$ symetrickou variantu Parsevalovy rovnosti dostaneme v následující normalisaci. Ztotožníme $\mathbb{G}$ i $\mathbb{G}'$ s aditivní grupou čísel $\{k/\sqrt{N}, k = 0, 1, \dots N-1\}$. Pišme tedy charaktery $\mathbb{G}$ ve tvaru

$$\varphi_\xi(x) = \exp(2\pi i\xi x), \quad x = \frac{k}{\sqrt{N}}, \quad \xi = \frac{l}{\sqrt{N}}. \tag{16.136}$$

Pišme

$$\widehat{F}^{(T)}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x\in\mathbb{G}} \varphi_\xi(x) F(x). \tag{16.137}$$

Bereme-li skalární součiny

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(F,G) &= \tfrac{1}{\sqrt{N}} \textstyle\sum_{x\in\mathbb{G}} F(x)\overline{G(x)} \\ \mathbf{b}(\widehat{F},\widehat{G}) &= \tfrac{1}{\sqrt{N}} \textstyle\sum_{\xi\in\mathbb{G}'} \widehat{F}(\xi)\overline{\widehat{G}(\xi)}, \end{aligned} \tag{16.138}$$

(faktor $1/\sqrt{N}$ je tu proto, aby příslušná „rovnoměrná míra“ na $\mathbb{G}$ a $\mathbb{G}'$ s vahou každého bodu $1/\sqrt{N}$ přešla v limitě níže v míru Lebesgueovu) má Parsevalova rovnost tvar

$$\|F\| = \left\|\widehat{F}^{(T)}\right\|. \tag{16.139}$$

Pro $N \to \infty$ pak přecházíme k Fourierově transformaci, kde Parsevalova rovnost má tvar

$$\int_R |F(x)|^2\, dx = \int_R \left|\hat{F}(\xi)\right|^2 d\xi. \tag{16.140}$$

Jiná normalisace (prvky $\mathbb{G}'$ uvažujeme zde opět celočíselné)

$$\widehat{F}^{(\check{\mathrm{R}})}(\varphi) = \frac{1}{N} \sum_{g \in \mathbb{G}} \varphi(g) F(g) \tag{16.141}$$

vede k variantě

$$\frac{1}{N} \sum_{g \in \mathbb{G}} |F(g)|^2 = \sum_{\varphi \in \mathbb{G}'} \left| \widehat{F}^{(\check{\mathrm{R}})}(\varphi) \right|^2, \tag{16.142}$$

což je zase obvyklý a vhodný tvar pro přechod (při $N \to \infty$ a přeškálování G obdobně jako nahoře, ale faktorem $1/N$) k teorii Fourierových řad. Nalevo potom vznikne integrál přes $[0, 1]$.

Harmonická analýza je pěkným příkladem *postupné abstrakce* matematického oboru – který vznikl „zkoumáním kmitů“ (třeba strun hudebních nástrojů) a nachází mnohé aplikace třeba v elektrotechnice – a o němž je po 300 letech rozvoje s jistou nadsázkou také možno říci, že to je „pouze“ jistý speciální případ *diagonalisace* operátoru – totiž konvolučního operátoru – a to vůči basi dané všemi charaktery dané grupy. ($\heartsuit$)

Kapitola 17

Kvadratický svět

17.1 Bilineární a kvadratické formy

<u>Definice.</u> Zobrazení na kartézském součinu vektorových prostorů

$$F : \mathbb{V}_1 \times \mathbb{V}_2 \times \ldots \times \mathbb{V}_n \to \mathbb{R}/\mathbb{C} \tag{17.1}$$

nazveme **multilineárním** ($\equiv$lineární v každé proměnné), pokud platí

- $F(\vec{\mathbf{v}}_1 + \vec{\mathbf{v}}'_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n) = F(\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n) + F(\vec{\mathbf{v}}'_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n)$
- $F(\lambda\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n) = \lambda F(\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n)$
  (pokud je to rovno $\overline{\lambda} F(\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n)$, zobrazení je v dané proměnné **antilineární**)

a obdobné rovnosti pro ostatní proměnné. V této kapitole mluvíme o případu $n = 2$, proto ona předpona „bi“ v označení **bilineární** formy.

V případě $n = 2$ je ovšem nejdůležitějším příkladem **zobrazení duality**:

$$\{(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}') \mapsto w'(\vec{\mathbf{v}})\} : \mathbb{V} \times \mathbb{V}' \to \mathbb{R}/\mathbb{C}. \tag{17.2}$$

Z věty o representaci víme, že jakékoliv bilineární zobrazení z $\mathbb{V} \times \mathbb{V}'$ lze přenést na $\mathbb{V} \times \mathbb{V}$ vztahem

$$G(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}) := F(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{w}})). \tag{17.3}$$

Pak je ale zobrazení v druhé proměnné antilineární a nikoli lineární.

Abychom mohli mluviti např. i o skalárním součinu na komplexním prostoru jako o bilineární formě, učiňme úmluvu, že **bilineárním zobrazením** B budeme rozumět zobrazení $B : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}/\mathbb{C}$ lineární v prvé a antilineární v druhé proměnné. V čisté algebře (neovlivněné „přehnaným“ důrazem na hermitovské formy) se bilineární formou nazývá forma lineární v obou proměnných; to, co my jsme nazvali bilineární formou, se obvykle nazývá **sesquilinear form** apod. Ze sesquilineárních se přeorientujeme na skutečně bilineární formy v kapitole o tensorech.

<u>DEFINICE.</u> **Zúžení** neboli **restrikci** K_B

$$\{\vec{\mathbf{v}} \mapsto B(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{v}})\} : \mathbb{V} \to \mathbb{C} \tag{17.4}$$

nazveme **kvadratickou formou** odpovídající dané bilineární formě.

Nabízí se otázka, zda se touto restrikcí neztratí nějaká informace o původní (hermitovské, sesquilineární) bilineární formě B. Odpověď „neztratí“ dává následující[1]

<u>REKONSTRUKČNÍ VĚTA.</u>

$$B(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \frac{1}{4}\left(K_B(\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}}) - K_B(\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}) + iK_B(\vec{\mathbf{x}} + i\vec{\mathbf{y}}) - iK_B(\vec{\mathbf{x}} - i\vec{\mathbf{y}})\right) \tag{17.5}$$

Na reálném prostoru lze dokonce psát

$$B(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}) = \frac{1}{4}(K_B(\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}) - K_B(\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}})). \tag{17.6}$$

Identická věta byla uvedena už v kapitole o skalárním součinu, důkaz proveďte tímtéž roznásobením.

<u>DŮSLEDEK.</u> Pojmy „symetrická bilineární (nebo sesquilineární) forma“ a „kvadratická forma“ budeme dle libosti zaměňovat.

<u>DEFINICE.</u> Bilineární formu nazveme **hermitovskou** resp. **symetrickou**, pokud platí

$$\forall \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}} \in \mathbb{V} \qquad B(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}) = \overline{B(\vec{\mathbf{w}}, \vec{\mathbf{v}})} \,\text{resp.}\, B(\vec{\mathbf{w}}, \vec{\mathbf{v}}). \tag{17.7}$$

Vidíme, že pro reálné formy oba nové pojmy splývají.

[1] Mluvíme o „sesquilineárních“ formách.

Skalární součin teď lze chápat jako hermitovskou bilineární formu, která je navíc **positivní**:

$$\forall \vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{0}} \qquad B(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{v}}) > 0. \tag{17.8}$$

Pojem hermitovské (**samoadjungované**) kvadratické formy je tedy zobecněním pojmu skalárního součinu.

17.2 Matice kvadratické formy

<u>DEFINICE.</u> Nechť $\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n$ je nějaká base $\mathbb{V}$.

Matici[2] $\mathbf{A} = (a_{ij})$ s prvky $a_{ij} = B(\vec{\mathbf{v}}_i, \vec{\mathbf{v}}_j)$ nazveme **maticí dané bilineární formy** B.

<u>DVA VEKTORY.</u> Pokud v tomto prostoru máme dva vektory

$$\vec{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{v}}_i x^i, \quad \vec{\mathbf{y}} = \sum_{j=1}^{n} \vec{\mathbf{v}}_i y^i, \tag{17.9}$$

potom je

$$B(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sum_{i,j} B(\vec{\mathbf{v}}_i x^i, \vec{\mathbf{v}}_j y^j) = \sum_{i,j} x^i B(\vec{\mathbf{v}}_i, \vec{\mathbf{v}}_j) \overline{y}^j, \tag{17.10}$$

což lze přepsat do tvaru maticového součinu ($\mathbf{x}$ je sloupcová matice se souřadnicemi $\vec{\mathbf{x}}$ tak, jak se vektor obvykle píše)

$$B(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \mathbf{y}^* \mathbf{A}^T \mathbf{x} \quad \text{nebo} \quad \mathbf{x}^T \mathbf{A} \overline{\mathbf{y}}. \tag{17.11}$$

(Vše platí i v $\mathbb{R}^n$, kde lze vynechat pruhy a hvězdičku nahradit téčkem.)

Kvůli shodě s obvyklým značením v kvantové mechanice, kde se sdružuje levý činitel (bra-vektor),[3] budeme užívat prvého zápisu s transponovanou maticí $\mathbf{A}^T$. Vidíme, že hodnotu bilineární formy ve vektorech $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}$ lze nahlížet jako skalární součin

$$B(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = b(\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{x}}), \vec{\mathbf{y}}), \tag{17.12}$$

kde zobrazení f je dáno vzorcem

$$\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{x}}) = \mathbf{A}^T \vec{\mathbf{x}}. \tag{17.13}$$

[2] Fakt, že píšeme oba indexy dolů, je správně. I na pravé straně jsou oba dole.

[3] Úvodní poznámka o bracketech na straně 62.

(Bude-li řeč o bracket-zápisu, budeme mínit maticí formy matici transponovanou k té, o niž jsme mluvili, běžně budeme pracovat s ket-vektory, jejichž souřadnice budeme psát do sloupce, zatímco příslušné bra-vektory budou vektory duálního prostoru se souřadnicemi sdruženými proti odpovídajícím ket-vektorům a zapisovanými do řádky. Skalární součin budeme nadále psát

$$b(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \langle y|x\rangle = \mathbf{y}^*\mathbf{x}. \tag{17.14}$$

Naštěstí, alespoň v reálném případě je jedno, kam umístíme pruh.)

<u>VĚTA.</u> Nechť $\mathbf{A}$ resp. $\mathbf{A}'$ je maticí B vůči basi $\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n$ resp. $\vec{\mathbf{v}}'_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}'_n$. Nechť maticí přechodu od $\vec{\mathbf{v}}_i$ k $\vec{\mathbf{v}}'_i$ je matice $\mathbf{C}$:

$$\begin{pmatrix} \vec{\mathbf{v}}'_1, & \ldots, & \vec{\mathbf{v}}'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{v}}_1, & \ldots, & \vec{\mathbf{v}}_n \end{pmatrix} \mathbf{C}. \tag{17.15}$$

$$\text{PAK JE} \quad \mathbf{A}' = \mathbf{C}^T \mathbf{A} \overline{\mathbf{C}}. \tag{17.16}$$

Uvědomte si rozdíly proti změně matice zobrazení.

<u>DŮKAZ.</u> Tabulku $\mathbf{A} = (a_{ij})$ lze znázornit jako maticový součin

$$\text{sloupce} \quad \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{v}}_1 \\ \vdots \\ \vec{\mathbf{v}}_n \end{pmatrix} \quad \text{a řádku} \quad \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{v}}_1, & \ldots, & \vec{\mathbf{v}}_n \end{pmatrix}, \tag{17.17}$$

kde součinem prvků $\vec{\mathbf{v}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_j$ míníme $B(\vec{\mathbf{v}}_i, \vec{\mathbf{v}}_j) = a_{ij}$. Pišme vztah mezi basemi také transponovaně:

$$\begin{pmatrix} \vec{\mathbf{v}}'_1 \\ \vdots \\ \vec{\mathbf{v}}'_n \end{pmatrix} = \mathbf{C}^T \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{v}}_1 \\ \vdots \\ \vec{\mathbf{v}}_n \end{pmatrix} \tag{17.18}$$

a pronásobme sloupce a řádky. Dostaneme vztah

$$\begin{pmatrix} \vec{\mathbf{v}}'_1 \\ \vdots \\ \vec{\mathbf{v}}'_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{v}}'_1, & \ldots, & \vec{\mathbf{v}}'_n \end{pmatrix} = \mathbf{C}^T \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{v}}_1 \\ \vdots \\ \vec{\mathbf{v}}_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{v}}_1, & \ldots, & \vec{\mathbf{v}}_n \end{pmatrix} \mathbf{C} \tag{17.19}$$

$$\text{tedy vskutku} \quad \mathbf{A}' = \mathbf{C}^T \mathbf{A} \overline{\mathbf{C}}, \tag{17.20}$$

kde „·“ je násobení dané předpisem B a pruh u $\mathbf{C}$ vyjadřuje antilinearitu v druhém činiteli.

Ve složkách vypadá důkaz

$$a'_{ij} = B(\vec{\mathbf{v}}'_i, \vec{\mathbf{v}}'_j) = \sum_{k,l} B(\vec{\mathbf{v}}_k c^k{}_i, \vec{\mathbf{v}}_l c^l{}_j) = \sum_{k,l} c^k{}_i B(\vec{\mathbf{v}}_k, \vec{\mathbf{v}}_l) \overline{c}^l{}_j = \sum_{k,l} c_i^{T\,k} a_{kl} \overline{c}^l{}_j. \tag{17.21}$$

<u>PŘÍKLADY BILINEÁRNÍCH FOREM.</u> Z analýzy jsme zvyklí na linearisaci problémů (počítání s diferenciálem zkoumaných funkcí). Tam, kde linearisace dává nedostatečnou informaci, např.[4] v okolí extrému, nastupuje jemnější metoda: zkoumané funkce nahrazujeme jejich lineárně-kvadratickými aproximacemi, tj. Taylorovým rozvojem 2.řádu. (Pokud se první diferenciál anuluje, zbude jen kvadratická forma.)

Pro funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tak dostáváme kvadratické formy typu

$$B(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}}) = \sum_{ij} x^i a_{ij} x^j, \quad \vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n. \tag{17.22}$$

Analogicky, na prostorech funkcí můžeme takto dospět ke kvadratickým formám tvaru např.

$$B(f,g) = \int_a^b \left(\int_a^b J(s,t) f(s) \overline{g(t)} ds \right) dt, \tag{17.23}$$

kde J je nějaká funkce dvou proměnných („**jádro**“ dané bilineární formy).

Budiž poznamenáno, že skalární součin dostaneme pro

$$a_{ij} = \delta_{ij} \qquad \text{a} \qquad J(s,t) = \rho(s)\delta(s-t), \tag{17.24}$$

kde ρ je váha (např. 1 nebo e^{-x^2}) a $\delta(x)$ je **Diracova funkce**.

Jednoduché příklady kvadratických forem dostáváme, měříme-li (třeba euklidovsky) vzdálenosti na podprostorech $\mathbb{R}^n$, které nějak parametrisujeme, čímž vyjde kvadrát vzdálenosti bodu jako kvadratická forma rozdílu zmíněných parametrů. Tím jsme poukázali na přirozenost zadání vzdálenosti v $\mathbb{R}^m$ (kde $m \leq n$) pomocí vhodné kvadratické formy (s maticí obecně odlišnou od jednotkové) a můžeme zformulovat

<u>CVIČENÍ.</u> Spočtěte vzdálenost bodu od podprostoru $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{R}^m$ v metrice dané kvadratickou formou na $\mathbb{R}^m$ s maticí $\mathbf{A}$.

(Příklad: vzdálenost bodu od přímky v $\mathbb{R}^2$, kde vzdálenost měříme pomocí kvadratické formy s nějakou maticí $\mathbf{A}$.)

[4] Jiný příklad: pokud závislost síly pružiny na výchylce aproximujeme lineárně, musíme závislost energie aproximovat kvadraticky.

<u>PŘÍKLAD-TOEPLITZOVY FORMY.</u>[5] Mějme kvadratickou formu na $\mathbb{R}^n$, jejíž matice vůči kanonické basi má prvky invariantní vůči posunu v cyklické grupě $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, tzn. prvky a_{ji} závisí pouze na $j-i$ modulo n. (Třeba suma čtverců rozdílů sousedních souřadnic; 0 a $n-1$ jsou také sousedé.) Takovéto formě se říká **Toeplitzova** a příslušný representující operátor je ovšem konvoluční operátor (viz. str. 256); spektrální rozklad tam uvedený dává pak diagonalisaci uvažované kvadratické formy.)

<u>CVIČENÍ.</u> Charakterisujte případy, kdy konvoluční operátor je dokonce samoadjungovaný. (Odpověď: když má „symetrické jádro" tzn. když je representujícím operátorem Toeplitzovy formy; viz dále – formulujte podrobněji).

17.3 Diagonalisace kvadratické formy

<u>DEFINICE.</u> Řekneme, že bilineární forma má vůči dané basi **kanonický** čili **diagonální** tvar, pokud její matice vůči této basi je diagonální.

<u>PŘÍKLAD.</u> Uvažujme symetrickou formu $B(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}})$ danou v kanonické basi $\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2$ prostoru $\mathbb{R}^2$ předpisem

$$B(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{v}}) = x^2 - 2xy + 2y^2, \quad \vec{\mathbf{v}} = (x, y) = \vec{\mathbf{e}}_1 x + \vec{\mathbf{e}}_2 y, \tag{17.25}$$

$$\text{podrobněji} \qquad B(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{v}}') = xx' - xy' - yx' + 2yy'. \tag{17.26}$$

Forma B samozřejmě nemá vůči basi $\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2$ kanonický tvar;

$$\text{její matice je} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{17.27}$$

Napíšeme-li však $B(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{v}})$ ve tvaru

$$(x-y)^2 + y^2 = (x'')^2 + (y'')^2, \tag{17.28}$$

kde $x'' = x - y$ a $y'' = y$, znamená to, že uvedená forma má jednotkovou matici vůči basi $\vec{\mathbf{e}}''_1 = \vec{\mathbf{e}}_1$, $\vec{\mathbf{e}}''_2 = \vec{\mathbf{e}}_1 + \vec{\mathbf{e}}_2$, protože (ověřte)

$$B(\vec{\mathbf{e}}''_1, \vec{\mathbf{e}}''_1) = B(\vec{\mathbf{e}}''_2, \vec{\mathbf{e}}''_2) = 1, \qquad B(\vec{\mathbf{e}}''_1, \vec{\mathbf{e}}''_2) = B(\vec{\mathbf{e}}''_2, \vec{\mathbf{e}}''_1) = 0 \tag{17.29}$$

[5] Jsou důležité v teorii pravděpodobnosti při zkoumání stacionárních náhodných procesů, v modelech statistické fyziky a kvantové teorie pole i jinde.

a díky bilinearitě následně

$$B(\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{v}}) = (x'')^2 + (y'')^2 \quad \text{pro každý vektor} \quad \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{e}}_1'' x'' + \vec{\mathbf{e}}_2'' y''. \tag{17.30}$$

Formu jsme tak diagonalisovali vůči basi, která není ortonormální (ani ortogonální) v obvyklé euklidovské normě.

Representace hermitovské formy operátorem

VĚTA O REPRESENTACI BILINEÁRNÍ FORMY. Pro hermitovskou kvadratickou formu B na lineárním prostoru $\mathbb{V}$ se skalárním součinem b existuje jednoznačně určený hermitovský operátor $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ takový, že

$$B(\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{w}}) = \mathbf{b}(f(\vec{\mathbf{v}}),\vec{\mathbf{w}}) = \mathbf{b}(\vec{\mathbf{v}},f(\vec{\mathbf{w}})). \tag{17.31}$$

DŮKAZ. *Nechť B je libovolná bilineární forma. Representujme lineární formu*

$$\{\vec{\mathbf{v}} \mapsto B(\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{w}})\} : \mathbb{V} \to \mathbb{C} \tag{17.32}$$

vektorem $\vec{\mathbf{w}}^\circ$: $B(\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{w}}) = \mathbf{b}(\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{w}}^\circ) \quad \forall \vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{V}$.

Potom operátor $f(\vec{\mathbf{w}}) = \vec{\mathbf{w}}^\circ$ (ověřte lineárnost) *splňuje hledaný vztah*

$$B(\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{w}}) = \mathbf{b}(\vec{\mathbf{v}},f(\vec{\mathbf{w}})). \tag{17.33}$$

Dokázali jsme tedy obecnější tvrzení a hermitovost B potřebujeme jen proto, aby bylo

$$\mathbf{b}(\vec{\mathbf{v}},f(\vec{\mathbf{w}})) = B(\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{w}}) = \overline{B(\vec{\mathbf{w}},\vec{\mathbf{v}})} = \overline{\mathbf{b}(\vec{\mathbf{w}},f(\vec{\mathbf{v}}))} = \mathbf{b}(f(\vec{\mathbf{v}}),\vec{\mathbf{w}}). \tag{17.34}$$

Diagonalisace hermitovské formy

V nedávném příkladu jsme diagonalisovali vůči basi, která není ortogonální v obvyklé euklidovské normě. Hermitovská forma však může být vždy diagonalisována v ortonormální basi: najdeme vlastní vektory dané[6] matice (neboli matice representujícího operátoru), normujeme je (nestačí-li nám již ortogonální base), pokud některému vlastnímu číslu přísluší vícerozměrný

[6] Doporučujeme pracovat s maticí transponovanou proti původní definici, tedy $a_{ij} = B(\vec{\mathbf{v}}_j,\vec{\mathbf{v}}_i)$, neboli v kvantové konvenci (B je i nadále antilineární v druhé proměnné.)

prostor vlastních vektorů, tak jeho basi Gramm-Schmidtovsky ortogonalisujeme, a dojdeme ke kanonickému tvaru formy, protože vlastní vektory hermitovské matice příslušející různým vlastním číslům jsou (v obvyklém skalárním součinu) kolmé (o tomto nemůže být řeči v ostatních metodách, které uvedeme, v nichž nehraje „kanonický“ skalární součin žádnou roli):

VĚTA. Nechť $\mathbf{A}$ je hermitovská[7] matice. Pak existuje diagonální matice $\mathbf{D}$ a unitární matice $\mathbf{U}$ (jejíž sloupce tvoří souřadnice jednotlivých vlastních vektorů $\mathbf{A}$) taková, že

$$\mathbf{A} = \mathbf{UDU}^{-1} \qquad (\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^*). \tag{17.35}$$

(Pokud máte potíže se zapamatováním, že má-li $\mathbf{U}$ mít ve sloupcích vlastní vektory, pak musíme psát $\mathbf{U}$ nalevo od $\mathbf{D}$, navrhujeme vám např. tuto pomůcku: $\mathbf{AU} = \mathbf{UD}$, protože napíšeme-li na pravou stranu sloupec „jednička a zbytek nuly“, což je první vlastní vektor $\vec{\mathbf{v}}_1$ vyjádřený v basi vlastních vektorů, je $\mathbf{UD}\vec{\mathbf{v}}_1$ roven λ-násobku tohoto vektoru zapsaného ve staré basi, stejně jako $\mathbf{AU}\vec{\mathbf{v}}_1$.)

ZPĚT K PŘÍKLADU. Najdete-li vlastní čísla $(1/2(3 \pm \sqrt{5}))$ dané matice a odpovídající vlastní vektory $\vec{\mathbf{e}}_1''', \vec{\mathbf{e}}_2'''$, které normujete, budete moci kvadratickou formu psát ve tvaru

$$K_B(\vec{\mathbf{e}}_1'''x''' + \vec{\mathbf{e}}_2'''y''') = \frac{3-\sqrt{5}}{2}(x''')^2 + \frac{3+\sqrt{5}}{2}(y''')^2. \tag{17.36}$$

Metoda doplnění na čtverec

K jejímu vyložení od vás potřebujeme znát vzorec

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2. \tag{17.37}$$

Upravujeme výraz

$$\begin{gathered}\sum a_{ij}x^i x^j = a_{11}(x^1)^2 + 2a_{12}x^1x^2 + \ldots + 2a_{1n}x^1x^n + \textstyle\sum_{i,j>1} a_{ij}x^ix^j = \\ a_{11}(\tilde{x}^1)^2 + \sum \tilde{a}_{ij}x^ix^j = \ldots\end{gathered} \tag{17.38}$$

kde $\tilde{x}^1 = x^1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x^2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x^n$. Uplatníme-li stejný postup dále na řadu $\tilde{a}_{22}(x^2)^2, \ldots$ atd., dostaneme výraz

$$a_{11}(\tilde{x}^1)^2 + \tilde{a}_{22}(\tilde{x}^2)^2 + \ldots + \tilde{a}_{nn}(\tilde{x}^n)^2. \tag{17.39}$$

[7] Důležitý případ je reálný, kdy slova „hermitovská“, „unitární“ lze nahradit slovy „symetrická“, „ortogonální“.

Takovéto úpravy lze ovšem provést pouze za předpokladu $a_{11} \neq 0$, $\tilde{a}_{22} \neq 0$ atd. Pokud $\forall i\ a_{ii} = 0$ (jinak bychom začali upravovat vzhledem k libovolnému $a_{ii}(x^i)^2$ takovému, že $a_{ii} \neq 0$) a pokud je alespoň jeden prvek $a_{1i} \neq 0$ — třeba $a_{17} \neq 0$ (opačný případ $\forall i\ a_{1i} = 0$ je triviální, na souřadnici x^1 forma nazávisí, čili bude $\tilde{a}_{11} = 0$), provedeme následující substituci jako první krok úpravy ($\tilde{x}^{1,2}$ jsou $x^{1,2}$ rotované o 45°)

$$2a_{17}x^1x^7 = \frac{a_{17}}{2}\Big((x^1+x^7)^2 - (x^1-x^7)^2\Big) = a_{12}((\tilde{x}^1)^2 - (\tilde{x}^7)^2). \quad (17.40)$$

Tím převedeme zadanou kvadratickou formu na případ, kdy $a_{22} \neq 0 \neq a_{11}$, a dále pokračujeme způsobem uvedeným výše.

<u>Komentář k metodě a zobecnění.</u> Formu $f(\vec{\mathbf{x}}) = \sum a_{ij}x^ix^j$ pišme podrobněji jako

$$f(\vec{\mathbf{x}}) = a_{ij}\vec{\mathbf{e}}'^i(\vec{\mathbf{x}})\vec{\mathbf{e}}'^j(\vec{\mathbf{v}}), \quad (17.41)$$

kde $\{\vec{\mathbf{e}}'^i\}$ je duální base k basi $\vec{\mathbf{e}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{e}}_n$, vůči níž má vektor $\vec{\mathbf{x}}$ souřadnice x^i

$$\vec{\mathbf{x}} = \sum \vec{\mathbf{e}}_i x^i. \quad (17.42)$$

Přechod k nové souřadnici

$$\tilde{x}^1 = x^1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x^2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x^n \quad (17.43)$$

vlastně znamená změnu duální base: od $\vec{\mathbf{e}}'^1, \ldots, \vec{\mathbf{e}}'^n$ k nové

$$\tilde{\vec{\mathbf{e}}}'^1 = \vec{\mathbf{e}}^1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}\vec{\mathbf{e}}'^2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}\vec{\mathbf{e}}'^n. \quad (17.44)$$

Diagonalisovat formu metodou doplnění na čtverec znamená přejít v $(\mathbb{E}^n)'$ k takové basi $\tilde{\vec{\mathbf{e}}}'^1, \ldots, \vec{\mathbf{e}}'^n$, v níž má kvadratická forma tvar

$$f(\vec{\mathbf{v}}) = \sum_i \tilde{a}_{ii}\left(\vec{\mathbf{e}}'^i(\vec{\mathbf{v}})\right)^2. \quad (17.45)$$

Máte-li matici přechodu mezi duálními basemi, matici přechodu mezi původními basemi získáte jako k ní inversní (v našem pořadí zápisů) nebo chcete-li kontragradientní.

Z postupu je zřejmé, že zamezíme-li případu, kdy bylo např. $a_{11} = 0$ (tyto případy ošetřuje následující věta pomocí formulace o hlavních minorech), lze získat matici přechodu $\mathbf{C}^{-1}$ od vlnkované basi k nevlnkované (kde $\mathbf{C}$ je matice přechodu od nevlnkované k vlnkované) jako produkt (součin) matic typu

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \frac{a_{14}}{a_{11}} \\ \circ & 1 & \circ & \circ \\ \circ & \circ & 1 & \circ \\ \circ & \circ & \circ & 1 \end{pmatrix}, \tag{17.46}$$

bude tedy horní trojúhelníková (a tedy i matice $\mathbf{C}$, inversní matice k horní trojúhelníkové je horní trojúhelníková).

<u>VĚTA.</u> Pro každou symetrickou matici $\mathbf{A}$, která má nenulové všechny hlavní minory (tj. nenulové determinanty matic vzniklých z $\mathbf{A}$ výběrem prvních k řádek a sloupců), existuje horní trojúhelníková matice $\mathbf{C}$ taková, že matice

$$\mathbf{C}^T\mathbf{A}\mathbf{C} \tag{17.47}$$

je diagonální.

<u>ZOBECNĚNÍ METODY.</u> Přechod k nové souřadnici je možno popsat jako změnu matice formy

$$\mathbf{A} \mapsto \mathbf{C}^T\mathbf{A}\mathbf{C}. \tag{17.48}$$

V řeči řádkových a sloupcových úprav matice to znamená, že s každou řádkovou úpravou uděláme zároveň i odpovídající sloupcovou úpravu matice $\mathbf{A}$. Metodu doplnění na čtverec lze zobecnit tím, že tyto úpravy již nemusí být elementární. (Postup je výhodný, zajímáme-li se pouze o signaturu.)

Promyslete podrobně, co přesně znamená a jak lze případně zobecnit ono „najednou“. (Jde o asociativitu násobení matic.)

Jacobi-Sylvestrova metoda

Jedním z postupů, objevujících se v nejrůznějších situacích a znovu a vždy dávajících nějaký netriviální výsledek, je **Gramm-Schmidtův ortogonalisační proces**.

Tentokrát ho neaplikujeme vzhledem k běžnému skalárnímu součinu, ale obecněji vzhledem k zadané symetrické kvadratické formě B na reálném prostoru:

Označme symbolem $\mathbf{A}$ matici formy B vůči nějaké zvolené basi $\vec{\mathbf{e}}_1, \dots, \vec{\mathbf{e}}_n$:

$$a_{ij} = B(\vec{\mathbf{e}}_i, \vec{\mathbf{e}}_j). \tag{17.49}$$

Chceme tuto basi „ortogonalisovat vůči B“, tzn. nalézt novou basi

$$\vec{\mathbf{f}}_k = \sum_{i \leq k} \vec{\mathbf{e}}_i c^i{}_k, \tag{17.50}$$

aby $B(\vec{\mathbf{f}}_k, \vec{\mathbf{f}}_j) = 0 \ \forall j \neq k$ (tuto podmínku stačí nahradit podmínkou $\forall j < k$ a dokonce ji upravit na $\forall j < k \quad B(\vec{\mathbf{f}}_k, \vec{\mathbf{e}}_j) = 0$). „Cejch“ bude vhodné volit takto: $B(\vec{\mathbf{f}}_k, \vec{\mathbf{e}}_k) = 1$. Pak bude $c_{kk} = B(\vec{\mathbf{f}}_k, \vec{\mathbf{f}}_k)$. Najít c_{kj} pro $j < k$ znamená řešit soustavu rovnic typu

$$\sum_j B(\vec{\mathbf{e}}_i, \vec{\mathbf{e}}_j) c^j{}_k = 0 \quad \text{pro} \quad i < k \tag{17.51}$$

$$\sum_j B(\vec{\mathbf{e}}_i, \vec{\mathbf{e}}_j) c^j{}_k = 1 \quad \text{pro} \quad i = k, \tag{17.52}$$

tedy soustavu s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{k1} & \circ \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 1 \end{array} \right) \tag{17.53}$$

Podle Cramerova pravidla platí (dokažte a ověřte!)

$$c_{kk} = \frac{\det \mathbf{A}_{(k-1)}}{\det \mathbf{A}_{(k)}}, \tag{17.54}$$

kde $\det \mathbf{A}_{(k)}$ je k-tý hlavní minor $\mathbf{A}$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{k1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1k} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} \tag{17.55}$$

To vše platí za předpokladu, kterého se držíme i všude v tomto odstavci, že

$$\det \mathbf{A}_{(k)} \neq 0 \quad \forall k = 1, \ldots, n. \tag{17.56}$$

<u>Ukázka.</u> V prostoru $\mathbb{R}^3$ je zadána kvadratická forma maticí $\mathbf{A}$ vůči basi $\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3$ (protože je první, s kterou pracujeme, říkejme jí kanonická)

$$(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) \mapsto B(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \vec{\mathbf{y}}^T \mathbf{A} \vec{\mathbf{x}}, \tag{17.57}$$

kde $\vec{\mathbf{x}}$ značí sloupec a $\vec{\mathbf{x}}^T$ jeho transposici, čili řádku se stejnými čísly.

Nechť třeba

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 42 & 13 & -2 \\ 13 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}. \tag{17.58}$$

Najdeme basi $\vec{\mathbf{f}}_1, \vec{\mathbf{f}}_2, \vec{\mathbf{f}}_3$, v níž má forma diagonální matici, a položme

$$\vec{\mathbf{f}}_1 = \vec{\mathbf{e}}_1. \tag{17.59}$$

Všimneme si, že

$$B(\vec{\mathbf{f}}_1, \vec{\mathbf{f}}_1) = 42, \tag{17.60}$$

což bude první element (diagonální) matice formy v basi $\{\vec{\mathbf{f}}_i\}$. (Nebudeme používat cejch z texu, ale kalibraci $c_{jj} = 1$.) Dále najděme vektor $\vec{\mathbf{f}}_2$, který je (v metrice dané formou) kolmý na $\vec{\mathbf{f}}_1$, a to ve tvaru (vpravo)

$$\vec{\mathbf{f}}_2^T \mathbf{A} \vec{\mathbf{f}}_1 = 0, \quad \vec{\mathbf{f}}_2 = \vec{\mathbf{e}}_2 + k\vec{\mathbf{f}}_1. \tag{17.61}$$

Dosadíme-li pravý vzorec pro $\vec{\mathbf{f}}_2$ do požadované rovnosti, vyjde roznásobením

$$\vec{\mathbf{e}}_2^T \mathbf{A} \vec{\mathbf{f}}_1 = 13, \ldots \quad k = -\frac{13}{42}. \tag{17.62}$$

Opět si spočteme element diagonální matice (bilineární forma z $\vec{\mathbf{f}}_1$ a $\vec{\mathbf{f}}_2$ vymizí)

$$B(\vec{\mathbf{f}}_2, \vec{\mathbf{f}}_2) = \vec{\mathbf{e}}_2^T \mathbf{A} (\vec{\mathbf{e}}_2 - \frac{42}{13}\vec{\mathbf{f}}_1) = 2 - \frac{42}{13} \cdot 13 = -40. \tag{17.63}$$

Hledáme-li $\vec{\mathbf{f}}_3$ ve tvaru

$$\vec{\mathbf{f}}_3 = \vec{\mathbf{e}}_3 + m\vec{\mathbf{f}}_1 + n\vec{\mathbf{f}}_2, \tag{17.64}$$

dostaneme z podmínek

$$\vec{\mathbf{f}}_3^T \mathbf{A} \vec{\mathbf{f}}_1 = \vec{\mathbf{f}}_3^T \mathbf{A} \vec{\mathbf{f}}_2 = 0 \tag{17.65}$$

hodnoty m, n (v každé z rovnic je buď jen m nebo jen n).

Získali jsme tedy matici přechodu od kanonické basi k nové basi a (diagonální) tvar matice formy v basi $\{\vec{\mathbf{f}}_i\}$.

CVIČENÍ. I tato metoda je jen speciálním případem metody současných sloupcových a řádkových úprav. Dalo by se říci, že v protikladu k metodě doplnění na čtverec (diagonalisace zvnějšku) jde v Jacobi-Sylvesterově metodě o diagonalisaci matice „zevnitř“. Promyslete!

17.4 Signatura, definitnost

Nechť má kvadratická forma B ve vhodné basi diagonální matici, kde n_+ resp. n_- resp. n_0 prvků na diagonále je kladných resp. záporných resp. nulových.

Potom **signaturou** míníme uspořádanou trojici (n_+, n_-, n_0); někdy ji zapisujeme názorně jako

$$(\underbrace{+ + \ldots +}_{n_+}\underbrace{- - \ldots -}_{n_-}\underbrace{00\ldots 0}_{n_0}). \tag{17.66}$$

Formě navíc přisoudíme přívlastek **▲-definitní**, kde ▲ je vhodná předpona, vytvořená podle následujících pravidel:

- $n_+ n_- = n_0 = 0$ definitní (pokud $n_+ > 0$ tak positivně, pokud $n_- > 0$, negativně)
- $n_- = 0$ positivně semidefinitní
- $n_+ = 0$ negativně semidefinitní
- $n_+ n_- > 0$ indefinitní

Jacobi-Sylvesterova metoda vede nyní k následujícímu důsledku.

VĚTA. Nechť má matice kvadratické formy $\mathbf{A}$ všechny hlavní minory nenulové. Pak je signatura formy $(n - n_-, n_-, 0)$, kde n_- je počet změn znamének v posloupnosti

$$\det \mathbf{A}_{(1)}, \det \mathbf{A}_{(2)}, \ldots, \det \mathbf{A}_{(n)} \equiv \det \mathbf{A}. \tag{17.67}$$

Speciálně, $\mathbf{A}$ je positivně definitní právě tehdy, pokud jsou všechny hlavní minory kladné.

Ještě jsme nedokázali korektnost definice pojmu signatury, tj. nezávislost hodnot n_+, n_-, n_0 na volbě base. Pro reálné symetrické formy však toto tvrdí VĚTA O SETRVAČNOSTI.

JEJÍ DŮKAZ. *Mějme dvě base* $\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n$ a $\tilde{\vec{\mathbf{v}}}_1, \ldots, \tilde{\vec{\mathbf{v}}}_n$, *v nichž má daná forma* f *diagonální tvar daný maticí* $\mathbf{D} = \{d^i{}_i\}$ a $\tilde{\mathbf{D}} = \{\tilde{d}^i{}_i\}$. *Nechť jsou prvky basí uspořádány tak, že* $d^i{}_i \geq d^{i+1}_{i+1}$ a $\tilde{d}^i{}_i \geq \tilde{d}^{i+1}_{i+1}$.

Nechť i_0 je poslední index, pro který $d^{i_0}_{i_0} > 0$. Odvodíme spor z předpokladu, že $\tilde{d}^{i_0}_{i_0} \leq 0$. (Ostatní situace se vyřídí obdobně.) Vskutku, kdyby $\tilde{d}^{j}{}_{j} \leq 0$ počínaje od jistého indexy $j_0 < i_0$, provedli bychom tuto úvahu:

Podprostory $\mathcal{L}(\{\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_{i_0}\})$ a $\mathcal{L}(\{\tilde{\vec{\mathbf{v}}}_{j_0}, \ldots, \tilde{\vec{\mathbf{v}}}_n\})$ musí mít netriviální průnik (z důvodů dimense). Nechť je jím vektor $\vec{\mathbf{w}}$.

$$\vec{\mathbf{0}} \neq \vec{\mathbf{w}} = \sum_{i=1}^{i_0} \vec{\mathbf{v}}_i \lambda^i = \sum_{j=j_0}^{n} \tilde{\vec{\mathbf{v}}}_j \mu^j. \tag{17.68}$$

Potom ale

$$f(\vec{\mathbf{w}}) = \sum_i (\lambda^i)^2 d^i{}_i > 0 \tag{17.69}$$

a zároveň

$$f(\vec{\mathbf{w}}) = \sum_j (\mu^i)^2 \tilde{d}^j{}_j \leq 0. \tag{17.70}$$

To jsou paradoxy, že ano?

17.5 Kvadriky a kuželosečky

Uvedené téma je nejstarší částí lineární algebry (z dob Egyptu, Řecka, Babylonu atd.), jeho neznalost ulehčí rozhodování, zda zkoušející udělí známku „3“ či „vyšší“.

<u>Definice.</u> **Kvadratickou „plochou“** v $\mathbb{R}^n$ rozumíme množinu bodů splňujících rovnici

$$\{\vec{\mathbf{x}} : \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x^i x^j + \sum_{i=1}^{n} \beta_i x^i + \gamma = 0\}, \tag{17.71}$$

kde $\mathbf{A}$ (čti „velká alfa“) je reálná symetrická matice.

- Název „plocha“ je adekvátní pro námi nejvíce diskutovaný případ $n = 3$. V případě $n = 2$ jde o **křivku**, v dimensích $n > 3$ se někdy mluví také o **nadplochách** nebo **hyperplochách**.

- Levá strana není ovšem samotná kvadratická forma, obsahuje též lineární a absolutní člen. Zmíníme se o jedné význačné konstrukci, pomocí níž se stane „čistě kvadratickou“, totiž o **projektivním prostoru**.

Projektivní prostory

DEFINICE. Prostor $\mathbb{R}^4 \setminus \{\vec{\mathbf{0}}\}$ (pro konkrétnost) faktorisujeme podle ekvivalence „být násobkem" a dostaneme množinu tříd (jsou jimi „přímky")

$$\{\lambda\vec{\mathbf{x}} \,|\, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}, \tag{17.72}$$

kterou nazveme **projektivním prostorem** (v našem případě dimense tři, označení P_3).

Body P_3 tvaru $\{\lambda\vec{\mathbf{x}}\}$ pro $x^4 \neq 0$ můžeme ztotožnit s prvky $\mathbb{R}^3$:

$$\{\lambda\vec{\mathbf{x}}\} \mapsto (\frac{x^1}{x^4}, \frac{x^2}{x^4}, \frac{x^3}{x^4}). \tag{17.73}$$

Zbylé body P_3 tvaru $(\lambda x^1, \lambda x^2, \lambda x^3, 0)$ tvoří **nevlastní** prvky P_3, v $\mathbb{R}^3$ představitelné jako body „ležící" na přímkách $(\lambda x^1, \lambda x^2, \lambda x^3)$ v nekonečnu. (Každý směr přímek má jeden nevlastní bod, ležící na „obou stranách" v nekonečnu. Pak lze tedy mluvit o tom, že každé dvě přímky –i rovnoběžné– mají jeden průsečík.)

(Jinou, nelineární představou P_3 je sféra $\{\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^4 \,|\, \|\vec{\mathbf{x}}\| = 1\}$, ve které navíc ztotožníme protilehlé body $\vec{\mathbf{x}}$ a $-\vec{\mathbf{x}}$.)

V projektivním prostoru přejde ovšem rovnice kvadratické plochy (viz výše) na rovnici bez lineárního a absolutního členu tvaru (náš případ $n = 3$)

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x^i x^j + \sum_{i=1}^{n} \beta_i x^i x^{n+1} + \gamma x^{n+1} x^{n+1} = 0, \tag{17.74}$$

což lze napsat zavedením $\alpha_{n+1,i} = \alpha_{i,n+1} = \beta_i/2$, $\alpha_{n+1,n+1} = \gamma$ jako

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} \alpha_{ij} x^i x^j = 0. \tag{17.75}$$

Projektivní geometrie (studium vlastností projektivních prostorů) byla vždy důležitou součástí lineární algebry. Vznikla v 19.století[8] v pracech zejména německých geometrů (Möbius, Steiner, Plücker, Klein) a jejich francouzských předchůdců z 17. a 18.století (Pascal, Desargues, Monge, Poncelet – „promítání"). V polovině dvacátého století postupně převládl názor, že jde víceméně o uzavřenou oblast matematiky s ukončeným vývojem. Tento

[8] V zájmu čtenářů ve 21.století jsme nepoužili výraz „minulé století".

náhled (s patřičným zpožděním několika desetiletí) také způsobil postupné vymizení projektivní geometrie z učebních plánů. Teprve v posledních asi dvaceti letech (před psaním těchto skript) přišla projektivní geometrie opět „do módy" u mnohých teoretických fysiků a matematiků (Roger Penrose, Yuri Manin, Semion Gindikin...).

VSUVKA O PROMÍTÁNÍ. Prosvěcujme bodovým zdrojem umístěným v počátku souřadnic nějakou rovinu $\rho \subseteq \mathbb{R}^3$ a zkoumejme polohu „stínů" objektů z ρ vržených na jinou, ne nutně rovnoběžnou rovinu ρ'. Na rovinách ρ, ρ' zaveďme **repér**, čili počátek $\vec{P}$ resp. $\vec{P}'$ a vektory base $\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ resp. $\vec{\mathbf{v}}', \vec{\mathbf{w}}'$. Podmínku pro to, aby body $\vec{B}$ resp. $\vec{B}'$ z ρ resp. ρ'

$$\vec{B} = \vec{P} + s\vec{\mathbf{v}} + t\vec{\mathbf{w}}, \quad \vec{B}' = \vec{P}' + s'\vec{\mathbf{v}}' + t'\vec{\mathbf{w}}' \tag{17.76}$$

ležely na přímce se zdrojem světla, zapíšeme jako nulovost vektorového součinu $\vec{B} \times \vec{B}'$, což je soustava tří rovnic (vektor má tři složky) pro neznámé s', t'. Podle Cramerova pravidla napíšeme řešení jako

$$s' = \frac{\alpha' s + \beta' t + \gamma'}{\alpha s + \beta t + \gamma}, t' = \frac{\alpha'' s + \beta'' t + \gamma''}{\alpha s + \beta t + \gamma} \quad (*) \tag{17.77}$$

s devíti konstantami $\alpha, \dots$ (jmenovatele jsou stejné, jde o determinant soustavy).

Vnoříme nyní prostor $\mathbb{R}^2 = \{(s,t)\}$ do projektivního prostoru

$$\mathbb{P}^2 = \{(t_1, t_2, t_3)\}, \tag{17.78}$$

v němž libovolné dvě trojice tvaru (t_1, t_2, t_3) a (ct_1, ct_2, ct_3) ztotožníme (pro $c \neq 0$). Body (s,t) odpovídají přímce (cs, ct, c). Promítání $\{\vec{B} \mapsto \vec{B}'\} : \rho \to \rho'$, které má v parametrickém popisu tvar $(*)$, tedy zobrazení

$$\{(s,t) \mapsto (s', t')\} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \tag{17.79}$$

je nyní možno rozšířit na lineární zobrazení

$$\{(t_1, t_2, t_3) \mapsto (t_1', t_2', t_3')\} : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2 \tag{17.80}$$

na projektivním prostoru $\mathbb{P}^2$ předpisem

$$\begin{pmatrix} t_1' = \alpha' t_1 + \beta' t_2 + \gamma' t_3 \\ t_2' = \alpha'' t_1 + \beta'' t_2 + \gamma'' t_3 \\ t_3' = \alpha t_1 + \beta t_2 + \gamma t_3 \end{pmatrix}. \tag{17.81}$$

Můžete si promyslet, že nevlastní body ρ se zobrazí na nevlastní body ρ' právě když jsou rovnoběžné.

SHRNUTÍ. Pojem projektivního prostoru nám umožňuje chápat teorii **projektivních zobrazení** (daných lineárními lomenými funkcemi) jako součást LA!

K dalšímu elementárnímu výkladu už jen poznamenáme, že „správný kontext“, ve kterém by se níže uvedený materiál měl zkoumat, je právě teorie projektivních prostorů.

VĚTA. Vhodnou změnou (je možná i ortogonální) base lze lineárně-kvadratickou funkci

$$f(\vec{\mathbf{x}}) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} x^i x^j + \sum_i \beta_i x^i + \gamma \tag{17.82}$$

převést na tvar[9] (x'^i označuje souřadnice vektoru v nové, čarkované basi)

$$f(\vec{\mathbf{x}}') = \sum_i \lambda_i (x'^i)^2 + \sum_i \mu_i x'^i + \nu. \tag{17.83}$$

Dále, posunem souřadnice

$$z^i = x'^i + a^i \tag{17.84}$$

lze docílit tvaru

$$f(\vec{\mathbf{z}}) = \sum_i \lambda'_i (z^i)^{1/2} + \nu', \tag{17.85}$$

kde exponent je jedna u těch z^i, kde $\lambda_i = 0$, u ostatních dva.

POZNÁMKA PŘED DŮKAZEM. Posun souřadnic není lineárním zobrazením (nejsme v prostoru funkcí na $\mathbb{R}^n$, ale v $\mathbb{R}^n$). Opět uvádíme (viz začátek kapitoly o maticích) fakt, že v projektivním prostoru posun je lineárním zobrazením:

$$(x^i) \mapsto (x^i + a^i),\ i = 1,2,3 \quad \text{nahradíme} \quad (x^i, x^4) \mapsto (x^i + a^i x^4, x^4). \tag{17.86}$$

DŮKAZ VĚTY JSME JIŽ PROVEDLI.

TERMINOLOGIE. Plochu danou některou z rovnic v poslední větě nazveme **kuželosečkou** pro $n = 2$ a **kvadrikou** pro $n = 3$, obecněji i pro $n > 3$.

CVIČENÍ.

[9] Nedivte se, že u diagonalisované matice už neplatí „zákon zachování indexů“.

1. Odůvodněte název kuželo-sečka tím, že ukážete, že lze získat jako průnik vhodné roviny v $\mathbb{R}^3$ $(x^3 = f(x^1, x^2))$ a **kužele**

$$(x^3)^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 \tag{17.87}$$

   a naopak, že průnik kužele a roviny je křivka dané rovnice.

2. Obdobně nalezněte pro každou kvadriku nadrovinu v $\mathbb{R}^4$ (parametrisovanou parametry x^1, x^2, x^3) takovou, že uvažovaná kvadrika je průnik zmíněné nadroviny a hyperkužele

$$(x^4)^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2. \tag{17.88}$$

Klasifikace kuželoseček a kvadrik

ELIPSOID. Je-li kvadratická forma v rovnici plochy (positivně nebo negativně) definitní, mluvíme o **elipsoidu** resp. o **elipse** (pokud $n = 2$).

Elipsoid nazveme **koulí**, pokud má kvadratická forma matici, která je násobkem jednotkové, v každé ($\Leftrightarrow$ v nějaké) ortonormální basi. (Nepožadujeme-li ortonormalitu base, lze vždy elipsoid vyjádřit jako kouli.) Průnik elipsoidu s libovolnou (nad)rovinou typu

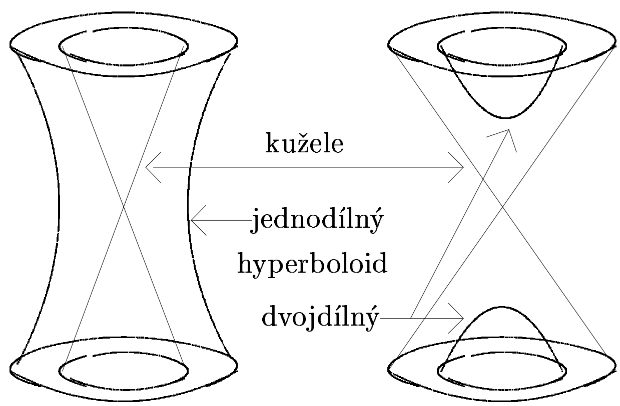
$$\{\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} a_i x^i = \gamma\} \tag{17.89}$$

je opět elipsoid.

Elipsoid má tedy ve vhodných souřadnicích rovnici

$$\sum_i \lambda_i (x^i)^2 = \text{const}, \qquad \forall i \quad \lambda_i > 0 \tag{17.90}$$

a redukuje se na bod, je-li konstanta nulová, a na prázdnou množinu, je-li záporná (tzv.**imaginární elipsoid**).



HYPERBOLOID. Složitější situace nastane, pokud bude signatura tvaru $(n_+, n_-, 0)$, kde $n_+ n_- \neq 0$. **Hyperboloid**, jak kvadrice říkáme (resp. pro $n = 2$ **hyperbola**) má tedy rovnici, ve vhodných souřadnicích

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i (x^i)^2 - \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i (x^i)^2 = \text{const} \qquad \forall i \quad \lambda_i > 0 \tag{17.91}$$

a v nekonečnu ho lze aproximovat **asymptotickou plochou** – kuželem

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i (x^i)^2 - \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i (x^i)^2 = 0. \tag{17.92}$$

V případě, že jedno λ_i má jiné znaménko než všechny ostatní (což je vždy pro $n = 3$), určuje znaménko tohoto λ_i a konstanty napravo, zda hyperboloid leží uvnitř kužele (shodná znaménka) či naopak.

V $n = 3$ jde v prvém případě o **dvojdílný** hyperboloid s rovnicí typu

$$z^2 - x^2 - y^2 = 1 \tag{17.93}$$

a ve druhém případě o **jednodílný** hyperboloid s rovnicí

$$z^2 - x^2 - y^2 = -1. \tag{17.94}$$

Která rovnice patří kterému, si lehce uvědomíte, představíte-li si z jako funkci x, y: v případě dvojdílného lze spočítat z pro všechna x, y jako $\pm\sqrt{1 + x^2 + y^2}$ (u jednodílného může dojít k odmocňování záporného čísla).

PARABOLOID. Pokud je v rovnici kvadrát nějaké souřadnice s nulovým koeficientem a přitom její první mocnina s nenulovým a rovnice závisí na všech souřadnicích, dostáváme **paraboloid** (resp. **parabolu** pro $n = 2$). (Vždy, když v rovnici zbude nějaký lineární člen, lze vhodným posunem souřadnic vynulovat člen absolutní.)

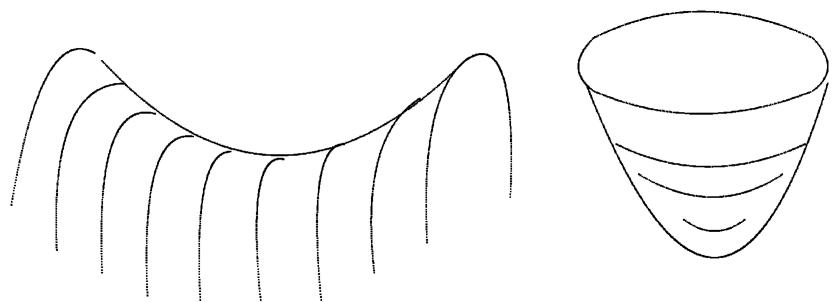
Parabola má rovnici typu $y = x^2$ a v trojrozměrném prostoru existuje **eliptický** paraboloid (tvaru parabolického zrcátka, které odráží paprsky jdoucí z ohniska do rovnoběžných směrů) o rovnici typu

$$z = x^2 + y^2 \tag{17.95}$$

a hyperbolický paraboloid (tvaru sedla, ať na koni nebo na horách) s rovnicí typu

$$z = x^2 - y^2. \tag{17.96}$$

Rozumná funkce z, která má minimum v bodě $(0,0)$, se v přiblížení lineárně kvadratickém chová právě jako eliptický paraboloid.



Paraboloid hyperbolický a eliptický.

VÁLEC. Pokud se v rovnici nějaká souřadnice vůbec nevyskytuje, získáme útvar, který vznikne přímočarým posouváním méněrozměrného útvaru, a mluvíme o **eliptickém**, **hyperbolickém válci** atd.

PŘÍMKOVÉ PLOCHY. Jednodílný hyperboloid a hyperbolický paraboloid jsou **přímkové plochy**, protože každým jejich bodem lze proložit přímku (v případě těchto dvou vždy dvě), která celá leží na dané kvadrice.

Dokonce si můžete vymodelovat jednodílný hyperboloid tak, že do kruhové obroučky zapícháte špejle a na jejich druhé konce symetricky umístíte další kruhovou obroučku tak, abyste dostali válec. Potom stačí jen kroužky vzájemně pootočit.

Důkaz. *Otočením souřadnic o* $45°$

$$x' = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \quad y' = \frac{x-y}{\sqrt{2}} \tag{17.97}$$

přepíšeme rovnici hyperbolického paraboloidu na tvar (tentokrát výhodnější)

$$z = 2x'y'. \tag{17.98}$$

Každý bod této kvadriky je určen čísly (x', y') *a dvě přímky procházející tímto bodem získáme předpisem* x' *=const. resp.* y' *=const. (pak* z *závisí lineárně na* y' *resp.* x'*).*

U jednodílného hyperboloidu najdeme přímky procházející bodem $(0, 1, 0)$ *(každá zapsaná jako průnik dvou rovin)*

$$y = 1, \quad z = x \quad \text{a} \quad y = 1, \quad z = -x. \tag{17.99}$$

Protože každá z těchto přímek prochází nějakým bodem kvadriky s danou souřadnicí z*, stačí ji otočit kolem osy* z *o určitý úhel, aby procházela zvoleným bodem (díky invarianci hyperboloidu vůči rotaci kolem osy* z*).*

(Protože uvedené přímky v bodě $(0, 1, 0)$ *nelze získat jednu z druhé rotací kolem osy* z *–poněvadž v rovině* $z = 0$ *se protínají, což by se rotací narušilo– budou procházet* každým *bodem dvě přímky.)*

Hlavní osy kvadrik

Máme-li kvadriku typu

$$\mathbf{b}(\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}}) + \mathbf{b}(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\xi}) + c = 0, \tag{17.100}$$

kde $\mathbf{A}$ je symetrická matice, $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{b}(\vec{.}, \vec{.})$ je obvyklý skalární součin z $\mathbb{E}^n$, nazýváme vlastní vektory $\mathbf{A}$ též **hlavními osami** uvažované kvadriky. (Tento pojem se používá hlavně pro elipsoidy, případně hyperboloidy.)

Poznamenejme, že nejkratší vlastní (polo)osa elipsoidu

$$\{\vec{\mathbf{x}} \mid \sum_{ij} a_{ij} x^i x^j = \text{const}\} \tag{17.101}$$

odpovídá vlastnímu vektoru příslušejícímu největšímu vlastnímu číslu $\mathbf{A}$.

17.6 Vlnky a kódování obrazu

Malý úvod do teorie "Image Processing"

Uvedeme zde jeden speciální příklad diagonalisace kvadratické formy („Toeplitzova typu"; tedy formy invariantní vůči nějaké grupě posunů na daném lineárním prostoru funkcí na intervalu $[0,1]$). Jde vlastně o převedení na diagonální tvar symetrické matice typu „cirkulant", kde prvky matice $a_{i,j}$ závisí pouze na $|i-j|$.

Jako mnoho jiných věcí, níže uvedená problematika původně nevznikla v lůně LA, nýbrž jinde v matematice, fyzice či technice (konkrétně v teorii zpracovávání a kódování obrazu, při studiu tzv. renormalisační grupy ve fysice, v otázkách aproximace funkcí v matematické analýze...).

Jde však koneckonců jen o ortogonalisaci jistého speciálního souboru vektorů, jak uvidíme.

Samozřejmě, níže uvedené řádky mají sloužit jen jako první letmé seznámení s oborem, který se zvláště v posledních letech bouřlivě rozvíjel a nalezl četné důležité aplikace v problematice optimálního kódování a zpracování obrazové informace. (Zájemce odkazujeme na velmi bohatou časopiseckou a poslední dobou i knižní literaturu; hledej pod heslem "waveletts").

Úvodní a motivační poznámky.

1. „Obrazem" rozumějme v dalším reálnou funkci $f(x,y)$ definovanou třeba na čtverci $[0,1]^2$. Hodnotu funkce $f(x,y)$ interpretujme jako „stupeň šedi" daného obrázku v bodě $(x,y) \in [0,1]^2$.

Mluvíme tedy o černobílém obrazu. (Barevný obraz lze pak representovat třemi monochromatickými obrazy.) Stupněm šedi míníme – mluvme třeba o diapositivu – veličinu typu „logaritmus koeficientu zeslabení procházejícího světla v daném bodě". Jednotlivé obrazy lze takto sčítat („překládat přes sebe"; koeficienty zeslabení světla se pak vzájemně násobí!), násobit konstantou („zvýšit či snížit kontrast"), odčítat ... (Abychom dostali lineární prostor, což se bude hodit. Uvažujeme tedy dále i funkce s nekladnými hodnotami, aniž bychom je chtěli nějak interpretovat jako „zesilovače" světla.)

2. My se zde ale pro jednoduchost omezíme (matematické jádro teorie přitom zůstane nezměněno!) na jednorozměrné „obrazy" tzn. funkce na intervalu $[0,1]$.

Mluvit zde ale o „zvuku" by asi nebylo nejvhodnější. V souvislosti se zpracováním (nedigitálním) zvuku vyrostla totiž právě klasická Fourierova analýza – která je založena na myšlence rozkladu „zvukového signálu" do harmonických složek (sinů a kosinů). To je právě to, o co v teorii vlnek *nejde*. Teorie vlnek je naopak náhradou za klasickou Fourierovu analýzu v těch (četných) situacích, kde by použití metody rozkladu do harmonických složek nedávalo rozumné výsledky .

(Na druhé straně je aparát Fourierovy transformace jednou z nejdůležitějších důkazových technik při důkladnějším budování teorie vlnek. Takhle daleko se my ale nedostaneme, i když metody Fourierovy transformace rudimentárně používáme též – viz partie o cirkulantu a konvolučních operátorech.)

Rastrované obrázky a ortogonální projekce

($\sharp$) Připomeňme prostory funkcí $\mathcal{K}, \mathcal{L}, \mathcal{Q}$ zkonstruované v první části knihy v odstavci věnovaném funkcím typu "spline". V dalším budeme dělením intervalu $[0,1]$ rozumět vždy dělení speciálního typu:

$$x_i = \frac{i}{n}; \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{17.102}$$

a navíc budeme obvykle předpokládat speciální volbu čísla n totiž $n = 2^k$; $k = 1, 2, \ldots$ Příslušné dělení intervalu na 2^k částí budeme označovat v dalším symbolem $\mathcal{D}^k$ a odpovídající prostory funkcí $\mathcal{K}, \mathcal{L}, \mathcal{Q}$ budou mít též navíc index k .

Všimněme si jedné velmi důležité vlastnosti uvedených prostorů funkcí. Ať už $\mathcal{F}^k$ označuje kterýkoliv z těchto tří prostorů, platí vždy vztah

$$\mathcal{F}^k \subset \mathcal{F}^{k+1}. \tag{17.103}$$

Skalární součin na všech těchto prostorech budeme brát obvyklým způsobem:

$$b(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx \tag{17.104}$$

(popřípadě s komplexním sdružením u g, bude-li řeč o prostorech komplexních funkcí).

Označme symbolem $\mathcal{G}^{k+1}$ *ortogonální doplněk* prostoru $\mathcal{F}^k$ v $\mathcal{F}^{k+1}$. Můžeme pak napsat následující ortogonální rozklad $\mathcal{F}^{k+1}$ na ortogonální podprostory:

$$\mathcal{F}^{k+1} = \mathcal{F}^k \oplus \mathcal{G}^{k+1} = \mathcal{F}^1 \oplus \mathcal{G}^2 \oplus \mathcal{G}^3 \oplus \ldots \oplus \mathcal{G}^{k+1}. \tag{17.105}$$

Označme P_i, podrobněji P_i^{k+1}, ortogonální projekci z $\mathcal{F}^{k+1}$ na $\mathcal{F}_i$. Dále označme symbolem Q_i ortogonální projekci na $\mathcal{G}_{i+1}$. Můžeme pak pro každou funkci $f \in \mathcal{F}^{k+1}$ a pro každé $j < k+1$ (třeba pro $j = 1$) napsat rozklad

$$f = P_j(f) + \sum_{i=j+1}^{k+1} f_i \tag{17.106}$$

speciálně

$$f = f_1 + \sum_{i=2}^{k+1} f_i \tag{17.107}$$

kde $f_i = Q_i(f)$ resp. $f_1 = P_1(f)$.

Interpretujme tento rozklad pro případ $\mathcal{F} = \mathcal{K}$ – tedy pro případ aproximace f *po částech konstantními funkcemi*: Funkce

$$P_j(f) = \sum_1^j f_i \in \mathcal{F}_j \tag{17.108}$$

má význam „j-tého rastru obrázku f“ tzn. je to ta funkce z $\mathcal{F}_j$, jejíž hodnota v libovolném intervalu zvoleného dělení $\mathcal{D}_j$ je rovna průměrné hodnotě (průměrné „šedi“) funkce f . Funkce f_{j+1} dodává pak jakousi dodatečnou informaci, kterou je třeba k obrázku $P_j(f)$ „přiložit“, abychom dostali jemnější, $(j+1)$-ní rastr funkce f.

Jak nyní „skladovat“ informaci obsaženou ve funkcích f_i? Nejlépe zvolením vhodné *base* každého z prostorů $\mathcal{G}_{k+1}$. (A zapsáním souřadnic f_i vůči těmto basím).

Jde tedy o vhodné volby basí v těchto prostorech.

Ortogonální base invariantní vůči posunu

V dalším budeme hledat ortogonální base zmíněných prostorů.[10] V případě prostorů $\mathcal{K}_k$ je odpověď vcelku nasnadě. Basi volíme z (vhodně normalisovaných) funkcí tvaru

$$\chi_{[\frac{i}{2^k},\frac{i+1}{2^k})} - \chi_{[\frac{i+1}{2^k},\frac{i+2}{2^k})}. \tag{17.109}$$

K tomu ještě musíme přidat – jako první prvek base – funkci identicky rovnou jedné na celém intervalu $[0,1]$.

[10] Na otázku, proč jsou právě *ortogonální* base tak žádoucí v numerických aplikacích, je zřejmá odpověď: V jaké jiné basi jste schopni spočítat souřadnice libovolného vektoru tak snadno?

Jde o tzv. *Haarovy* funkce. Všimněme si následující význačné vlastnosti těchto funkcí: *Všechny* tyto funkce (kromě první) jsou vhodným posunem a dilatací *jediné* funkce $\chi(x) = -\mathrm{sgn}(2x-1)$.

(Takováto vlastnost bude jistě milá při snaze o úsporné skladování prvků dané base v paměti, při programování i při samotném výpočtu souřadnic funkcí f_i!)

Funkce, jejichž vhodné posuny a dilatace tvoří (zhruba řečeno) ortogonální basi uvažovaného prostoru funkcí, nesou název „vlnky“ (waveletts, ondeletts, ...) Obsahem teorie „vlnek“ je v prvé řadě konstrukce takovéto base (s „co nejlepšími vlastnostmi“, jako je hladkost, lokalisace apod.) – v nejrůznějších prostorech, které se mohou vyskytnout v aplikacích.

Proč se nespokojíme jenom s Haarovou basí ? Protože třeba v úlohách aproximace „hladkých“ funkcí je vhodnější hledat (co nejpřesnější) aproximace dané funkce nikoliv v prostoru $\mathcal{K}$, ale v prostorech $\mathcal{L}$, $\mathcal{Q}$ popřípadě v dalších prostorech hladkých funkcí.

Konstrukce vlnky začíná obvykle zadáním nějaké „přirozené“ (obvykle zatím neortogonální) base v prostorech $\mathcal{F}_i$, zadané pomocí posunu *jediné* funkce (at už je to funkce typu Stolová hora či Milešovka, Říp, ... – viz odstavec věnovaný spline funkcím v první části knihy).

Prvním úkolem bude tuto basi ortogonalisovat při zachování invariance vzhledem k posunům:

<u>VĚTA 1.</u> Nechť $\mathbb{V}$ je lineární prostor funkcí na grupě $[0,1)$ (s obvyklým skalárním součinem $\int_0^1 f(x)g(x)dx$) generovaný všemi posuny, o hodnoty $\frac{i}{n}$; $i = 0, 1, \ldots, n-1$ nějaké funkce ϕ. Nechť dimense $\mathbb{V}$ je n . Pak existuje funkce $\psi \in \mathbb{V}$ taková, že její posuny o hodnoty $\frac{i}{n}$; $i = 0, 1, 2 \ldots, n-1$ tvoří *ortogonální basi* $\mathbb{V}$.

<u>DŮKAZ.</u> *Napišme si matici vzájemných skalárních součinů jednotlivých posunů funkce ϕ. Úkolem není nic jiného než diagonalisovat kvadratickou formu s uvedenou maticí v nové basi, invariantní vůči všem posunům o hodnoty $\frac{i}{n}$; $i = 1, 2, \ldots, n$. Označíme-li výše zmíněnou (positivně definitní,* odůvodněte!*) matici jako* $\mathbf{A}$ *(je to matice typu „cirkulant“ a navíc symetrická!), je třeba najít jinou matici* $\mathbf{B}$ *typu „cirkulant“, aby matice*

$$\mathbf{B}^*\mathbf{A}\mathbf{B} \tag{17.110}$$

byla jednotková ! Tedy v podstatě (chceme-li dokonce $\mathbf{B}$ *hermitovskou) najít odmocninu z matice* $\mathbf{A}^{-1}$ *– což je problém, který „řeší“ věta o spektrálním rozkladu.*

Numerické nalezení $\mathbf{B}$ může být však (pro velká n, která vystupují pro dostatečně „jemné“ volby prostorů $\mathcal{F}_k$; $n = 2^k$) značně netriviální problém.

Navíc bychom rádi něco věděli o chování koeficientů a_i ve vyjádření (jehož existence je právě Větou 1 garantována!)

$$\psi(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i \phi(x + \frac{i}{n}). \tag{17.111}$$

Velmi žádoucí by byla např. vlastnost „rychlého ubývání“ koeficientů a_i (třeba ubývání rychlejší než vhodná geometrická posloupnost s kvocientem menším než 1).

($\sharp\sharp$) Řešení všech těchto netriviálních otázek záleží na volbě prostoru $\mathbb{V}$. Například pro prostory typu $\mathcal{L}$ má matice $\mathbf{A}$ tvar $\mathbf{A} = \mathbf{1} + \mathbf{Q}$ kde přitom $\mathbf{Q}$ má nenulové (a malé, bereme-li normu ϕ rovnu jedné) prvky pouze těsně vedle diagonály. (Spočtěte je; tedy spočtěte skalární součiny dvou funkcí typu Milešovka.) Pak má smysl hledat odmocninu z matice nikoliv pomocí spektrálního rozkladu (což může být prakticky neproveditelné!) ale pomocí Taylorova rozvoje, tzn. ze vzorce

$$\sqrt{A^{-1}} = \sum_k \frac{(-1)^k \cdot (k + \frac{1}{2})(k - \frac{1}{2})(k - \frac{3}{2}) \ldots \frac{1}{2}}{k!} \cdot Q^k. \tag{17.112}$$

Pokuste se ukázat rychlou konvergenci této řady matic (v uvedeném příkladě prostoru $\mathcal{L}$; v jiných prostorech žádná „rychlá konvergence“ této sumy ani nemusí nastat. Pak je třeba zvolit jiné přístupy).

Vlnky

V předchozím odstavci jsme krátce zkomentovali *první krok* nutný ke konstrukci vlnky, tedy konstrukci ortonormální base v každém prostoru $\mathcal{F}_k$. Pracujme ted opět s prostory typu $\mathcal{K}, \mathcal{L}, \mathcal{Q}$ a s dělením intervalu $[0, 1]$ na 2^k stejných dílů.

Druhým potřebným krokem bude následující věta.

<u>Věta 2.</u> Nechť prostory $\mathcal{F}_k$ jsou generovány vzájemně ortogonálními posuny, o hodnoty $i/2^k$; $i = 1, 2, \ldots, 2^k - 1$ nějaké funkce ϕ_k která je dilatací,

$$\phi_k(x) = \phi(\frac{x}{2^k}) \tag{17.113}$$

určité funkce ϕ. Nechť platí vztah $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_{k+1}$. Pišme pak

$$\phi(\frac{x}{2}) = \sum_{i=0}^{2^k} c_i \phi(x + \frac{i}{2^k}). \tag{17.114}$$

Položme

$$\psi(x) = \sum_{i=0}^{2^k} (-1)^i c_{1-i} \phi(x + \frac{i}{2^k}). \tag{17.115}$$

Pak všechny možné posuny o hodnoty $i/2^k$; $i = 0, 1, \ldots, 2^k - 1$ funkce $\psi_k(x) = \psi(x/2^k)$ tvoří ortogonální basi každého z prostorů $\mathcal{G}_k$; $k \geq 1$.

<u>Poznámka.</u> Tím je konstrukce vlnky dokončena. Poznamenejme však, že předpoklady věty nahoře (speciálně konstatování, že všechny ortogonální base již sestrojené jsou vhodnými posuny a dilatacemi *jediné* funkce) nejsou obecně garantovány pro funkce sestrojené pomocí věty 1! Jsou splněny obvykle jen přibližně, pro velká k. Tyto problémy zmizí, pracujeme-li na celé reálné ose místo na grupě $[0, 1]$. (Pak je platnost uvedeného předpokladu víceméně zřejmá. Cenou je ovšem nutnost práce s nekonečněrozměrnými prostory, nutnost diskuse chování koeficientů v nekonečné řadě věty 1 apod. Tedy problematika již v podstatě mimo obor LA. Nicméně je to tato – zcela realistická – situace, která se při aplikacích většinou uvažuje.)

($\heartsuit$) Důkaz samotné Věty 2 není vůbec obtížný a přenecháme již čtenáři, aby napsal příslušné skalární součiny a ověřil jejich nulovost (a popřípadě ocenil důvtipnou volbu koeficientů c_i). Je potřebné si všimnout vztahu (který je důsledkem ortogonality jednotlivých posunů funkce ϕ)

$$\sum_i a_{2i+j} a_{2i} = 0 \qquad \forall j. \tag{17.116}$$

Příkladem je prostor $\mathcal{K}$; postupem zde naznačeným (začínajícím s funkcemi typu Stolová hora a konstruujícím vlnky pomocí vět 1 a 2) dostaneme již zmíněnou Haarovu basi. (Ověřte jednotlivé kroky konstrukce, výpočet koeficientů c_i !)

Konstrukce vlnek v dalších prostorech je již mnohem obtížnější, přičemž hlavní problém je v provedení kroku popsaného větou 1 (a diskuse chování funkce ϕ_k tam sestrojené).($\heartsuit$)

Kapitola 18

Dvě maticové bagately

18.1 Pseudoinverse matice

Co dělat, nemá-li matice $\mathbf{A}$ inversní matici? Jinými slovy, jak nahradit vzorec

$$\vec{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1}\vec{\mathbf{b}} \tag{18.1}$$

pro řešení soustavy $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ v případě, že $\mathbf{A}^{-1}$ neexistuje? Odpovědí je konstrukce tzv. **pseudoinverse matice** z kuchyně Moore-Penroseho.

<u>Definice.</u> **Pseudoinversí** obecné (obdélníkové) matice $\mathbf{A}$ nazveme takovou matici $\mathbf{A}^{\neg}$, pro kterou platí[1] (právě poslední dvě podmínky přinášejí přívlastek „Moore-Penroseho“)[2]

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{\neg}\mathbf{A} = \mathbf{A}, \quad \mathbf{A}^{\neg}\mathbf{A}\mathbf{A}^{\neg} = \mathbf{A}^{\neg}, \quad (\mathbf{A}\mathbf{A}^{\neg})^* = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\neg}, \quad (\mathbf{A}^{\neg}\mathbf{A})^* = \mathbf{A}^{\neg}\mathbf{A}. \tag{18.2}$$

<u>Cvičení.</u> Existuje-li $\mathbf{A}^{-1}$, je samozřejmě $\mathbf{A}^{\neg} = \mathbf{A}^{-1}$. Zatím přenecháme matematikům důkazy jednoznačné existence pseudoinversní matice a raději ukážeme, jak zkonstruovat $\mathbf{A}^{\neg}$ ve dvou typických případech.

Kdyby to někoho přece jen zajímalo, pseudoinversní zobrazení k $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ získáme tak, že ve $\mathbb{W}$ najdeme basi $\mathbb{I}\mathrm{m}\, f$ a doplníme ji na basi $\mathbb{W}$ vektory kolmými[3] na $\mathbb{I}\mathrm{m}\, f$. Zobrazení $f^{\neg} : \mathbb{W} \to \mathbb{V}$ přiřadí vektorům base $\mathbb{I}\mathrm{m}\, f$ jejich

[1] Mysleme zvláště na reálný případ, kdy lze nahradit adjunkci transposicí; je myslitelná i transposice v komplexním případě.

[2] Prvá podmínka znamená, že $\mathbf{A}^{\neg}$ je pseudoinversní k $\mathbf{A}$, druhá naopak, platí-li obě, jsou **navzájem pseudoinversní**.

[3] Potřebuji skalární součin na $\mathbb{V}$ i na $\mathbb{W}$.

vzory při zobrazení f, a to ty, které jsou kolmé na $\mathbb{K}\mathrm{er}\, f$, a zbylým (kolmým na $\mathbb{I}\mathrm{m}\, f$) vektorům base přiřadí nulový vektor ve $\mathbb{V}$.

- $\mathbf{A}$ je obdélníková, typicky má více řádků než sloupců `(je vysoká)`, např. z úloh lineární regrese taková, že
$$\mathbf{A}^*\mathbf{A} \quad \text{je regulární} \tag{18.3}$$
- $\mathbf{A}$ je obdélníková, počet řádků nejvýše roven počtu sloupců `(široká matice)` taková, že (rovnice $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ má typicky více řešení)
$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* \quad \text{je regulární} \tag{18.4}$$

1. Místo neexistujícího řešení soustavy $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ hledáme řešení pro projekci $\vec{\mathbf{b}}^\perp$ do sloupcového prostoru, tedy
$$\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}^\perp, \quad (\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{b}}^\perp) \perp \mathbb{S}(\mathbf{A}) \Leftrightarrow \mathbf{A}^*(\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{b}}^\perp) = \vec{\mathbf{0}} \tag{18.5}$$
Potom je $\mathbf{A}^*\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^*\vec{\mathbf{b}} = \mathbf{A}^*\vec{\mathbf{b}}^\perp$ a můžeme psát $\vec{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^*\vec{\mathbf{b}}$. Ověřte, že v tomto případě splňuje $(\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^*$ podmínky pro pseudoinversi matice $\mathbf{A}$.

2. Má-li rovnice $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ více řešení, můžeme hledat to „nejmenší" z nich (ve smyslu minimalisace $\sum_{i=1}^n |x^i|^2$). Jelikož pro $\vec{\mathbf{b}} = 0$ je řešení rovnice $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$ v ortogonálním doplňku k sloupcovému prostoru $\mathbb{S}(\mathbf{A}^*)$ matice $\mathbf{A}^*$, znamená to, že pro obecné[4] $\vec{\mathbf{b}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ bereme řešení $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ kolmé k $\mathbb{S}(\mathbf{A}^*)^\perp$ (abychom získali řešení s minimálním $\vec{\mathbf{x}}^*\vec{\mathbf{x}}$), tedy $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{S}(\mathbf{A}^*)$. Takové $\vec{\mathbf{x}}$, které je kombinací sloupců $\mathbf{A}^*$, lze zapsat jako $\mathbf{A}^*\vec{\mathbf{z}}$, kde sloupec $\vec{\mathbf{z}}$ obsahuje právě koeficienty udávající „jak velké" kombinace. Má tedy být
$$\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{A}^*\vec{\mathbf{z}} = \vec{\mathbf{b}}, \quad \text{čili} \quad \vec{\mathbf{z}} = (\mathbf{A}\mathbf{A}^*)^{-1}\vec{\mathbf{b}}, \quad \vec{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^*(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)^{-1}\vec{\mathbf{b}}. \tag{18.6}$$
Takže $\mathbf{A}^\neg = \mathbf{A}^*(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)^{-1}$ je hledanou pseudoinversí v tomto případě. Odůvodněte podrobněji.

   Tato situace je duální minulé, protože pseudoinversi teď hledáme tak, že matici $\mathbf{A}$ nejprve hermitovsky sdružíme, najdeme k ní pseudoinversi podle minulého postupu a tuto opět (nazpátek) hermitovsky sdružíme.

[4]Obecné řešení rovnice $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ dostaneme tak, že přičteme k jejímu jednomu konkrétnímu řešení jakékoli řešení rovnice $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$.

<u>CVIČENÍ.</u> Spočtěte pseudoinverse matic

$$\mathbf{A} = (a_1, a_2, \dots a_n), \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}. \tag{18.7}$$

<u>CVIČENÍ.</u> Nechť matice $\mathbf{A}$ má hodnost h. Jakou hodnost mají její Grammova matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ a její pseudoinverse?

18.2 Polární rozklad operátoru

V této sekci najdete analogii zápisu komplexního čísla v exponenciálním tvaru

$$z = r \cdot e^{i\phi} \equiv r(\cos\phi + i\sin\phi) \tag{18.8}$$

pro matice: vyjádříme jakoukoli (nehermitovskou) matici jako komposici matice (resp. operátoru) hermitovské a unitární. Má to velký význam pro řešení různých aproximačních úloh, které jsou snadno řešitelné pro diagonální (resp. hermitovský) operátor. Rozklad obecného operátoru pak umožňuje různé aproximační úlohy řešit obecně, jak uvidíme níže.

<u>VĚTA.</u> Regulární komplexní matici $\mathbf{A}$ lze zapsat v kterémkoli z následujících tří[5] tvarů (matice $\mathbf{U}, \mathbf{U}', \mathbf{V}, \mathbf{V}'$ jsou unitární – analogie komplexních jednotek $e^{i\phi}$, matice $\mathbf{B}, \mathbf{C}$ positivně definitní hermitovské a $\mathbf{D}$ je matice positivní diagonální hermitovská – tedy reálná –)

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{V} = \mathbf{U}\mathbf{B} = \mathbf{U}'\mathbf{D}\mathbf{V}' \tag{18.9}$$

a navíc

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{B}^2 = \mathbf{V}'^*\mathbf{D}^2\mathbf{V}', \quad \mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{C}^2 = \mathbf{U}'\mathbf{D}^2\mathbf{U}'^*, \quad \mathbf{U}' = \mathbf{U}\mathbf{V}'^*. \tag{18.10}$$

Pro důkaz stačí prodiskutovat spektrální rozklad matice $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$, která je nutně hermitovská a positivně definitní. Pišme tedy

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{V}'^*\mathbf{E}\mathbf{V}' \tag{18.11}$$

[5] Tři vztahy místo jednoho máme díky nekomutativitě.

s unitární $\mathbf{V}'$ *(vzorcem* $\mathbf{V}'\mathbf{V}'^* = \mathbf{1}$*) a diagonální*[6] *reálnou positivní* $\mathbf{E}$*, která je Jordanovým tvarem* $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$*. Položme proto* $\mathbf{E} = \mathbf{D}^2$ *s jinou positivní reálnou diagonální maticí* $\mathbf{D}$*. Zřejmě matice*

$$\mathbf{B} := \mathbf{V}'^*\mathbf{D}\mathbf{V}' \tag{18.12}$$

je positivně definitní a hermitovská a $\mathbf{B}^2 = \mathbf{A}^*\mathbf{A}$*. Položíme ještě*

$$\mathbf{U} := \mathbf{A}\mathbf{B}^{-1} \tag{18.13}$$

a $\mathbf{U}$ *bude unitární, neboť* $\mathbf{B}\mathbf{U}^*\mathbf{U}\mathbf{B} = \mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{B}^2$*, a tak* $\mathbf{U}^*\mathbf{U} = \mathbf{1}$*.*

Platí také $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{B} = \mathbf{U}\mathbf{V}'^*\mathbf{D}\mathbf{V}' = \mathbf{U}'\mathbf{D}\mathbf{V}'$ *pro* $\mathbf{U}' := \mathbf{U}\mathbf{V}'^*$*.*

<u>PŘÍKLAD UŽITÍ SPEKTRÁLNÍHO ROZKLADU.</u> Chtějme reálnou $n\times n$ čtvercovou regulární matici $\mathbf{A}$ „co nejlépe“ aproximovat maticí $\mathbf{B}$ zadané hodnosti $h = h(\mathbf{B}) < n$. „Co nejlépe“ zde znamená minimalisovat normu $\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|$ pro matice $\mathbf{B}$ hodnosti $\leq h$, kde

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt[2]{\sum_{i,j} \left|a^i{}_j\right|^2} = \sqrt{\mathrm{Tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)}. \tag{18.14}$$

Diskusi proveďte sami, hlavní body postupu v dalším textu formulujeme jako cvičení.

<u>CVIČENÍ.</u>

1. Ukažte, že daná norma je speciálním případem norem typu

$$\|\mathbf{A}\|_\phi^2 = \sum_i \|\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}_i\|^2\,, \tag{18.15}$$

   podrobněji norem odvozených ze „skalárního součinu matic“

$$\mathbf{b}(\mathbf{A},\mathbf{B})_\phi = \sum_i \mathbf{b}(\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}_i, \mathbf{B}\vec{\mathbf{x}}_i), \tag{18.16}$$

   kde $\phi = \{\vec{\mathbf{x}}_i\}$ je nějaký soubor vektorů v $\mathbb{E}^n$.

2. Je-li ϕ systém tvořící ortonormální basi $\mathbb{E}^n$, je $\|\mathbf{A}\| = \|\mathbf{A}\|_\phi$ pro každou $\mathbf{A}$ a tedy uvedená norma $\|\ldots\|_\phi$ nezávisí na ϕ.

[6] Matice $\mathbf{E}$ je určena jednoznačně až na permutaci vlastních čísel.

3. $\|...\|_\phi = \|...\|_{\mathbf{U}\phi}$, kde $\mathbf{U}\phi = \{\mathbf{U}\vec{\mathbf{x}}_i\}$, pro libovolný operátor $\mathbf{U}$ účinkující na lineárním obalu ϕ s unitární maticí vůči $\{\vec{\mathbf{x}}_i\}$.

4. $\|\mathbf{AU}\|_\phi = \|\mathbf{A}\|_\phi$ pro libovolnou ortonormální basi ϕ a libovolný unitární $\mathbf{U}$.

5. Nechť
$$\mathbf{A} = \mathbf{U}'\mathbf{D}_A\mathbf{V}' \tag{18.17}$$
je polární rozklad $\mathbf{A}$. Zaveďme matici $\mathbf{D}_B$ vztahem
$$\mathbf{B} = \mathbf{U}'\mathbf{D}_B\mathbf{V}' \tag{18.18}$$
a zvažme si, že
$$\|\mathbf{A}-\mathbf{B}\| = \|\mathbf{U}'\mathbf{D}_A - \mathbf{U}'\mathbf{D}_B\| = \|\mathbf{D}_A - \mathbf{D}_B\| \tag{18.19}$$
podle vztahu minulého a následujícího triviálního

6. $\|\mathbf{A}\| = \left\|\mathbf{A}^T\right\|$, podle čehož (ve spojení s předminulým bodem) také $\|\mathbf{UA}\| = \|\mathbf{A}\|$ pro unitární $\mathbf{U}$

<u>ZÁVĚR.</u> Úlohu o nejlepší aproximaci $\mathbf{A}$ maticí $\mathbf{B}$ dané hodnosti jsme převedli na úlohu o nejlepší aproximaci matice $\mathbf{D}_A$, o níž tentokrát smíme předpokládat, že je diagonální a positivní, maticí $\mathbf{D}_B$. V této oblasti najdeme řešení lehce: i matice $\mathbf{D}_B$ bude diagonální a positivní; získáme ji totiž vynulováním patřičného počtu nejmenších diagonálních elementů $\mathbf{D}_A$, abychom docílili požadované hodnosti.

Shrnujeme: nejlepší aproximací k $\mathbf{A}$ je matice
$$\mathbf{B} = \mathbf{U}'\mathbf{D}_B\mathbf{V}', \tag{18.20}$$
kde $\mathbf{D}_B$ je nejlepší aproximací $\mathbf{D}_A$.

<u>CVIČENÍ.</u> Spočtěte pseudoinversi $\mathbf{D}^\neg$ diagonální matice $\mathbf{D}$ (nezapadá do případů, které jsme již počítali).

S použitím třetího polárního rozkladu definujte matici
$$\mathbf{A}^\neg = \mathbf{V}'^*\mathbf{D}^\neg\mathbf{U}'^* \tag{18.21}$$
a ukažte, že jde o pseudoinversi k $\mathbf{A}$.

CVIČENÍ. Je-li $\mathbf{A}$ čtvercová matice, tak $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ i $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ mají stejný Jordanův (diagonální!) tvar (což je silnější forma tvrzení dokázaného už ve cvičení na konci kapitoly spektrum). Využijte polární rozklad $\mathbf{A}$.

CVIČENÍ. (Tzv. Golden-Thompsonova nerovnost používaná např. v kvantové teorii pole.)[7]

Pro libovolné dva *hermitovské* operátory $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ platí nerovnost

$$\operatorname{Tr} \exp(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq \operatorname{Tr} \exp \mathbf{A} \exp \mathbf{B} \tag{18.22}$$

(přičemž rovnost nastává právě tehdy, když $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ komutují).

`A vzpomínáte, jak je to pro determinant?`

DŮKAZ. Rozepíšeme levou i pravou stranu jako

$$\sum \frac{\operatorname{Tr}(\mathbf{A}+\mathbf{B})^n}{n!} \qquad \text{resp.} \qquad \sum \frac{\operatorname{Tr} \mathbf{A}^k \mathbf{B}^l}{k! \cdot l!}, \tag{18.23}$$

tak vidíme, že stačí dokázat nerovnosti typu

$$\operatorname{Tr}(\mathbf{A}'\mathbf{B}'\mathbf{A}''\mathbf{B}'' \dots) \leq \operatorname{Tr}(\mathbf{A}'\mathbf{A}'' \dots \mathbf{B}'\mathbf{B}'' \dots) \tag{18.24}$$

kde $\mathbf{A}', \mathbf{A}'' \dots$ označují nějaké mocniny matice $\mathbf{A}$ a podobně u $\mathbf{B}', \mathbf{B}'' \dots$.

Předpokládejme, že $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou hermitovské *matice* a matice $\mathbf{B} = \mathbf{D}$ je již dokonce diagonální. (To smíme podle věty o spektrálním rozkladu a díky cykličnosti stopy matice.)

Nerovnost (18.24) pak dostaneme, rozepíšeme-li stopy zmíněných součinů matic v (18.24), z nerovností typu

$$x^{n_1} y^{n_2} z^{n_3} \leq \frac{n_1}{n} x^n + \frac{n_2}{n} y^n + \frac{n_3}{n} z^n; \quad n = n_1 + n_2 + n_3 \tag{18.25}$$

(což je známá nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem!).

Napišme si to podrobněji třeba pro $\mathbf{A} = \mathbf{A}' = \mathbf{A}'' = \dots$ a pro $\mathbf{B}' = \mathbf{D}^{n_1}; \quad \mathbf{B}'' = \mathbf{D}^{n_2}; \quad \mathbf{B}''' = \mathbf{D}^{n_3}$:

$$\sum_{i,j,k} a^i{}_j (d_j)^{n_1} a^j{}_k (d_k)^{n_2} a^k{}_l (d_l)^{n_3} \leq \tag{18.26}$$

$$\leq \frac{n_1}{n} \operatorname{Tr} \mathbf{A}\mathbf{D}^n\mathbf{A}^2 + \frac{n_2}{n} \operatorname{Tr} \mathbf{A}^2\mathbf{D}^n\mathbf{A} + \frac{n_3}{n} \mathbf{A}^3\mathbf{D}^n = \operatorname{Tr} \mathbf{A}^3\mathbf{D}^n.$$

[7] Pro ušetření místa umisťujeme zde, nikoliv na konec kapitoly Spektrální rozklad.

Kapitola 19

Říše tensorů

19.1 Co jest tensor

Zvoliv[1] rozpravu o počtu tensorovém za předmět této poslední kapitoly, doufám, že se zavděčím čtenářstvu hojnému našemu a to tím více, jelikož v naší mateřštině není mnoho spisů o tomto veledůležitém předmětu jednajících.

Lineární algebra pojednává, jak nám známo již, o předmětech obecných i konkrétních, aby s jedné strany požadavkům dostatečné obecnosti mathematické hověla a s druhé strany poznání toho, s čím se stále stýkáme v mathematice i v přírodozpytu, rozšířovala; neb které vědomosti byly by prospěšnější nežli ty, které schopnosti abstrakce mathematické rozvinují a navíc nám obcování v přírodě a s přírodou usnadňují?

Poohlédneme-li se na naši dosavadní činnost, poznáme ihned, že prvnímu účelu bylo především hoveno; převládajíť valně v textu našem konstrukce abstraktní, ač i v těch mnoho konkretního jest jak čtenářstvo naše zajisté poznalo.

Zvoliv tedy nyní předmět počtu tensorového za naši rozpravu, budiž hned zpředu podotknuto, že předmět, jež jsem pro čtenářstvo své hojné dle skrovných sil svých upravil, bude pojednán v obecnosti ne menší, než dosavadní themata naše, čímž jsem se arci vzdal naděje, že by všichni čtenářové všemu stejně porozuměli; vyžadujíť základní konstrukce theorie tensorové některé dřívější abstraktní konstrukce např. theorii dvojčatosti jakož i základy Cantorova počtu množstevního.

Spis tohoto druhu nesmí se porovnávati s povídkami, které jednou byvše přečteny obyčejně ztrácí všechnu cenu, nýbrž sluší se jej pokládati za nutný

[1] Neprošlo jazykovou úpravou.

člen prostonárodní knihovny studentské.[2]

<u>TENSOR JAKO MULTILINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ.</u> Bylo by omylem považovat pojem multilineárního zobrazení za přípravu k studiu funkce více proměnných v analýze. Spíše je možné říci toto: pojem lineárního zobrazení odpovídá těm situacím v analýze (typicky více proměných), kdy nás zajímá diferenciál prvního řádu. Pojem kvadratické formy nastupuje v analýze tam, kde informace daná diferenciálem prvního řádu je příliš triviální. (Přechod od kvadratické formy k bilineární formě je pro analýzu ovšem zcela formální záležitostí.) Zato však existují v analýze, a mnohem četněji v geometrii a fysice objekty, popsané multilineárními formami. Zatím jsme měli jediný netriviální příklad multilineární funkce více než dvou proměnných: šlo o pojem determinantu.

Teorii tensorů je možno budovat na prostorech se skalárním součinem (viz např. knihu J. Kvasnici), což často dostačuje pro aplikace a což je možná pro začátečníky „stravitelnější“, neb nevyžaduje pojem duálního prostoru; po pravdě řečeno se však pojem duálního prostoru spíše jenom dokonale zamaskuje tím, že se ztotožní duál s původním prostorem pomocí věty o representaci a transformace souřadnic se provádějí pouze ortogonální.

Teorii tensorů je možno ovšem budovat i obecně na lineárních prostorech i bez skalárního součinu; skalární součin se potom používá jen k některým speciálním konstrukcím. Tento postup je v současné literatuře častější, je logičtější a asi i jednodušší (i když nikoli nutně pro začátečníky). Přidržíme se ho již proto, že kapitola o dualitě má smysl především s ohledem na budování teorie tensorů. Když jsme již dualitu zvládli (haha?), bylo by nesmyslné zavádět tensory nějakým speciálnějším způsobem.

<u>PŘÍKLADY TENSORŮ.</u>

- **skalár** (tensor bez indexů, má jednu složku, která se nemění při transformacích)
- vektor (**kovektor**, **kontravektor**)
- zobrazení, operátor; jeden index nahoře a jeden dole; identickému zobrazení $\hat{1} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ odpovídá **Kroneckerův** tensor δ^{μ}_{ν}
- bilineární forma (např. Riemannova metrika $g_{\mu\nu}$)

[2] Úvod zpracován volně dle spisu „O povětrnosti“, dr. F. J. Studnička, Praha, 1872, Matice lidu – spolek pro vydávání laciných knih českých. F.J. Studnička byl prvním rektorem české části UK.

- další tensory z obecné teorie relativity; např. **tensor křivosti** $R_{\mu\nu}$, tensor hmoty (tj. hustoty energie a hybnosti) $T_{\mu\nu}$

- tensor setvačnosti I_{ij}, pomocí něhož lze vyjádřit moment setrvačnosti na osu zadanou jednotkovým vektorem $\vec{\mathbf{v}}$, vztah mezi vektorem úhlové rychlosti a momentem hybnosti atd. a vztah pro energii rotujícího tělesa jako hodnotu kvadratické formy po dosazení vektoru úhlové rychlosti (jde o speciální „ortogonální“ tensory, proto všechny indexy dole)

$$I = I_{ij}v_i v_j, \quad L_i = I_{ij}\omega_j, \quad E = \frac{1}{2}I_{ij}\omega_i\omega_j \dots \tag{19.1}$$

- tensor napětí τ_{ij} a deformace ε_{ij}; jako příklad vzorců uvedeme vztah pro sílu působící na plošku $\vec{\mathbf{dS}}$ (normálový vektor k plošce o velikosti stejné jako má ploška obsah), vztah mezi nimi pomocí tensoru **pružnosti** (Hookův zákon), který pro isotropní látku může obsahovat jen dvě nezávislé konstanty α, β, protože musí být zkonstruován jen z delta-tensoru (všechny indexy píšeme dolů: připouštíme jen ortogonální transformace)

$$\begin{gathered} dF_i = \tau_{ij}dS_i, \quad \tau_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl} \dots \\ c_{ijkl} = \alpha\delta_{ij}\delta_{kl} + \tfrac{\beta}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}); \end{gathered} \tag{19.2}$$

  tensor deformace $\varepsilon_{ij} = 1/2(\partial_i u_j + \partial_j u_j)$ lze také interpretovat tak, že udává, na jaký elipsoid tvaru (alespoň pro malá ε_{ij})

$$(\delta_{ij} - 2\varepsilon_{ij})x^i x^j = r^2 \tag{19.3}$$

  se „smáčkne“ kulový element objemu daného tělesa $x_i x_i = r^2$ (alespoň pro tak malé poloměry koule r^2, abychom mohli zanedbat eventuální nekonstantnost ε_{ij} v kouli)

- další a další fysikální tensory, např. tensor **polarisovatelnosti**, udávající vztah mezi vektorem polarisace a vektorem elektrické intensity v krystalech (v homogenních látkách je násobkem δ_{ij})

$$P_i = \alpha_{ij}E_j, \tag{19.4}$$

  piezoelektrické tensory a mnohé jiné

- determinant

Abyste mohli lépe číst další text, osvěžte si, co je to faktorprostor (v hledání vám pomůže rejstřík).

Vysvětlete, proč je faktorprostor $\mathbb{V}$ podle $\mathbb{W}$ speciálním případem **faktormnožiny**, tzn. množiny všech **tříd ekvivalence** $\heartsuit$ typu

$$\hat{v} = \{v \in \mathbb{V} \,|\, v' \heartsuit v\} \tag{19.5}$$

(ekvivalence je relace, která je reflexivní, symetrická a transitivní) pro speciální ekvivalenci

$$\vec{\mathbf{v}} \heartsuit \vec{\mathbf{v}}' \iff \vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{w}} \in \mathbb{W}. \tag{19.6}$$

<u>Definice formálního lineárního obalu.</u> Budeme potřebovat ještě jednu abstraktní konstrukci, totiž vytvoření vektorového prostoru nad zvolenou basí. Následující definici lehce pochopíte, představíte-li si dobře známý lineární prostor $\mathbb{R}^n$ jako formální lineární obal množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Formálním lineárním obalem $\mathcal{L}_f(X)$ množiny X budeme[3] mínit množinu všech (reálných či komplexních podle kontextu) funkcí na množině X. Každý prvek $\vec{\lambda} \in \mathcal{L}_f(X)$ lze zapsat ve tvaru

$$\vec{\lambda} = \sum_{x \in X} \lambda(x) \vec{\mathbf{v}}_x, \tag{19.7}$$

kde vektor $\vec{\mathbf{v}}_x \in \mathcal{L}_f(X)$ označuje funkci $\lambda(y) = \delta_{xy}$. V případech, o nichž budeme mluvit, budeme (i pokud X bude nespočetná) kombinovat konečný počet jejích prvků. V případech složitějších (např. chceme-li Hilbertův prostor kvantové mechaniky jedné částice popsat jako komplexní formální lineární obal prostoru $\mathbb{R}^3$) bychom sumu (alespoň formálně) nahradili nějakým integrálem, Kroneckerovo delta nějakou delta-funkcí atd.

Tři definice tensorového součinu prostorů

<u>První definice.</u> Nechť $\mathbb{V}$ a $\mathbb{W}$ jsou lineární prostory mající base $\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots \vec{\mathbf{v}}_n$ a $\vec{\mathbf{w}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{w}}_m$. Pak formální lineární obal kartézského součinu basí nazýváme **tensorovým součinem** $\mathbb{V}$ a $\mathbb{W}$ a značíme ho

$$\mathbb{V} \otimes \mathbb{W} := \mathcal{L}(\{\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n\} \times \{\vec{\mathbf{w}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{w}}_m\}). \tag{19.8}$$

[3] Jestliže bude zřejmé, že jiný lineární obal než formální nebudeme umět konstruovat, budeme index f vynechávat.

Prvky $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$ budeme zapisovat ve tvaru

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{T}} = \sum_{i,j} (\vec{\mathbf{v}}_i \otimes \vec{\mathbf{w}}_j) t^{ij}, \tag{19.9}$$

kde $\vec{\mathbf{v}}_i \otimes \vec{\mathbf{w}}_j$ je nové označení pro prvek $(\vec{\mathbf{v}}_i, \vec{\mathbf{w}}_j)$ kartézského součinu basí (nazývaný často **dyadický součin** vektorů), a jest prvkem base $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$.

Definice jest tedy taková, že

$$\dim(\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}) = \dim \mathbb{V} \cdot \dim \mathbb{W}. \tag{19.10}$$

Nejde tedy o kartézský součin $\mathbb{V} \times \mathbb{W}$, který má dimensi $\dim \mathbb{V} + \dim \mathbb{W}$, a tudíž ho rádi značíme také $\mathbb{V} \oplus \mathbb{W}$. (Toto značení jsme již užívali u direktních rozkladů prostorů.) Prostor $\mathbb{W} \otimes \mathbb{V}$ je isomorfní prostoru $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$, a o této skutečnosti se vyjadřujeme jako o **komutativitě** tensorového součinu. `(Nechápejte tuto větu jako tvrzení o komutativitě násobení matic. S takovými nedbalostmi si zde nezahráváme.)` Můžeme také konstruovat isomorfismy mezi prostory

$$\mathbb{U} \otimes (\mathbb{V} \oplus \mathbb{W}) = (\mathbb{U} \otimes \mathbb{V}) \oplus (\mathbb{U} \otimes \mathbb{W}), \tag{19.11}$$

což nám umožňuje mluvit i o **distributivnosti** $\otimes$ vůči $\oplus$. (Ověřte alespoň, že prostory na obou stranách mají stejné dimense.)

Zatím se nebudeme obtěžovat otázkou, zda nezávisí definice na volbě base (lze konstruovat isomorfismy), věta níže nám vše vypoví.

Druhá definice. Tensorovým součinem $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$ nazýváme prostor všech bilineárních forem na kartézském součinu $\mathbb{V}' \times \mathbb{W}'$ duálních prostorů.

Vztah této nejkratší definice k definici prvé plyne z následujícího.

Věta. Každá bilineární forma B na $\mathbb{V}' \times \mathbb{W}'$ je určena jednoznačně čísly

$$b^{ij} = B(\vec{\mathbf{v}}'^i, \vec{\mathbf{w}}'^j), \tag{19.12}$$

kde $\{\vec{\mathbf{v}}'^i\}$ resp. $\{\vec{\mathbf{w}}'^j\}$ označuje duální basi, *protože*

$$B(\sum \alpha_i \vec{\mathbf{v}}'^i, \sum \beta_j \vec{\mathbf{w}}'^j) = \sum \alpha_i \beta_j B(\vec{\mathbf{v}}'^i, \vec{\mathbf{w}}'^j). \tag{19.13}$$

Důsledek. Ztotožníme-li tensor $\vec{\mathbf{v}}_i \otimes \vec{\mathbf{w}}_j$ s bilineární formou

$$(\vec{\mathbf{v}}', \vec{\mathbf{w}}') \mapsto v'(\vec{\mathbf{v}}_i) \cdot w'(\vec{\mathbf{w}}_j), \tag{19.14}$$

máme tím zadán isomorfismus $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$ na prostor všech bilineárních forem na $\mathbb{V}' \times \mathbb{W}'$, čímž je také vyřízena otázka $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$ zkonstruovaných podle různých basí dle definice prvé. Objasněte.

<u>DEFINICE TŘETÍ.</u> (♮) Tato nejabstraktnější definice je matematiky nejpoužívanější.

Tensorovým součinem $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$ rozumíme faktorprostor[4]

$$\mathcal{L}(\mathbb{V} \times \mathbb{W})/\mathbb{Z}, \tag{19.15}$$

kde $\mathbb{Z}$ je lineární podprostor generovaný vektory

$$\begin{array}{c} (\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}_1 + \vec{\mathbf{w}}_2) - (\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}_1) - (\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}_2) \\ (\vec{\mathbf{v}}_1 + \vec{\mathbf{v}}_2, \vec{\mathbf{w}}) - (\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{w}}) - (\vec{\mathbf{v}}_2, \vec{\mathbf{w}}) \\ (\lambda\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}) - (\vec{\mathbf{v}}, \lambda\vec{\mathbf{w}}) \\ \lambda(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}) - (\lambda\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}) \end{array} . \tag{19.16}$$

Podrobnou diskusi poslední definice vynecháme.

<u>SPOJENÍ PRVÉ A TŘETÍ DEFINICE.</u> Nechť množina $\{\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \ldots\}$ generuje $\mathbb{V}$ a množina $\{\vec{\mathbf{w}}_1, \ldots\}$ generuje $\mathbb{W}$. Potom prostor

$$\mathcal{L}_f\{(\vec{\mathbf{v}}_i, \vec{\mathbf{w}}_i)\}/\mathbb{Z}, \tag{19.17}$$

kde $\mathbb{Z}$ je podprostor $\mathcal{L}$ generovaný všemi prvky tvaru

$$\begin{array}{rll} & \sum_i \alpha^i(\vec{\mathbf{v}}_i, \vec{\mathbf{w}}) & \text{kde } \vec{\mathbf{w}} \in \mathbb{W} \text{ a } \sum_i \alpha^i \vec{\mathbf{v}}_i = \vec{\mathbf{0}} \\ \text{a} & \sum_j \beta^j(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}_j) & \text{kde } \vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{V} \text{ a } \sum_j \beta^j \vec{\mathbf{w}}_j = \vec{\mathbf{0}} \end{array} \tag{19.18}$$

je isomorfní $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$.

<u>POZNÁMKA.</u> Extrémními možnostmi voleb množin $\{\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots\}$ resp. $\{\vec{\mathbf{w}}_1, \ldots\}$ je jednak base $\mathbb{V}$ resp. $\mathbb{W}$; v tomto případě dostáváme definici prvou, protože $\mathbb{Z}$ je triviální podprostor obsahující jen $(\vec{\mathbf{0}}, \vec{\mathbf{0}})$ nulový prvek.

Druhou extrémní možností je dosazení celých prostorů $\mathbb{V}$ resp. $\mathbb{W}$ za množiny $\{\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots\}$ a $\{\vec{\mathbf{w}}_1, \ldots\}$, čímž dostáváme třetí definici tensorového součinu.

<u>DŮKAZ</u> *jenom naznačíme. Vyjdeme ze správnosti prvé definice a přidáme nějaký „nový“ vektor*

$$\vec{\mathbf{v}}_{n+1} = \sum_i \lambda^i \vec{\mathbf{v}}_i \tag{19.19}$$

[4]Jde o faktorprostor opravdu obřího prostoru, který „má“ dimensi takovou, jako je počet prvků v $\mathbb{V} \times \mathbb{W}$. Tato troufalost je přinejmenším zde užitečná.

do souboru $\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots$. Tím sice zvětšíme prostor $\mathcal{L}$, nikoli však faktorprostor, jelikož pro každý element $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{t}}$ „nového“ prostoru $\mathcal{L}$ existuje $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{t}}'$ ze starého $\mathcal{L}$ takový, že[5] (♡)

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{t}} - \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{t}}' = \sum_j \beta^j(\vec{\mathbf{v}}_{n+1}, \vec{\mathbf{w}}_j) - \sum_i \sum_j \lambda^i \beta^j(\vec{\mathbf{v}}_i, \vec{\mathbf{w}}_j) \in \mathbb{Z} \ (!) \tag{19.20}$$

<u>Tvrzení.</u> Každé bilineární zobrazení

$$F : \mathbb{V} \times \mathbb{W} \to \tilde{\mathbb{W}}, \tag{19.21}$$

kde $\mathbb{V}, \mathbb{W}, \tilde{\mathbb{W}}$ jsou lineární prostory, lze jednoznačně rozšířit na lineární zobrazení

$$\otimes F : \mathbb{V} \otimes \mathbb{W} \to \tilde{\mathbb{W}}; \tag{19.22}$$

označíme-li symbolem j vnoření $j(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}) = \vec{\mathbf{v}} \otimes \vec{\mathbf{w}}$
(pozor, $j(\lambda\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}) = j(\vec{\mathbf{v}}, \lambda\vec{\mathbf{w}}) = \lambda j(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}})$), tak

$$F = \otimes F \circ j, \text{ s argumenty } F(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}) = \otimes F(\vec{\mathbf{v}} \otimes \vec{\mathbf{w}}). \tag{19.23}$$

<u>Důkaz</u> *opět jen stručně: nedá moc práce rozšířit každé zobrazení (bilinearity zde netřeba) na kartézském součinu*

$$F : \{\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots\} \times \{\vec{\mathbf{w}}_1, \ldots\} \to \tilde{\mathbb{W}} \tag{19.24}$$

na lineární zobrazení na $\mathcal{L}$. Bilinearitu užijeme teprve v okamžiku, kdy ukazujeme, že takto rozšířené zobrazení se anuluje na podprostoru $\mathbb{Z} \subseteq \mathcal{L}$.

<u>Důsledek.</u> Prostor všech bilineárních forem na $\mathbb{V} \times \mathbb{W}$ – tedy prostor $\mathbb{V}' \otimes \mathbb{W}'$ podle definice druhé – jsme tímto ztotožnili s duálem prostoru $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$ (je třeba ještě dodat, že restrikcí lineárního zobrazení na $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$ je bilineární zobrazení na $\mathbb{V} \times \mathbb{W}$).

Zcela analogicky je možno ztotožnit prostory

$$(\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}')' = \mathbb{V}' \otimes \mathbb{W}, \quad (\mathbb{V}' \otimes \mathbb{W}')' = \mathbb{V} \otimes \mathbb{W} \quad \text{atd.} \tag{19.25}$$

(Pro nekonečněrozměrné prostory $\mathbb{V}, \mathbb{W}$, kde navíc uvažujeme různé topologie, to ovšem takto jednoduché není!)

---

[5] Píšeme jen tu část $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{t}}$, která neleží ve starém $\mathcal{L}$.

<u>Definice.</u> Nechť $\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{V}$, $\vec{\mathbf{w}} \in \mathbb{W}$. Tensorem

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{t}} = \vec{\mathbf{v}} \otimes \vec{\mathbf{w}}, \quad t^{ij} = v^i w^j \tag{19.26}$$

označíme ten prvek $t \in (\mathbb{V}' \otimes \mathbb{W}')'$, pro nějž platí

$$t(\vec{\mathbf{v}}', \vec{\mathbf{w}}') = v'(\vec{\mathbf{v}}) \cdot w'(\vec{\mathbf{w}}'), \quad t^{ij} v'_j w'_j = v'_i v^i \cdot w'_j w^j. \tag{19.27}$$

<u>Terminologická poznámka.</u> Je tedy možno chápat prostor $\mathbb{W} \otimes_\Lambda \mathbb{V}'$ jako prostor všech Λ-lineárních zobrazení (Λ je těleso, Λ-linearita znamená, že zobrazení přiřazuje vektoru vynásobenému konstantou $k \in \Lambda$ opět k-násobek, co vektoru původnímu) z prostoru $\mathbb{V}$ do $\mathbb{W}$. Ten se také někdy značí jako $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ a říká se, že je **kovariantní** podle $\mathbb{W}$ a kontravariantní podle $\mathbb{V}$ (kvůli té čárce).

<u>Tvrzení bez důkazu.</u> Nechť $\vec{\mathbf{v}} \in \sum_i \vec{\mathbf{v}}_i \lambda^i$, $\vec{\mathbf{w}} = \sum_j \vec{\mathbf{w}}_j \mu^j$. Pak podle poslední definice

$$\vec{\mathbf{v}} \otimes \vec{\mathbf{w}} = \sum_{i,j} \vec{\mathbf{v}}_i \otimes \vec{\mathbf{w}}_j \cdot \lambda^i \mu^j, \tag{19.28}$$

pomocí čehož bychom mohli ve smyslu prvé definice výraz $\vec{\mathbf{v}} \otimes \vec{\mathbf{w}}$ i definovat.

<u>Definice.</u> Tensor $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{t}} \in \mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$ nazveme **rozložitelným**, pokud je tvaru $\vec{\mathbf{v}} \otimes \vec{\mathbf{w}}$.

Vektory $\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ jsou určeny až na to, že lze jeden z nich vydělit a druhý vynásobit nějakým λ, jednoznačně.

<u>Cvičení.</u> Nechť $\mathcal{P}$ je prostor funkcí (třeba polynomů) na $\mathbb{R}$. Tensorový součin $\mathcal{P} \otimes \mathcal{P}$ je možno ztotožnit s jistým prostorem funkcí na $\mathbb{R}^2$ (dvou proměnných). Elementy $\vec{\mathbf{f}} \otimes \vec{\mathbf{g}}$ jsou právě ty funkce, které mají tvar

$$\{(x, y) \mapsto f(x)g(y)\} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}. \tag{19.29}$$

<u>Rozšíření.</u> Tensorový součin více (než dvou) lineárních prostorů (např. $\mathbb{U}, \mathbb{V}, \mathbb{W}$) lze zkonstruovat jako součin $(\mathbb{U} \otimes \mathbb{V}) \otimes \mathbb{W}$ nebo jako součin $\mathbb{U} \otimes (\mathbb{V} \otimes \mathbb{W})$ (prostor $\mathbb{U} \otimes \mathbb{V}$ je opět lineární prostor a jeho prvky lze zase nazvat vektory). Naštěstí, obě definice vedou k isomorfním prostorům, a o této vlastnosti budeme mluvit jako o **asociativitě** tensorového násobení (závorky budeme vynechávat).

Prvky tensorového součinu $\mathbb{U} \otimes \mathbb{V} \otimes \ldots \otimes \mathbb{Z}$ budeme zapisovat ve tvaru

$$\overleftrightarrow{\mathbf{T}} = \sum_{i,j,\ldots,l} (\vec{\mathbf{u}}_i \otimes \vec{\mathbf{v}}_j \otimes \ldots \otimes \vec{\mathbf{z}}_l) t^{ij\ldots l}. \tag{19.30}$$

Tensor tedy lze chápat jako tabulku čísel indexovanou několika (žádným, jedním, dvěma, třemi[6] atd.) indexy, však dávající informaci pouze ve zvolených basích ve $\mathbb{U},\ldots,\mathbb{Z}$. Se změnou base se mění i tabulka „složek tensoru“:

<u>VĚTA.</u> Vyjádřeme tento tensor $\overleftrightarrow{\mathbf{T}}$ v nových basích prostorů $\mathbb{U}, \mathbb{V},\ldots \mathbb{Z}$, totiž v basích $\{\tilde{\vec{\mathbf{u}}}_i\}$, $\{\tilde{\vec{\mathbf{v}}}_j\}$,…,$\{\tilde{\vec{\mathbf{z}}}_l\}$ a matice přechodu od nevlnkovaných k vlnkovaným basím označme $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$,…,$\mathbf{Z}$, např.

$$(\tilde{\vec{\mathbf{u}}}_1, \ldots, \tilde{\vec{\mathbf{u}}}_n) = (\vec{\mathbf{u}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n)\mathbf{U}. \tag{19.31}$$

Potom tensor napsaný v nových basích

$$\overleftrightarrow{\mathbf{T}} = \sum_{i,j,\ldots,l} (\tilde{\vec{\mathbf{u}}}_i \otimes \tilde{\vec{\mathbf{v}}}_j \otimes \ldots \otimes \tilde{\vec{\mathbf{z}}}_l) \tilde{t}^{ij\ldots l} \tag{19.32}$$

bude mít složky takové, že složky ve starých basích jdou vyjádřit jako

$$t^{ij\ldots l} = \sum_{\tilde{\imath},\tilde{\jmath},\ldots,\tilde{l}} u^i{}_{\tilde{\imath}} v^j{}_{\tilde{\jmath}} \cdot \ldots \cdot z^l{}_{\tilde{l}} \tilde{t}^{\tilde{\imath}\tilde{\jmath}\ldots\tilde{l}}. \tag{19.33}$$

<u>DŮKAZ.</u> Stačí dosadit $\tilde{\vec{\mathbf{u}}}_{\tilde{\imath}} = \sum_i \vec{\mathbf{u}}_i u^i{}_{\tilde{\imath}}$ (a podobně pro ostatní base) a tensorově roznásobit s užitím distributivního zákona.

$$\overleftrightarrow{\mathbf{T}} = \sum_{\tilde{\imath},\tilde{\jmath},\ldots,\tilde{l}} \sum_{i,j,\ldots,l} (\vec{\mathbf{u}}_i \otimes \vec{\mathbf{v}}_j \otimes \ldots \otimes \vec{\mathbf{z}}_l) u^i{}_{\tilde{\imath}} v^j{}_{\tilde{\jmath}} \cdot \ldots \cdot z^l{}_{\tilde{l}} \tilde{t}^{\tilde{\imath}\tilde{\jmath}\ldots\tilde{l}} \tag{19.34}$$

<u>MATEMATICKÉ PŘÍKLADY TENSORŮ.</u>

- Prostor polynomů více proměnných lze psát jako tensorový součin prostorů polynomů jedné proměnné: $x^m y^n$ ztotožníme s $x^m \otimes y^n$.
- V tomto smyslu je Hilbertův prostor stavů dvou částic v kvantové mechanice tensorovým součinem Hilbertových prostorů těchto částic; popisujeme-li dvě částice, vlnovou funkci musíme definovat v šestirozměrném prostoru – nejsou to tedy dvě vlny v trojrozměrném prostoru!

[6] Dále čtyřmi, pěti atd.

- ($\sharp$) Analytici rádi považují prostor funkcí více proměnných za tensorový součin prostorů funkcí jedné proměnné. V případě nekonečnědimensionálních prostorů je žádoucí zkonstruovat ještě vhodnou topologii na $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$. Pak se ukazuje, že prostor $\mathcal{C}(\langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle)$ spojitých funkcí na daném dvourozměrném intervalu s normou $\|f\| = \sup_{x,y\in\langle 0,1\rangle} |f(x,y)|$ je zúplněním $\mathcal{C}\langle 0,1\rangle \otimes \mathcal{C}\langle 0,1\rangle$. ($\heartsuit$)

Uvedená tematika tvoří rozsáhlou partii funkcionální analýzy (Grothendieck,...).

Vidíme, že v těchto případech jsme nahlíželi na tensory spíše v duchu definice prvé a třetí. Jindy (tensor setrvačnosti, metrický tensor, piezoelektrický tensor) je přirozenější mluvit v duchu definice druhé, to jest kvadratické formy.

V dalším se omezíme na tensorové součiny $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W} \otimes \ldots \otimes \mathbb{Z}$ vzniklé tensorovým násobením prostorů $\mathbb{V}, \mathbb{W}, \ldots, \mathbb{Z}$, které jsou všechny kopiemi jednoho zvoleného vektorového prostoru eventuálně jeho duálu (obyčejně jde o prostor isomorfní nějakému $\mathbb{R}^n$).

Odedávna v této knize užíváme zápis pomocí horních a dolních indexů, který přináší nesporné výhody: všechny sčítance (a tedy také obě strany rovnic) musí mít stejné ty horní i dolní indexy (a každý se smí vyskytovat jen jednou), které nejsou **hluché**; hluchými indexy máme na mysli indexy, vyskytující se v rovnicích jednou nahoře a jednou dole, přičemž podle nich provádíme sčítání, např.

$$\sum_\mu F^\mu V_\mu = F^0 V_0 + F^1 V_1 + \ldots + F^d V_d = F^\mu V_\mu \tag{19.35}$$

a (jak vidíte v posledním vyjádření) znak sumy lze vynechat v souladu s **Einsteinovou sumační konvencí**.

V dalším bude $\mathbb{E}$ pevný vektorový prostor s basí $\vec{\mathbf{e}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{e}}_d$ a $\mathbb{E}'$ jeho duál.

<u>DEFINICE.</u> Tensor tvaru

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{T}} = \sum a^{ij\ldots}_{kl\ldots} \vec{\mathbf{e}}_i \otimes \vec{\mathbf{e}}_j \otimes \ldots \otimes \vec{\mathbf{e}}'^k \otimes \vec{\mathbf{e}}'^l \otimes \ldots \in \mathbb{E} \otimes \mathbb{E} \otimes \ldots \otimes \mathbb{E}' \otimes \mathbb{E}' \otimes \ldots, \tag{19.36}$$

který má u koeficientů $a^{ij\ldots}_{kl\ldots}$ m horních a n dolních indexů, tedu u součinů $\vec{\mathbf{e}}_i \otimes \ldots \vec{\mathbf{e}}'^k \otimes \ldots$ má m dolních a n horních indexů, nazýváme m-krát **kontravariantní** a n-krát **kovariantní**. Budeme také říkat, že je to tensor typu (n, m).

Tak například, vektor base $\vec{\mathbf{e}}_1$ prostoru $\mathbb{E}$ je (jednou) kontravariantní vektor neboli tensor typu $(0,1)$.

Změňme nyní basi $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}$ a odpovídajícím způsobem duální basi $\{\vec{\mathbf{e}}'^i\}$: matice $\mathbf{C}$ nechť je maticí přechodu od base $\vec{\mathbf{e}}_1, \dots \vec{\mathbf{e}}_n$ k nové basi $\vec{\mathbf{f}}_1, \dots, \vec{\mathbf{f}}_n$:

$$\vec{\mathbf{f}}_{\tilde{\imath}} = \vec{\mathbf{e}}_j c^j_{\ \tilde{\imath}}. \tag{19.37}$$

Připomínáme, že je potom ($(c^{-1})^{\tilde{\imath}}_{\ j}$ jsou elementy inversní matice)

$$\vec{\mathbf{f}}'^{\tilde{\imath}} = (c^{-1})^{\tilde{\imath}}_{\ j} \vec{\mathbf{e}}'^j, \tag{19.38}$$

což lze zapsat v méně přirozeném tvaru méně přirozeným zavedením kontragradientní matice $\mathbf{D} = (\mathbf{C}^{-1})^T$ (pozor, u d_j^i určuje – na rozdíl od našich zvyků – dolní index j řádku)

$$\vec{\mathbf{f}}'^{\tilde{\imath}} = \vec{\mathbf{e}}'^j d_j^{\tilde{\imath}}. \tag{19.39}$$

Potom se složky tensoru s oběma druhy indexů u složek transformují podle následujících vzorců: nechť

$$\overleftrightarrow{\mathbf{T}} = a^{ij\dots}_{kl\dots} \vec{\mathbf{e}}_i \otimes \vec{\mathbf{e}}_j \otimes \dots \otimes \vec{\mathbf{e}}'^k \otimes \vec{\mathbf{e}}'^l \otimes \dots = \tilde{a}^{\tilde{\imath}\tilde{\jmath}\dots}_{\tilde{k}\tilde{l}\dots} \vec{\mathbf{f}}_{\tilde{\imath}} \otimes \vec{\mathbf{f}}_{\tilde{\jmath}} \otimes \dots \otimes \vec{\mathbf{f}}'^{\tilde{k}} \otimes \vec{\mathbf{f}}'^{\tilde{l}} \otimes \dots . \tag{19.40}$$

Potom je (připomínáme Einsteinovu konvenci)

$$a^{ij\dots}_{kl\dots} = c^i_{\ \tilde{\imath}} c^j_{\ \tilde{\jmath}} \cdot \dots \cdot \tilde{a}^{\tilde{\imath}\tilde{\jmath}\dots}_{\tilde{k}\tilde{l}\dots} (c^{-1})^{\tilde{k}}_{\ k} (c^{-1})^{\tilde{l}}_{\ l} \cdot \dots . \tag{19.41}$$

<u>Příklad.</u> Tensor (1,1)

$$a^j_{\ i} \cdot \vec{\mathbf{e}}_j \otimes \vec{\mathbf{e}}'^i = \vec{\mathbf{e}}_j \otimes a^j_{\ i} \vec{\mathbf{e}}'^i \tag{19.42}$$

ztotožňujeme s operátorem $\vec{\mathbf{e}}_i x^i \mapsto \vec{\mathbf{e}}_j y^j$, kde $y^j = a^j_{\ i} x^i$. Vzorec pro transformaci tensoru je potom dobře známým vzorcem

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{C}^{-1} \tag{19.43}$$

pro změnu matice zobrazení při změně base.

Dvakrát kovariantní tensor

$$a_{ij} \vec{\mathbf{e}}'^i \otimes \vec{\mathbf{e}}'^j \tag{19.44}$$

ztotožňujeme s bilineární formou na $\mathbb{E}$ danou předpisem

$$B(\vec{\mathbf{e}}_i x^i, \vec{\mathbf{e}}_j y^j) = a_{ij} x^i x^j. \tag{19.45}$$

Ve vzorci pro transformaci tensoru poznáváme formuli popisující změnu matice kvadratické formy při změně base:

$$a_{kl} = \tilde{a}_{\tilde{k}\tilde{l}}(c^{-1})^{\tilde{k}}{}_{k}(c^{-1})^{\tilde{l}}{}_{l} = (c^{-1T})_{k}{}^{\tilde{k}} a_{\tilde{k}\tilde{l}}(c^{-1})^{\tilde{l}}{}_{l}. \tag{19.46}$$

Z posledního tvaru je vidět $\mathbf{A} = (\mathbf{C}^{-1})^T\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{C}^{-1}$, což známe v obráceném tvaru $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{C}^T\mathbf{A}\mathbf{C}$.

Operace s tensory

Tensory z téhož prostoru lze sčítat (jejich „souřadnice" se přitom sčítají), lze mezi sebou násobit tensory typu (n, m) a (n', m'), aby daly jako výsledek tensor $(n + n', m + m')$. Například lze psát pro „souřadnice"

$$c^{ij}_{klmn} = a^i_k b^j_{lmn}. \tag{19.47}$$

Speciálním případem tohoto je násobení konstantou – skalárem, tensorem typu $(0, 0)$.

Ale hlavně lze tensory **úžit**; zvolíme si pár indexů (jeden horní a jeden dolní) souřadnic tensoru typu (m, n), abychom místo obou napsali týž index, sčítali podle něho a dostali souřadnice tensoru typu $(m - 1, n - 1)$.

Pak lze na velkou část lineární algebry (kromě „speciálnějších" partií založených na pojmu spektra operátoru) nahlížet jako na sadu cvičení ilustrujících pojem **úžení tensorů**. Jak se vám líbí takový názor? Dříve než odpovíte negativně, přečtěte si následující příklady.

Hodnota lineární formy $\vec{\mathbf{u}}'$ (prvku duálního prostoru, jednou kovariantního tensoru) ve vektoru $\vec{\mathbf{v}}$ je úžením tensoru typu $(1, 1)$

$$u'(\vec{\mathbf{v}}) = u'_i v^i. \tag{19.48}$$

Tensorovým násobením dvou tensorů typu $(1, 1)$, kterými jsme nahradili operátory, dostaneme tensor $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{t}}$ typu $(2, 2)$, jehož vhodným úžením dostáváme

$$t^{ij}_{kl} = a^i{}_k b^j{}_l, \quad t^{ij}_{jl} = c^i{}_l = a^i{}_j b^j{}_l \tag{19.49}$$

součin matic $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$.

Z jednoho tensoru se souřadnicemi $t^i{}_j$ typu $(1, 1)$ lze úžením dostat skalár $t^i{}_i$. Co je to? Už jste na stopě?!

Přesvědčili jsme již čtenáře o hloubce definice Henriho Poincaré, že *„Matematika je umění nazývat různé věci stejnými jmény."*?

CVIČENÍ. Na rozdíl od stopy operátoru jsme nikde nediskutovali pojem stopy kvadratické formy. Víte proč?

TENSORY NA EUKLIDOVSKÝCH PROSTORECH. Podle názoru některých je toto a jenom toto právě to, co fysikové potřebují.

Určitě to není tak úplně pravda, neb zvláště složitější lineární prostory (nekonečné dimense) jsou potřebné, a přitom nemívají vždycky k disposici skalární součin.

Počítáme-li obvyklý euklidovský skalární součin, tak ho pro vektory $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}$ dostaneme jako

$$\mathbf{b}(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sum_i x^i y^i. \tag{19.50}$$

Ale podle toho, co jsme řekli o tensorech a o zákonech zachování indexů, není tato rovnice korektní. Lze ji ovšem spravit, zavedeme-li symetrický **metrický tensor** g_{ij} a zapíšeme tedy součin jako

$$\mathbf{b}(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = g_{ij} x^i x^j. \tag{19.51}$$

Můžeme povolit zvedání a spouštění indexů za pomoci metrického tensoru, např. pro tensory typu $(1,0)$ a $(0,1)$ (a jeden složitější)

$$t_i = g_{ij} t^i, \quad t^l = t_k g^{kl}, \quad m^{abc}{}_{de} = g_{ee'} m^a{}_{b'c'd}{}^{e'} g^{bb'} g^{cc'} \tag{19.52}$$

zavedeme-li inversní metrický tensor se souřadnicemi takovými, aby

$$g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k. \tag{19.53}$$

Skalární součin lze pak stručně psát jako[7] $x_i y^i = x^i y_i$. Inversní tensor vypočteme jako inversní matici, a proto je požadavek ekvivalentní podmínce

$$g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i. \tag{19.54}$$

V euklidovském prostoru však bývají lidé mnohem tvrdší: povolí jen takové base a transformace (ortogonální), ve kterých má metrický tensor tvar (zkratka) $g_{ij} = \delta_{ij}$. Potom horní index hraje tutéž roli jako dolní

$$v^i = v_i, \quad v^{ab}{}_{cd} = v^a{}_b{}^c{}_d \dots \tag{19.55}$$

a není je třeba rozeznávat, a proto nabývá smyslu třeba i pojem stopy kvadratické formy.

[7] Rovnost dvou uvedených výrazů je důsledkem obvykle požadované symetrie metrického tensoru.

19.2 Symetrické a antisymetrické tensory

Doufejme, že nikoho moc nemrzí, že již delší dobu mluvíme spíše o „souřadnicích“ tensorů než o tensorech. Vždy mluvíme o tensoru, zapsaném ve standardním tvaru (součet tensorových součinů vektorů base – a duálních vektorů base – násobených příslušnou „souřadnicí“).

Nyní si budeme všímat symetrie a antisymetrie vůči permutacím některé skupiny indexů (musí být všechny horní nebo všechny dolní) a s eventuálními ostatními indexy tensoru nebudeme hýbat. Pro konkrétnost, budeme mluvit o tensoru, který jiné takové indexy nemá, a budeme se zabývat (anti)symetrií vůči permutacím n dolních indexů (souřadnic).

DEFINICE. Nazvěme **(anti)symetrisací**[8] tensoru se souřadnicemi $c_{ij\dots p}$ tensor

$$(\text{anti})\text{sym}_{ij\dots p} c_{ij\dots p} = \frac{1}{n!}\sum_{\pi}\{\text{znak}\,\pi\} c_{\pi(i),\pi(j),\dots\pi(p)}, \tag{19.56}$$

kde sčítáme přes všechny permutace π množiny písmen pro indexy $\{i, j, \dots, p\}$ a znak π píšeme v případě antisymetrisace. Pokud je to možné, píšeme místo textu „(anti)sym“ závorky kolem indexů, podle nichž (anti)symetrisujeme, např.

$$t^i_{j(kl)mn} = \text{sym}_{kl} t^i_{jklmn}, \quad t^i_{j\langle kl\rangle mn} = \text{antisym}_{kl} t^i_{jklmn}. \tag{19.57}$$

Faktor $1/n!$ je volen tak, aby dvojí provedení (anti)symetrisace dalo totéž, co provedení jediné. (Anti)symetrisací totiž dostaneme **(anti)symetrický tensor**, to jest takový, že pro každou permutaci π

$$c_{ij\dots p} = \{\text{znak}\,\pi\}\cdot c_{\pi(i),\pi(j),\dots,\pi(p)}. \tag{19.58}$$

Mnohé užitečné tensory bývají symetrické (kvadratické formy, moment setvačnosti atd.), mnohé antisymetrické (determinant, **tensor elektromagnetického pole** $F_{\mu\nu}$, sjednocující vektor elektrické intensity a magnetické indukce v teorii relativity).

Samozřejmě, zajímavé by mohlo býti i studovat (anti)symetrii(isaci) vůči záměnám dvojic indexů; např. velký tensor křivosti $R_{\kappa\lambda,\mu\nu}$ je nejen antisymetrický vůči záměně κ, λ jakož i μ, ν, ale je také symetrický vůči záměně oněch dvojic indexů

$$R_{\kappa\lambda,\mu\nu} = R_{\mu\nu,\kappa\lambda}. \tag{19.59}$$

[8] Antisymetrisaci se také říká **alternace**.

Těmito otázkami se nebudeme příliš zabývat.

Symetrisace tensoru $\vec{\mathbf{v}}_1 \otimes \ldots \otimes \vec{\mathbf{v}}_m$, kde $\vec{\mathbf{v}}_i$ jsou vektory (nebo obecněji symetrické tensory) se někdy označuje symbolem

$$\vec{\mathbf{v}}_1 \underset{sym}{\otimes} \ldots \underset{sym}{\otimes} \vec{\mathbf{v}}_n. \tag{19.60}$$

Obdobně antisymetrisace tensoru $\vec{\mathbf{v}}_1 \otimes \ldots \otimes \vec{\mathbf{v}}_m$, kde $\vec{\mathbf{v}}_i$ jsou vektory (nebo obecněji antisymetrické tensory) se (vždy) označuje symbolem „skobka"

$$\vec{\mathbf{v}}_1 \wedge \ldots \wedge \vec{\mathbf{v}}_n \tag{19.61}$$

a nazývá se **vnějším (Grassmannovým) součinem** vektorů (…) $\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots \vec{\mathbf{v}}_m$.

Mimo jiné, pro tensor zadaný abstraktně multilineární formou na $\mathbb{E} \times \mathbb{E} \times \ldots \times \mathbb{E}$ definujeme (anti)symetrii takto:

<u>Definice.</u> Multilineární formu f nazveme (anti)symetrickou, pokud pro všechny n-tice vektorů z $\mathbb{E}$ platí vztah

$$f(\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n) = \{\mathrm{znak}\,\pi\} f(\vec{\mathbf{v}}_{\pi(1)}, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_{\pi(n)}). \tag{19.62}$$

<u>Cvičení.</u> Vyjádříme-li f složkovým zápisem

$$f(\vec{\mathbf{e}}_i x_1^i, \vec{\mathbf{e}}_j x_2^j, \ldots, \vec{\mathbf{e}}_p x_n^p) = a_{ij\ldots p} x_1^i x_2^j \cdot \ldots \cdot x_n^p, \tag{19.63}$$

pak je definice nová v souladu se starou.

<u>Definice.</u> **Symetrisovaným tensorovým součinem** $\mathbb{E} \underset{sym}{\otimes} \mathbb{E}$ rozumíme množinu všech možných kombinací tensorů typu $\vec{\mathbf{v}} \underset{sym}{\otimes} \vec{\mathbf{w}}$. (Na $\mathbb{E} \underset{sym}{\otimes} \mathbb{E}$ máme přirozeně zadanou lineární strukturu, ověřte.)

Abstraktně lze $\mathbb{E} \underset{sym}{\otimes} \mathbb{E}$ definovat jako faktorisaci prostoru $\mathbb{E} \otimes \mathbb{E}$ podle podprostoru generovaného všemi prvky tvaru

$$\vec{\mathbf{v}} \otimes \vec{\mathbf{w}} - \vec{\mathbf{w}} \otimes \vec{\mathbf{v}}. \tag{19.64}$$

(Ve složkách to znělo jednodušeji, nebo ne?)

Ukažte, že každé symetrické zobrazení $F : \mathbb{E} \times \mathbb{E}$ – tj. takové, že $F(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}) = F(\vec{\mathbf{w}}, \vec{\mathbf{v}})$ – lze jednoznačně rozšířit na lineární zobrazení na $\mathbb{E} \underset{sym}{\otimes} \mathbb{E}$.

DEFINICE. Obdobně **antisymetrisovaným tensorovým součinem** $\mathbb{E} \wedge \mathbb{E}$ rozumíme množinu všech možných kombinací tensorů typu $\vec{\mathbf{v}} \wedge \vec{\mathbf{w}}$. (Na $\mathbb{E} \wedge \mathbb{E}$ máme přirozeně zadanou lineární strukturu, ověřte.)

Abstraktně tento prostor definujeme jako faktorisaci $\mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$ podle jeho podprostoru generovaného prvky

$$\vec{\mathbf{e}} \otimes \vec{\mathbf{f}} + \vec{\mathbf{f}} \otimes \vec{\mathbf{e}}, \tag{19.65}$$

čímž ve faktorisaci ztotožníme tensory $\vec{\mathbf{e}} \otimes \vec{\mathbf{f}}$ a $-\vec{\mathbf{f}} \otimes \vec{\mathbf{e}}$. Obecněji, prostor $\Lambda^m(\mathbb{E}) \equiv \mathbb{E} \wedge \ldots \wedge \mathbb{E}$ (napravo m-krát $\mathbb{E}$) definujeme jako faktorisaci $\mathbb{E} \otimes \ldots \otimes \mathbb{E}$ podle podprostoru $\mathbb{Z}$ generovaného tensory typu

$$\vec{\mathbf{e}}_1 \otimes \vec{\mathbf{e}}_2 \otimes \ldots \otimes \vec{\mathbf{e}}_m - \text{znak}\, \pi \vec{\mathbf{e}}_{\pi(1)} \otimes \vec{\mathbf{e}}_{\pi(2)} \otimes \ldots \otimes \vec{\mathbf{e}}_{\pi(m)}, \tag{19.66}$$

kde π je permutace na indexové množině $\{1, \ldots, m\}$. Příslušnou třídu $\vec{\mathbf{e}}_1 \otimes \ldots \otimes \vec{\mathbf{e}}_m + \mathbb{Z}$ označujeme symbolem $\vec{\mathbf{e}}_1 \wedge \ldots \wedge \vec{\mathbf{e}}_m$.

CVIČENÍ. Je-li $m > \dim \mathbb{E}$, je $\Lambda^m(\mathbb{E}) = \{\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{0}}\}$.

NÁVOD. Každý prvek $\Lambda^m(\mathbb{E})$ je lineární kombinací prvků tvaru $\vec{\mathbf{e}}_1 \wedge \ldots \wedge \vec{\mathbf{e}}_m$, kde $\vec{\mathbf{e}}_i$ volíme z nějaké base $\mathbb{E}$. Pro $m > \dim \mathbb{E}$ se musí některý prvek $\vec{\mathbf{e}}_i$ vyskytnout ve výrazu $\vec{\mathbf{e}}_1 \wedge \ldots \wedge \vec{\mathbf{e}}_m$ alespoň dvakrát; transponujeme-li tyto dvě kopie mezi sebou, uvedená transposice na tensoru nic nemění, z druhé strany však podle antisymetrie mění znaménko tensoru. Pouze nulový tensor se rovná svému opaku.

DEFINICE. Podobně jako u obecných, lze i u antisymetrisovaných tensorů mluvit o **rozložitelnosti** tensoru $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{t}} \in \Lambda^k(\mathbb{E})$, existují-li vektory $\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_k$ takové, že $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{t}} = \vec{\mathbf{v}}_1 \wedge \ldots \wedge \vec{\mathbf{v}}_k$.

PŘÍKLAD. Každý tensor z $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ je rozložitelný, což souvisí (jak zanedlouho uvidíte) s tím, že ho vždy lze zapsat (a to nekonečně mnoha způsoby, a to nejen volbou λ) jako „vektorový součin“ dvou vektorů.

Naopak, už tensor $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{t}}$ z $\Lambda^2(\mathbb{R}^4)$ nemusí být rozložitelný, jako například ($\vec{\mathbf{e}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{e}}_4$ tvoří basi $\mathbb{R}^4$)

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{t}} = \vec{\mathbf{e}}_1 \wedge \vec{\mathbf{e}}_2 + \vec{\mathbf{e}}_3 \wedge \vec{\mathbf{e}}_4. \tag{19.67}$$

DŮKAZ. *Pokud by* $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{t}} = \vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}$, *byl by tzv.* **anulátor**

$$An(\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{t}}) = \{\vec{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^4 \,|\, \vec{\mathbf{w}} \wedge \vec{\mathbf{t}} = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{0}}\} \tag{19.68}$$

alespoň dvourozměrný, protože $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \in An(\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{t}})$*!*

Na druhé straně, je-li $\vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{e}}_i x^i$*, tak*

$$\vec{\mathbf{w}} \wedge \vec{\mathbf{t}} = \vec{\mathbf{e}}_i \wedge \vec{\mathbf{t}} \cdot x^i = \vec{\mathbf{e}}_1 \wedge \vec{\mathbf{e}}_3 \wedge \vec{\mathbf{e}}_4 x^1 + \vec{\mathbf{e}}_2 \wedge \vec{\mathbf{e}}_3 \wedge \vec{\mathbf{e}}_4 x^2 + \vec{\mathbf{e}}_3 \wedge \vec{\mathbf{e}}_1 \wedge \vec{\mathbf{e}}_2 x^3 + \vec{\mathbf{e}}_4 \wedge \vec{\mathbf{e}}_1 \wedge \vec{\mathbf{e}}_2 x^4, \tag{19.69}$$

což je rozklad nějakého tensoru vůči basi $\Lambda^3(\mathbb{R}^4)$ *a je tedy nulový jen pokud jsou všechna* x^i *nulová, anulátor tedy obsahuje jen nulový vektor.*

<u>Fysikální příklad.</u> (♯) Už jsme mluvili o tom, že v kvantové mechanice je Hilbertův prostor stavů dvou různých částic (např. protonu a elektronu) tensorovým součinem prostorů těchto částic samotných. Vezmeme-li symetrický resp. antisymetrický produkt N kopií prostoru stavů jednoho bosonu resp. fermionu (částice s celočíselným resp. poločíselným spinem, např. fotonu, alfa-částice resp. elektronu, protonu atd.), dostaneme prostor stavů soustavy N těchto částic.

<u>Poznámka.</u> Formální direktní součet (kartézský součin prostorů se sčítáním definovaným „po komponentách")

$$\mathbb{R} \oplus \mathbb{E} \oplus (\mathbb{E} \underset{sym}{\otimes} \mathbb{E}) \oplus (\mathbb{E} \underset{sym}{\otimes} \mathbb{E} \underset{sym}{\otimes} \mathbb{E}) \oplus \ldots \tag{19.70}$$

se nazývá **symetrickou algebrou**[9] **lineárního prostoru** $\mathbb{E}$. Někteří to raději píší jako

$$\mathbb{R} \oplus \frac{1}{1!}\mathbb{E} \oplus \frac{1}{2!}(\mathbb{E} \underset{sym}{\otimes} \mathbb{E}) \oplus \frac{1}{3!}(\mathbb{E} \underset{sym}{\otimes} \mathbb{E} \underset{sym}{\otimes} \mathbb{E}) \oplus \ldots =: \exp(\mathbb{E}) \tag{19.71}$$

a nazývají to **exponenciálou** daného vektorového prostoru. Prvky této algebry lze interpretovat jako formální mocninné řady nad $\mathbb{E}$. Symetrická algebra prostoru je vždy nekonečněrozměrným prostorem.

Na druhé straně **antisymetrická algebra lineárního prostoru** $\mathbb{E}$ zapsaná jako direktní součet

$$\Lambda(\mathbb{E}) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{E} \oplus (\mathbb{E} \wedge \mathbb{E}) \oplus \ldots \oplus \Lambda^n(\mathbb{E}) \tag{19.72}$$

má pro konečněrozměrné $\mathbb{E}$ dimensi konečnou, konkrétně řečeno

$$\dim \Lambda(\mathbb{E}) = \sum_{k=0}^{n} \dim \Lambda^k(\mathbb{E}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} = 2^n, \tag{19.73}$$

[9] „Algebrou" míníme v algebře většinou okruh bez požadavku asociativity.

protože skobky $\vec{\mathbf{e}}_1 \wedge \ldots \wedge \vec{\mathbf{e}}_m$ z různých vektorů base tvoří basi $\Lambda^k(\mathbb{E})$. (Kombinační číslo n nad k snad znáte.)

Mluvili-li jsme o prvcích symetrické algebry jako o formálních mocninných řadách, existence $\Lambda(\mathbb{E})$ nám dává tušit, že by mohlo existovat něco jako **analýza antikomutujících proměnných**. (Objev lze připsat Berezinovi do roku 1969.)

Opravdu, představme si sadu ($i = 1, \ldots, n$) antikomutujících proměnných[10] analogických komutujícím x_i

$$\{\heartsuit_i, \heartsuit_j\} = 0, \tag{19.74}$$

kde $\{a, b\} = ab + ba$ označuje **antikomutátor** (vztah $\heartsuit_i \heartsuit_j = -\heartsuit_j \heartsuit_j$ mimo jiné implikuje $\heartsuit_i^2 = 0$), a uvažme, že každou funkci těchto proměnných lze zapsat jako

$$f = \alpha + \alpha^i \heartsuit_i + \alpha^{ij} \heartsuit_i \heartsuit_j + \ldots + \alpha^{ij..p} \heartsuit_i \heartsuit_j \ldots \heartsuit_p, \tag{19.75}$$

v kteréžto formuli se vyskytuje 2^n nezávislých koeficientů (tensory α jsou antisymetrické). Sčítat můžeme jen členy grassmannské s grassmannskými nebo negrassmannské s negrassmannskými, tudíž bude polovina tensorů α nulová; podle toho, která to bude, bude funkce f grassmannská nebo negrassmannská.

Můžeme také parciálně derivovat podle i-té proměnné a pravidla

$$\{\frac{\partial}{\partial \heartsuit_i}, \frac{\partial}{\partial \heartsuit_j}\} = 0, \quad \{\frac{\partial}{\partial \heartsuit_i}, \heartsuit_j\} = \delta^i_j \tag{19.76}$$

a integrovat; integrování je v tomto světě totéž co derivování a jsme-li důslední, je i hermitovsky sdruženým operátorem k danému $\heartsuit_i$. Lze efektně mluvit i o delta-funkci:

$$\delta(\heartsuit_i) = \heartsuit_i. \tag{19.77}$$

Antikomutující (fermionovské...) proměnné hrají velkou roli v **supersymetrii**, **superstrunách** atd.

Matematické možnosti, skryté pod těmito pojmy, jsou důležité v kvantové teorii pole. Buď například $\mathbb{E}$ Hilbertův prostor[11] stavů jednoho elektronu (pro názornost mluvme o basi tohoto prostoru obsahující vektory (n, l, l_z, s_z),

[10] Dosud se značí především písmenem ϑ apod.

[11] Nyní mluvíme o komplexní variaci zmíněných pojmů, kde se všechny vektory base mohou násobit komplexními faktory, algebra má tvar $\mathbb{C} \oplus \ldots$ atd.

stejně tak bychom mohli vzít basi „elektron se spinem nahoru/dolů v bodě $\vec{\mathbf{x}}$“ apod.)

Antisymetrická algebra je teď (stejně jako $\mathbb{E}$) nekonečněrozměrná a tvoří Hilbertův prostor, který je direktním součtem n-elektronových Hilbertových prostorů pro $n = 0, 1, 2, \ldots$. Stavy tvořící jeho basi lze psát např. jako

$$(1s_\uparrow)^*(1s_\downarrow)^*(2s_\uparrow)^*|0\rangle, \tag{19.78}$$

kde $|0\rangle$ znamená **vakuum** a $(2s_\uparrow)^*$ apod. jsou **kreační operátory** přidávající elektron do daného stavu. Snad v tom vidíte jednak antisymetrisovaný tensorový součin

$$(1s_\uparrow) \wedge (1s_\downarrow) \wedge (2s_\uparrow) \tag{19.79}$$

a jednak Pauliho princip: tím, že byste kreovali dva elektrony do jednoho stavu, byste dostali nulový vektor (prvek antisymetrisované algebry).

Měření plošných obsahů

Vnější (Grassmannovy) součiny jsou ještě důležitější (alespoň v geometrii) než symetrisované tensorové součiny a věnujeme jim několik přípravných poznámek. (Viz nejprve přípravné poznámky k definici determinantu ze zimního semestru.)

Souvisejí totiž s pojmem **plošného obsahu** lineárních útvarů v euklidovském (nebo kvasieuklidovském na způsob Minkowského prostoru) prostoru.

Nechť $R(\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_k)$ je k-rozměrný rovnoběžnostěn

$$\{\sum_{i=1}^{k} \vec{\mathbf{v}}_i t^i \,|\, t^i \in \langle 0, 1\rangle\} \tag{19.80}$$

vymezený vektory $\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_k \in \mathbb{R}^n$.

Chtějme mu přiřadit veličinu

$$F(\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_k), \tag{19.81}$$

která by měla význam „plošného obsahu“ tohoto rovnoběžnostěnu. (Toto pojmenování pochází z případu $k = 2$, $n = 3$, jindy by mohlo býti rozumnější hovořit o délce, objemu apod.) Případ $k = n$ jsme již diskutovali (determinant): determinant matice $\mathbf{A}$ lze počítat jako

$$\det \mathbf{A} = n! \cdot \underbrace{a^i{}_{<i} a^j{}_j \cdot \ldots \cdot a^p{}_{p>}}_{n\text{-krát } a}. \tag{19.82}$$

Všimněte si, že tato rovnice má indexy zapsány korektně. Chceme-li spočítat n-rozměrný objem n vektorů $\vec{\mathbf{s}}_i$, $i = 1, \ldots, n$, spočteme si tensor

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{V}} = \vec{\mathbf{s}}_1 \wedge \ldots \wedge \vec{\mathbf{s}}_n, \quad V^{ij..p} = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} s_1^{\pi(i)} s_2^{\pi(j)} \cdot \ldots \cdot s_n^{\pi(p)} \operatorname{znak} \pi \tag{19.83}$$

a všimneme si, že $n!$-krát $V^{12\ldots n}$ nám vyjadřuje objem rovnoběžnostěnu vytýčeného vektory $\vec{\mathbf{s}}_i$ v jednotkách objemu rovnoběžnostěnu vytýčeného vektory base $\vec{\mathbf{e}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{e}}_n$; samozřejmě, změnou base se mění tento objem a tak se budou měnit i složky tensoru $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{V}}$, pokud se neomezíme pouze na unimodulární transformace.

Výraz $n! \cdot V^{12\ldots n}$ lze psát také jako

$$V^{ij..p} \varepsilon_{ij\ldots p}, \tag{19.84}$$

zavedeme-li úplně antisymetrický tensor $\varepsilon_{ij\ldots p}$ s elementem $\varepsilon_{12\ldots n} = +1$. (Elementy odpovídající sudým resp. lichým permutacím jsou $+1$ resp. -1.) Tento tensor zůstává při unimodulární změně base (kdy matice přechodu je unimodulární) konstantní. Obecně, násobí se determinantem matice přechodu k nové basi, např. pro zrcadlení mění znaménko.

Plošné obsahy k-dimensionálních objektů umístěných v n-rozměrném prostoru ale nelze počítat pomocí objektů se stejnými vlastnostmi, jaké má determinant.

Grassmann si ani ne sto let před vydáním této knihy uvědomil, že antisymetrický tensor

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}(\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_k) = \vec{\mathbf{v}}_1 \wedge \vec{\mathbf{v}}_2 \wedge \ldots \wedge \vec{\mathbf{v}}_k, \tag{19.85}$$

má plno „plošný obsah“ vystihujících vlastností; zvláště to, že

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}(\vec{\mathbf{v}}_1 + \sum_{i=2}^{k} \vec{\mathbf{v}}_i \lambda^i, \vec{\mathbf{v}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_k) = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}(\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_k) \tag{19.86}$$

se nemění přičtením násobků ostatních vektorů k prvému (a obdobně pro ostatní vektory), což nám připomíná invarianci velikosti „plochy“ vůči této operaci.

Lineární charakter má tensor $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}$ a nikoliv „pouhé číslo“, jakým je determinant (což je ovšem – jak již víme – také tensor, i když tento fakt je řadě uživatelů tohoto pojmu skryt díky tomu, že jde o speciální případ n-násobného vnějšího součinu[12]v prostoru dimense n).

[12]Mluvíme o determinantu matice, jejíž sloupce tvoří souřadnice vektorů, nikoliv matice zobrazení.

Zbývá nyní definovat normu na $\mathbb{E} \wedge \ldots \wedge \mathbb{E}$ a prohlásit $\left\| \overleftrightarrow{\mathbf{R}} \right\|$ za velikost k-rozměrné „plochy“ rovnoběžnostěnu.

My naštěstí známe konkrétní příklad, jak se to vše dělá: chceme-li spočítat obsah rovnoběžníka vytýčeného (trojrozměrnými) vektory $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$, spočteme si jejich vektorový součin

$$\vec{\mathbf{m}} = [\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}], \tag{19.87}$$

což je vektor, a velikost plochy dopočteme jako délku tohoto vektoru.

Obdobně postupujeme i v tensorovém zápisu: vypočteme složky tensoru

$$\overleftrightarrow{\mathbf{m}} = \vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}}, \quad m^{ij} = \frac{1}{2!}(a^i b^j - a^j b^i) \tag{19.88}$$

a čtverec obsahu dopočteme jako (dolní indexy chápejte jako podle nedávno diskutovaných pravidel spuštěné indexy)[13]

$$S^2 = 2! m^{ij} \overline{m}_{ij}. \tag{19.89}$$

(Faktor 2! jsme přidali proto, že ve vzorci pro m^{ij} je $1/2!$, které se mocní na druhou, ale zase sumace přes všechny dvojice různých i, j je sumací 2! stejných členů, a proto násobíme jen prvou mocninou 2!.)

Snad je zřejmé, jak se vytvoří analogie pro obecné k (počet vektorů $\vec{\mathbf{a}}, \ldots, \vec{\mathbf{d}}$, počet indexů tensoru $\overleftrightarrow{\mathbf{m}}$ atd.). Tensor $\overleftrightarrow{\mathbf{m}}$ bude

$$\overleftrightarrow{\mathbf{m}} = \vec{\mathbf{a}} \wedge \ldots \wedge \vec{\mathbf{d}}, \quad m^{ij..p} = a^{<i} b^j \ldots d^{p>}. \tag{19.90}$$

Čtverec obsahu k-rozměrného „rovnoběžníka“

$$R(\vec{\mathbf{a}}, \ldots, \vec{\mathbf{d}}) = \{ t_1 \vec{\mathbf{a}} + t_2 \vec{\mathbf{b}} + \ldots + t_k \vec{\mathbf{d}} \,|\, t_i \in \langle 0, 1 \rangle \} \tag{19.91}$$

budeme počítat jako

$$S^2 = k! m^{ij..p} m_{ij...p}. \tag{19.92}$$

Lze tedy zavést skalární součin dvou tensorů s k indexy

$$\mathbf{b}(\overleftrightarrow{\mathbf{m}}, \overleftrightarrow{\mathbf{n}}) = k! m^{ij..p} \overline{n}_{ij...p}. \tag{19.93}$$

Na tomto vzorci je vidět linearita v prvém parametru, antilinearita v druhém a positivní definitnost (pro positivně definitní metriku, $\forall \overleftrightarrow{\mathbf{m}} \neq \overleftrightarrow{\mathbf{0}}\ \mathbf{b}(\overleftrightarrow{\mathbf{m}}, \overleftrightarrow{\mathbf{m}}) > 0$).

[13] Od nynějška píšeme proužky, aby byly vzorce využitelné pro případ komplexních prostorů (se skalárním součinem s pruhem). Můžete si je odmyslit, stačí-li vám reálná varianta.

VĚTA. Výše definovaný skalární součin antisymetrických tensorů splňuje podmínku

$$\mathbf{b}(\vec{\mathbf{v}}_1 \wedge \ldots \wedge \vec{\mathbf{v}}_k, \vec{\mathbf{w}}_1 \wedge \ldots \wedge \vec{\mathbf{w}}_k) = \det \mathbf{G}, \tag{19.94}$$

kde $\mathbf{G} = (g_{ij})$ je **Grammova matice** souborů vektorů a je

$$g_{ij} = \mathbf{b}(\vec{\mathbf{v}}_i, \vec{\mathbf{w}}_j) = v_{ik}\overline{w}_j^{\,k}, \tag{19.95}$$

máme-li skalární součin vektorů zadán uvedeným způsobem.

Konkrétně, je-li $\vec{\mathbf{v}}_i = \vec{\mathbf{w}}_i$ a navíc jsou všechny $\vec{\mathbf{v}}_i$ na sebe kolmé, uvedený determinant má hodnotu součinu čtverců norem vektorů $\vec{\mathbf{v}}_i$.

Vidíme, že výraz má všechny požadované vlastnosti a navíc je i dobře normován. Protože je správně zapsán po stránce indexové, je to skalár, který se nezmění, přejdeme-li k nové basi. Přičteme-li k této invarianci vůči rotacím ještě neměnnost při přičítání k vektoru násobků vektorů ostatních (i samotný tensor je vůči tomuto invariantní), lze věřit tomu, že jsme našli tu pravou formuli pro výpočet obsahu.

DŮKAZ. *Rozepíšeme-li skalární součin do tvaru $n!m^{ij\cdots p}m_{ij\ldots p}$, dostaneme*

$$\frac{k!}{(k!)^2}\sum_{\pi,\pi'} v_1^{\pi(i)}v_2^{\pi(j)}\ldots v_k^{\pi(p)}\overline{w}_{1,\pi'(i)}\ldots\overline{w}_{k,\pi'(p)}\text{znak}\,\pi\cdot\text{znak}\,\pi'. \tag{19.96}$$

Nyní najdeme např. k činiteli $v_1^{\pi(i)}$ takový činitel mezi w, aby měl index také $\pi(i)$. Bude to ten s tím písmenem $i,\ldots,p$, kterému permutace π' přiřadí $\pi(i)$, to jest s písmenem $\pi'^{-1}(\pi(i))$. Dojdeme tak ke tvaru

$$\frac{1}{k!}\sum_{\pi,\pi'}\text{znak}\,\pi\cdot\text{znak}\,\pi'\cdot v_1^{\pi(i)}\overline{w}_{\pi'^{-1}(\pi(1)),\pi'^{-1}(\pi(i))}\cdots v_1^{\pi(p)}\overline{w}_{\pi'^{-1}(\pi(k)),\pi'^{-1}(\pi(p))}. \tag{19.97}$$

Ovšem označení hluchých indexů lze jakkoli prostřídat a psát místo všech $\pi(i),\ldots,\pi(p)$ přímo $i,\ldots,p$ a sumace podle π tak přejde na prosté násobení $k!$ (všechny sčítance jsou stejné). Máme tedy výsledek, v němž poznáváme $\det\mathbf{G}$, jelikož $\text{znak}\,\pi'$ je týž jako $\text{znak}\,\pi'^{-1}$ a sumace přes inversní permutace je totéž, co sumace přes permutace.

$$\sum_{\pi'}\text{znak}\,\pi'\cdot v_1^i\overline{w}_{1,\pi'^{-1}(i)}\cdot\ldots\cdot v_k^p\overline{w}_{k,\pi'^{-1}(p)} \tag{19.98}$$

Všechny souvislosti mohou mít mnoho výkladů a my uvádíme několik reformulací. Podrobněji viz další literaturu, třeba [21].

VĚTA PRVÁ. Nechť $\vec{\mathbf{v}}_i = \vec{\mathbf{e}}_j a^j{}_i$, kde $\vec{\mathbf{e}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{e}}_n$ je base $\mathbb{E}$. Pak

$$\vec{\mathbf{v}}_1 \wedge \ldots \wedge \vec{\mathbf{v}}_k = \sum_{\Omega} \det \mathbf{A}^{\Omega} \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\omega_1} \wedge \ldots \wedge \vec{\mathbf{e}}_{\omega_k}, \tag{19.99}$$

kde $\mathbf{A}^{\Omega}$ označuje matici vzniklou z (vysoké) matice $\mathbf{A}$ výběrem řádků s indexy $\omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_k$ a sumace ve vzorci se provádí přes všechny takovéto výběry Ω.

K důkazu vám stačí definice determinantu.

VĚTA DRUHÁ. Nechť $\mathbf{b}(\vec{.}, \vec{.})$ je skalární součin na $\mathbb{E}$ a nechť $\vec{\mathbf{e}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{e}}_n$ je ortonormální base $\mathbb{E}$. Pak vzhledem ke skalárnímu součinu platí následující

ZOBECNĚNÍ PYTHAGOROVY VĚTY.

$$\|\vec{\mathbf{v}}_1 \wedge \ldots \wedge \vec{\mathbf{v}}_k\|^2 = \sum_{\Omega} \left|\det \mathbf{A}^{\Omega}\right|^2 \tag{19.100}$$

a vysazená formule věty prvé dává ortogonální rozklad tensoru $\vec{\mathbf{v}}_1 \wedge \ldots \wedge \vec{\mathbf{v}}_k$.

DŮSLEDEK. Nechť $\mathbf{A}$ je libovolná „štíhlá“ matice o k sloupcích a n řádcích. Označme symbolem $\mathbf{G}$ její **Grammovu matici**

$$\mathbf{G} = \mathbf{A}^* \mathbf{A}. \tag{19.101}$$

(V reálném případě si místo adjunkce představte transponování.[14]) Potom platí vzorec

$$\det \mathbf{G} = \sum_{\Omega} \left|\det \mathbf{A}^{\Omega}\right|^2, \tag{19.102}$$

kde sumace je přes všechny vybrané k-tice $\omega_1 < \ldots < \omega_k$ z množiny indexů $1, \ldots, n$.

PRAVIDLO PRO ZAPAMATOVÁNÍ. `Máme-li k-rozměrný rovnoběžnostěn vymezený vektory` $\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots \vec{\mathbf{v}}_k$, `tak jeho k-rozměrný "objem" V počítáme vzorcem` $V = \sqrt{\det \mathbf{G}}$, `kde` $\mathbf{G} = \mathbf{A}^*\mathbf{A}$ `a do sloupců matice` $\mathbf{A}$ `píšeme souřadnice vektorů` $\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots \vec{\mathbf{v}}_k$. `(Někdy může být výhodnější vzít místo`

[14] Transponování si lze představit i v komplexním případě, pak je třeba vynechat absolutní hodnotu v následujícím vzorci.

`det` $\mathbf{G}$ `pravou stranu vzorce nahoře.) Popište podrobně případy` $k = n$ `a dále všechny případy` $k \leq n \leq 3$.

<u>POZNÁMKA.</u> S pomocí techniky vnějšího součinu a zavedením skalárního součinu na $\Lambda^k(\mathbb{E}^n)$ jsme dokázali tvrzení z teorie determinantů, které bychom těžko dokazovali jenom prostředky samotné teorie determinantů. Nejúčelnější by bylo asi postupovat nepřímo, např. lze lehce dokázat, že vynásobením matice $\mathbf{A}$ zprava nějakou unitární (resp. ortogonální) maticí se nezmění ani jedna strana zobecněné Pythagorovy rovnosti. (Každý si to může zkusit.) Navíc má rozklad z věty prvé významnou geometrickou interpretaci:

Mějme tři vektory

$$\vec{\mathbf{e}}_1 = \begin{pmatrix} x \\ \circ \\ \circ \end{pmatrix}, \qquad \vec{\mathbf{e}}_2 = \begin{pmatrix} \circ \\ y \\ \circ \end{pmatrix}, \qquad \vec{\mathbf{e}}_3 = \begin{pmatrix} \circ \\ \circ \\ z \end{pmatrix} \tag{19.103}$$

a zajímejme se o úseč prvního oktantu, to jest plochu trojúhelníku s vrcholy v bodech s polohovými vektory $\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3$.

Dohodněme se lokálně, že $\vec{\mathbf{v}} \wedge \vec{\mathbf{w}}$ bude značit plochu trojúhelníka s dvěma stranami $\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ (tedy polovinu rovnoběžníka). Potom lze tensor úseče psát jako

$$(\vec{\mathbf{e}}_3 - \vec{\mathbf{e}}_1) \wedge (\vec{\mathbf{e}}_2 - \vec{\mathbf{e}}_1) = \vec{\mathbf{e}}_3 \wedge \vec{\mathbf{e}}_2 - \vec{\mathbf{e}}_3 \wedge \vec{\mathbf{e}}_1 - \vec{\mathbf{e}}_1 \wedge \vec{\mathbf{e}}_2 \tag{19.104}$$

a (ztotožníme-li ještě vnější součiny s vektorovými, což je vám asi jasné již teď, za chvíli o tom budeme mluvit) skalární součin $\vec{\mathbf{D}} \cdot \vec{\mathbf{S}}$, kde $\vec{\mathbf{S}}$ je normálový vektor k ploše S s velikostí shodnou, jako je velikost plochy, se dá tedy psát ve tvaru

$$F_x S_x + F_y S_y + F_z S_z, \tag{19.105}$$

kde např. S_x už lze chápat jako plochu průmětu úseče do roviny $x = 0$. To má za následek, že v plošném integrálu

$$\int \vec{\mathbf{D}} \mathbf{d}\vec{\mathbf{S}} \tag{19.106}$$

nezáleží na tom, zda plochu, po níž integrujeme, trochu zhrubíme nebo nikoli.

Navíc, čtverec plochy úseče se dá podle našeho zobecnění Pythagorovy věty zapsat jako

$$P^2 = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2, \tag{19.107}$$

kde P_x apod. jsou průměty úseče do daných rovin $(x = 0)$.

<u>Vnější a vektorový součin.</u> Tensory z prostorů $\Lambda^k(\mathbb{E})$ a $\Lambda^{n-k}(\mathbb{E})$ lze ztotožnit (všimněte si alespoň, že mají stejnou dimensi) pomocí úplně antisymetrického tensoru (s n indexy) **Levi-Civitty**, totiž (κ je nějaká konvenční konstanta)

$$m^{\underbrace{ij..p}_{\mathrm{k}}} = \kappa \ldots \varepsilon^{\underbrace{ij..pq..t}_{\mathrm{n}}} M_{\overbrace{q...t}^{\mathrm{n-k}}} \tag{19.108}$$

a indexy lze spouštět a zvedat pomocí metrického tensoru.

Opět poznamenejme, že tensor ε zůstává invariantní jen při unimodulárních transformací; dokonce i mezi ortogonálními transformacemi je polovina neunimodulárních – jsou to zrcadlení (ε je **pseudoskalár**). Při nich mění ε znaménko a tedy se transformace tensoru s k indexy liší od transformace tensoru s $(n-k)$ indexy o znaménko.

Konkrétně, v trojrozměrném prostoru rozeznáváme **polární vektory** (např. $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{p}}, \vec{\mathbf{E}}$ atd.), které se při zrcadlení transformují stejně jako $\vec{\mathbf{x}}$. Vybereme-li za zrcadlení prostorovou inversi (středovou souměrnost podle počátku), změní znaménko.

Na druhé straně lze například vektorovým násobením dvou polárních vektorů dostat tensor s dvěma indexy, který lze převést na vektor, nyní však **axiální vektor** neboli **pseudovektor** (např. moment hybnosti, magnetická indukce), který při inversi znaménko nemění.

Doufáme, že již rozumíte, za jakých předpokladů lze považovat determinant – vnější součin n vektorů v n-rozměrném prostoru, který je zajisté také determinantem, za skalár.

19.3 Tensory v obecné relativitě

($\sharp\sharp$) Jak funguje Einsteinova gravitační teorie matematicky?

Máme čtyři souřadnice x^μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$ a různé tensory jsou jejich funkcemi. V prvních řadách, jde o metrický tensor $g_{\mu\nu}$. Ten udává v každém bodě geometrii. Chceme-li zjistit, jaká je délka (její čtverec) malého vektoru o složkách dx^μ umístěného v bodě x^μ, použijeme vztah

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x^\alpha) dx^\mu dx^\nu \tag{19.109}$$

s Einsteinovou sumační konvencí přes všech 16 kombinací hodnot indexů μ, ν.

Mimo jiné, metrika stačí na formulaci zákona pohybu tělesa v gravitačním poli (zákona kosmické lenivosti): tělesa se mezi dvěma body časoprostoru pohybují po takové dráze, aby vlastní čas, který na dráze naměří, byl maximální možný (alespoň ve srovnání s blízkými dráhami).

$$\delta\left(\int ds\right) = 0 \tag{19.110}$$

Tento tensor předpokládejme symetrický (obecně lze tensor druhého řádu napsat jako součet symetrické a antisymetrické části a antisymetrická část nepřispívá k ds^2) a užívejme ho na spouštění indexů: máme-li například tensor o složkách $F^{\mu\nu}$, mluvme také o tensoru se složkami $F^{\mu}_{\ \nu}$, které vypočítáme

$$F^{\mu}_{\ \nu}(x^\alpha) = g_{\kappa\nu}(x^\alpha) F^{\mu\kappa}(x^\alpha). \tag{19.111}$$

Dále si spočtěme inversní tensor (jakožto inversní matici) $g^{\mu\nu}$ takový, aby

$$g_{\mu\kappa}(x^\alpha) g^{\kappa\nu} = \delta^\nu_\mu. \tag{19.112}$$

Podotkněme, že speciální teorii relativity získáme požadavkem konstantního $g_{\mu\nu}$.

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & \circ & \circ & \circ \\ \circ & -1 & \circ & \circ \\ \circ & \circ & -1 & \circ \\ \circ & \circ & \circ & -1 \end{pmatrix} \tag{19.113}$$

(Stejné složky pak má i $g^{\mu\nu}$.) Tensoru $g^{\mu\nu}$ lze pak užít pro zvedání indexů:

$$F^{\mu\nu} = F^{\mu}_{\ \lambda} g^{\lambda\nu}. \tag{19.114}$$

Dále má smysl mluvit o determinantu $g_{\mu\nu}$ (podívej se, že pro speciálně relativistickou metriku je záporný), ba o odmocnině[15] z jeho opačné velikosti. Často se o ní mluví jako o skaláru $\sqrt{-g}$, ale po pravdě jde z hlediska transformačních vztahů přesně o antisymetrický[16] tensor Levi-Civitta se čtyřmi indexy dole, což oceníte pohledem na indexově správnou rovnici níže:

$$-\sqrt{-g}_{\alpha\beta\gamma\delta} \cdot \sqrt{-g}_{\kappa\lambda\mu\nu} = 4!\mathrm{antisym}_{\kappa\lambda\mu\nu} g_{\alpha\kappa} g_{\beta\lambda} g_{\gamma\mu} g_{\delta\nu}. \tag{19.115}$$

[15] Udává cosi jako hustotu fysických m^4 na jednotkovou čtyřrozměrnou krychli v souřadnicích; je to názorné při diagonálním $g_{\mu\nu}$.

[16] Je třeba se dohodnout na znaménkové konvenci, např. $\sqrt{-g}_{0123} > 0$ (pro pravotočivé soustavy).

Každý tensor lze derivovat. Derivaci podle x^μ značíme ∂_μ namísto neprůhledného $\partial/\partial x^\mu$, takže

$$\partial_\mu x^\nu = \delta^\nu_\mu. \tag{19.116}$$

Tímto způsobem lze z tensoru dostat veličinu s jedním indexem dole navíc.

Takto získaná veličina se však nebude transformovat „správným způsobem“ při transformaci souřadnic (nepůjde-li o derivaci skaláru nebo obecněji o vnější - tj. antisymetrisovanou derivaci **diferenciální formy**, tj. úplně antisymetrického tensoru).

Co je to „správný způsob transformace“? Na čtyřrozměrném časoprostoru mějme dvě sady souřadnic; každému bodu přiřaďme dvě čtveřice čísel x^μ a $x^{\mu'}$ (to, že jde o souřadnice v čárkovaném systému, značíme pouze čárkami u indexů). Lze si (alespoň lokálně) představit x^μ jako funkce $x^{\mu'}$ nebo i naopak. Potom správný vztah mezi složkami nějakého tensoru $\overleftrightarrow{\mathbf{t}}$ musí být

$$t^{\alpha\beta\dots}{}_{\gamma\delta\dots} = \partial_{\alpha'} x^\alpha \partial_{\beta'} x^\beta \dots t^{\alpha'\beta'\dots}{}_{\gamma'\delta'\dots} \partial_\gamma x^{\gamma'} \partial_\delta x^{\delta'} \dots . \tag{19.117}$$

Například, jsou-li x^μ a $x^{\nu'}$ svázány lineárně ($c^\mu{}_{\nu'}$ je konstantní)

$$x^\mu = c^\mu{}_{\nu'} x^{\nu'}, \tag{19.118}$$

platí po zderivování např.

$$\partial_{\kappa'} x^\mu = c^\mu{}_{\nu'} \delta^{\nu'}_{\kappa'} = c^\mu{}_{\kappa'} \tag{19.119}$$

a vztah mezi tensory lze psát ($(c^{-1})^{\alpha'}_\alpha$ jsou elementy inversní matice)

$$t^{\alpha\beta\dots}{}_{\gamma\delta\dots} = c^\alpha{}_{\alpha'} c^\beta{}_{\beta'} \dots t^{\alpha'\beta'\dots}{}_{\gamma'\delta'\dots} (c^{-1})^{\gamma'}_\gamma (c^{-1})^{\delta'}_\delta \dots . \tag{19.120}$$

Pouhým zderivováním prvního vztahu mezi složkami v různých systémech (aplikací ∂_λ zleva) se přesvědčíte, že $\partial_\lambda t^{\alpha\beta\dots}_{\gamma\delta\dots}$ nemá v čárkovaném systému požadovaný tvar

$$\partial_{\lambda'} t^{\alpha'\beta'\dots}_{\gamma'\delta'\dots}, \tag{19.121}$$

ale obsahuje navíc členy typu

$$\partial_\lambda \partial_{\alpha'}(x^\alpha) \partial_{\beta'} x^\beta \dots, \tag{19.122}$$

z nichž vliv nečárkovaného systému nevypudíme. Zajisté, pro zmíněnou lineární transformaci souřadnic vymizí, nikoli však obecně.

Východisko spočívá v zavedení **kovariantní (Christoffelovy) derivace**. Definujeme **Christoffelův symbol** předpisem

$$\Gamma_{\mu\nu}{}^{\alpha} \equiv \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\omega}(\partial_\nu g_{\mu\omega} + \partial_\mu g_{\nu\omega} - \partial_\omega g_{\mu\nu}) \tag{19.123}$$

(sám se netransformuje jako správný tensor) a místo derivace ∂_μ užívejme kovariantní derivaci ∇_μ, která obsahuje navíc členy, které se „navěsí“ následujícím způsobem na každý index derivovaného tensoru

$$\nabla_\mu(T^{\gamma\delta\dots}_{\alpha\beta\dots}) = \partial_\mu(T^{\gamma\delta\dots}_{\alpha\beta\dots}) + \Gamma^{\nu}_{\mu\alpha} T^{\gamma\delta\dots}_{\nu\beta\dots} + \Gamma^{\nu}_{\mu\beta} T^{\gamma\delta\dots}_{\alpha\nu} + \dots - \Gamma^{\gamma}_{\mu\nu} T^{\nu\delta\dots}_{\alpha\beta\dots} - \Gamma^{\delta}_{\mu\nu} T^{\gamma\nu\dots}_{\alpha\beta} \dots \tag{19.124}$$

Pouhými úpravami si můžete dopočítat, že $\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = 0$, $\nabla_\mu g^{\alpha\beta} = 0$ a že $\nabla_\lambda t^{\alpha\beta\dots}_{\gamma\delta\dots}$ se již transformuje správným způsobem.

Také je zajímavé, že i kovariantní derivace splňuje **Leibnizovo pravidlo** (pro derivování součinu)

$$\nabla_\mu t^{\alpha\dots}_{\gamma\dots} u^{\lambda\dots}_{\nu\dots} = \nabla_\mu(t^{\alpha\dots}_{\gamma\dots}) u^{\lambda\dots}_{\nu\dots} + t^{\alpha\dots}_{\gamma\dots} \nabla_\mu(u^{\lambda\dots}_{\nu\dots}). \tag{19.125}$$

Mimo jiné, pokud se budete snažit nalézt správně se transformující tensor, obsahující druhé derivace metriky, dostanete **Riemannův tensor křivosti**

$$R_{\beta\mu,\nu\alpha} = -\partial_\alpha \Gamma^{\beta}_{\mu\nu} + \Gamma^{\beta}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\alpha} + \partial_\nu \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\sigma\alpha}, \tag{19.126}$$

z něhož nás často zajímá jen úžení, tzv. **tensor Ricciho**

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu,\nu\alpha} \tag{19.127}$$

a skalární křivost

$$R = R_\mu{}^\mu \equiv R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}. \tag{19.128}$$

Můžete ověřit, že Riemannův tensor je antisymetrický vůči záměně indexů prvé nebo poslední dvojice a symetrický vůči záměně těchto dvojic a že splňuje cyklické pravidlo

$$R_{\alpha\beta,\gamma\delta} + R_{\beta\gamma,\alpha\delta} + R_{\gamma\alpha,\beta\delta} = 0. \tag{19.129}$$

Díky těmto vlastnostem je jasné, že Riemannův tensor ve dvou dimensích má jen jednu nezávislou složku R_{1212} a ve čtyřech dimensích složek $20 = 6 \cdot 7/2 - 1$. Riemannův tensor má jednu názornou interpretaci: objedeme-li vektorem V obrys infinitesimální dvojrozměrné plochy popsané antisymetrickým tensorem dS^{ij} tak, abychom se chovali jako v plochém prostoru a s vektorem neotáčeli (**paralelní posun**), potom se nám vektor V trochu stočí o hodnotu

$$\delta V^k = dS^{ij} R_{ij}{}^k{}_l V^l. \tag{19.130}$$

Při všech uzavřených objížďkách vektor může rotovat[17] rotací z grupy známé jako **grupa holonomií**. V plochém prostoru je to jen triviální grupa s jediným prvkem, v náhodně vybraném zakřiveném prostoru to bývá grupa $\mathbb{SO}(n)$, kde n je dimense **variety** (anglicky **manifoldu**, to jest onoho zakřiveného prostoru, o němž jde řeč, který si lze představit, že je umístěný ve vícerozměrném prostoru). Existují však i variety s grupou holonomií $\mathbb{U}(n)$.

Již jen dodáme, že pomocí Ricciho tensoru se formuluje **deset rovnic gravitace** (nebo jedna tensorová, chcete-li), popisujících zakřivení prostoru v závislosti na hmotě v něm

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = -\zeta T_{\alpha\beta}, \tag{19.131}$$

kde ζ je nějaký součin Newtonovy gravitační konstanty a dalších konstant (obvykle stavíme $c = 1$) a $T^{\mu\nu}$ je **tensor hmoty**: v případě speciální relativity vyjadřuje hustotu (pro $\mu = 0$) nebo hustotu toku (pro $\mu = 1, 2, 3$) energie (pro $\nu = 0$) nebo složky hybnosti ($\nu = 1, 2, 3$).

Když už jsme se zmínili o kovariantní derivaci, je na místě také pohovořit o jiné **kovariantní derivaci**, taktéž splňující Leibnizovo pravidlo (předpokládáme-li, že náboj pole, které je součinem dvou polí, je součtem nábojů těchto polí), totiž

$$\nabla_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu \tag{19.132}$$

pro případ elektromagnetismu a analogických v případě silných či elektroslabých interakcí.

Daná derivace vynásobená i dává

$$\hat{p}_\mu - qA_\mu, \tag{19.133}$$

kde q je náboj pole a A_μ je čtyřpotenciál. V teoretické mechanice či jinde budete hovořit o $\hat{p}_\mu$ jako o (operátoru) **zobecněné hybnosti** a $\hat{p}_\mu - qA_\mu$ odpovídá onomu klasickému součinu hmotnosti a (čtyřvektoru) rychlosti.

Názorný výklad souvislostí s Christoffelovou derivací dávají **Kaluzovy-Kleinovy teorie**. Předpokládejme, že kromě obvyklých čtyř souřadnic v časoprostoru máme ještě pátou (x^5), která se neprojevuje, protože je cyklická

[17] Každé uzavřené křivce odpovídá jeden prvek – jedno otočení z grupy holonomií.

s periodou $2\pi R$, neboli protože je **svinutá** (**kompaktifikovaná**) na kružnici o (malinkém) poloměru R. Pak lze pole (jež je funkcí pěti souřadnic) rozvinout do (komplexní) Fourierovy řady podle souřadnice x_5:

$$\phi(x^0, x^1, x^2, x^3, x^5) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi_k(x^0, x^1, x^2, x^3) \exp(ikx^5/R). \tag{19.134}$$

Uvědomme si, že k lze interpretovat jako náboj pole ϕ_k vyjádřený v elementárních nábojích, a zajímejme se zvláště o pole (pro konkrétnost) ϕ_1, které se mění v závislosti na páté souřadnici jako $\exp(ix^5/R)$.

Budiž element metriky g_{55} konstantní (pro určitost -1 jako např. g_{11}), zato elementy $g_{\mu 5}$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) ztotožníme s potenciálem (až na konstantu) a derivaci ∇_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) počítejme ve směru, v němž je $g_{\mu\nu}$ diagonální:

$$\nabla_\mu = \partial_\mu - g_{\mu 5}\partial_5 \tag{19.135}$$

Ovšem ∂_5 lze díky zvolené závislosti na páté souřadnici psát jako násobení faktorem ik/R.

Kalibrační invarianci lze vyložit jako speciální případ invariance vůči transformacím souřadnic. Pokud v každém bodě (x^μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$) určíme Δx^5 (dostatečně pomalu se měnící, abychom neohrozili konstantnost g_{55}), pole ϕ_k se násobí v každém bodě komplexní jednotkou

$$\phi_k(x^\mu) \to \phi_k(x^\mu) \exp(ik\Delta x^5/R) \tag{19.136}$$

a elementy metriky $g_{\mu 5}$ se změní podle standardního pravidla pro transformaci tensoru při transformaci metriky

$$g_{\mu 5} \to g_{\mu 5} - \partial_\mu \Delta x^5, \tag{19.137}$$

v čemž dobře rozpoznáme vzorce pro změnu potenciálu.

19.4 Spinory

Viděli jsme, že lze konstruovat tensory s libovolným počtem indexů nahoře a dole. V této sekci ukážeme, že je možné i cosi opačného, totiž zavést „poloviční“ indexy, abychom veličinu transformující se jako vektor získat jako součin dvou elementárnějších objektů, říkejme jim **spinvektory**, podobně, jako jsme získali tensor (tensorovým) násobením dvou vektorů.

Hned na počátku upozorňujeme, že budeme mluvit o případu speciální (!) teorie relativity, tj. budeme uvažovat jen transformace grupy $\mathbb{SO}(3,1)$

(kterou nahradíme $\mathbb{SL}(2,\mathbb{C})$, která je s ní až na diskrétní rozdíly isomorfní) a nikoli celé grupy $\mathbb{GL}(4)$ (a nakonec se podíváme na její podgrupu prostorových rotací $\mathbb{SO}(3)$, nahraženou $\mathbb{SU}(2)$, a nikoli na $\mathbb{GL}(3)$).

Spinory je možné užívat efektivně i v obecné relativitě, ale postup v zásadě spočívá v zavedení v každém bodě nové base (tzv. stonožky nebo v případě čtyř rozměrů čtyřnožky, pro které se vžila německá označení **vielbein** a **vierbein**), která se chová jako obvyklá base ve speciální relativitě.

Začneme trochu neočekávaně přímo přepisem vektoru do spinorové formy: vektorové indexy mohly nabývat čtyř různých hodnot. My sestavíme ze složek reálného vektoru V^μ čtyři kombinace[18]

$$\begin{aligned} &V^{0\bar{0}} = (x^0 + x^3)/\sqrt{2},\ V^{0\bar{1}} = (x^1 + ix^2)/\sqrt{2}, \\ &V^{1\bar{0}} = (x^1 - ix^2)/\sqrt{2},\ V^{1\bar{1}} = (x^0 - x^3)/\sqrt{2}, \end{aligned} \tag{19.138}$$

které však již nejsou reálné, ale splňují

$$V^{A\bar{B}} = \overline{(V^{B\bar{A}})}, \tag{19.139}$$

kde indexy A, B nabývají hodnot $0, 1$ a indexy $\bar{A}, \bar{B}$ hodnot $\bar{0}, \bar{1}$ (zápis byl jen zkratkovitý, pod $\bar{B}$ jsme zde měli na mysli B, nad nímž se nakreslí pruh, v dalším textu index A nebude souviset s $\bar{A}$ o nic více, než s $\bar{B}$). Používáme upraveného formalismu Rogera Penrose a Wolfganga Rindlera, kteří místo pruhů píší čárky; úprava nespočívá jen v tomto; my budeme vždy uvažovat tak, že pokud existuje nějaký spinor např.

$$S^{ABC\bar{D}\bar{E}\bar{F}\bar{G}}, \tag{19.140}$$

potom existuje i spinor

$$S^{DEFG\bar{A}\bar{B}\bar{C}}, \tag{19.141}$$

který má komplexně sdružené složky (v případě, až půjde o operátory, budou hermitovsky sdružené) a spinor se stejným počtem pruhovaných a nepruhovaných indexů splňuje určitou podmínku reálnosti, analogickou podmínce pro vektor. Např.

$$P^{00010\bar{1}\bar{0}\bar{1}\bar{0}\bar{1}} = \overline{(P^{10101\bar{0}\bar{0}\bar{0}\bar{1}\bar{0}})} \quad \text{a} \quad P^{00011\bar{0}\bar{0}\bar{0}\bar{1}\bar{1}} \text{ je reálné číslo.} \tag{19.142}$$

Za určitou dobu bude také zřejmé, že naše podmínky zůstanou splněny i po transformaci.

[18] Jako příklad odlišné konvence uvádíme, že např. Landau ve svém *Úvodu do teoretické fyziky 2 – kvantová mechanika* používá horní indexy 1,2 místo našich horních $\bar{0}, \bar{1}$ a horní indexy $\dot{1}, \dot{2}$ místo našich dolních $0, 1$.

Jak to všechno funguje?

Hledáme-li způsob, kterak vyjádřit „čtverec délky čtyřvektoru“

$$V_\mu V^\mu = g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = V^0 V^0 - V^1 V^1 - V^2 V^2 - V^3 V^3, \tag{19.143}$$

zjistíme, že ho lze psát jako dvojnásobek (to kvůli těm odmocninám ze dvou) determinantu

$$2 \cdot (V^{0\bar{0}} V^{1\bar{1}} - V^{0\bar{1}} V^{1\bar{0}}). \tag{19.144}$$

To je velmi příjemné, protože použitím nových (antisymetrických) spinorů s dvěma indexy dole

$$\varepsilon_{AB} = -\varepsilon_{BA}, \quad \varepsilon_{\bar{A}\bar{B}} = -\varepsilon_{\bar{B}\bar{A}}, \quad \varepsilon_{01} = \varepsilon_{\bar{0}\bar{1}} = 1 \tag{19.145}$$

lze čtverec délky tohoto čtyřvektoru psát jako (Einsteinova sumační konvence, A a $\bar{A}$ zde spolu nesouvisí)

$$\varepsilon_{AB} \varepsilon_{\bar{A}\bar{B}} V^{A\bar{A}} V^{B\bar{B}}. \tag{19.146}$$

Chceme-li nyní přejít od starých souřadnic k novým, lze vzít místo matice z grupy $\mathbb{SO}(1,3)$ matici z grupy $\mathbb{SL}(2,\mathbb{C})$. Mějme tedy soubor čtyř komplexních čísel (z nichž jsou nezávislé tři, jelikož determinant má být jedna, mají tudíž informační hodnotu šesti reálných čísel, stejně jako prvky $\mathbb{SO}(1,3)$) $t^A_{\ A'}$, což je „matice přechodu“ od nečárkované base k čárkované

$$S^A = t^A_{\ A'} S^{A'}, \tag{19.147}$$

umožňující vypočítat souřadnice v nečárkované basi z těch v čárkované.

Dále pod $t^{\bar{A}}_{\ \bar{A}'}$ mějme na mysli (jak jsme se dohodli) komplexně sdružená čísla. Potom lze vyjádřit jakýkoli spinor (s horními indexy) v nečárkované basi, např. vektor

$$V^{A\bar{B}} = t^A_{\ A'} t^{\bar{B}}_{\ \bar{B}'} V^{A'\bar{B}'}. \tag{19.148}$$

Poznamenejme, že podmínka pro invarianci ε^{AB} vůči této transformaci je právě podmínka pro unimodularitu transformační matice (zkontrolujte):

$$\varepsilon^{AB} = t^A_{\ A'} t^B_{\ B'} \varepsilon^{A'B'}. \tag{19.149}$$

Můžete se přesvědčit, že na počátku uvedenou podmínku „reality“

$$V^{A\bar{B}} = \overline{(V^{B\bar{A}})} \tag{19.150}$$

bude splňovat vektor i po transformaci, splňoval-li ji před ní (a stejně tak víceindexové spinory).

Navíc, jako obdobu zvedání a spouštění indexů pomocí $g_{\mu\nu}$

$$t_\mu = g_{\mu\nu} t^\nu \tag{19.151}$$

budeme spouštět a zvedat indexy pomocí ε_{AB}; je zde ale třeba brát ohled na pořadí indexů, poněvadž ε_{AB} je antisymetrický (ne tedy symetrický). Dohodněme se na následující konvenci: ε^{AB} bude zase antisymetrický a $\varepsilon^{01} = 1$. Dále index 0 nahoře bude totéž, co 1 dole (podle „gravitační pomůcky“), zatímco 1 nahoře bude opačné proti 0 dole:

$$\lambda^0 = \lambda_1, \quad \lambda^1 = -\lambda_0, \tag{19.152}$$

s anonymními indexy pišme

$$\lambda_B = \lambda^A \varepsilon_{AB}, \quad \lambda^C = \varepsilon^{CD} \lambda_D, \tag{19.153}$$

obdobně pro víceindexové spinory (ostatní indexy beze změny) a stejně pro pruhované indexy.

Rozklad na symetrické spinory. Budeme si všímat jen případu spinoru, symetrického vůči permutacím ve dvou skupinách indexů. Není totiž obtížné násobným provedením následujících úvah rozložit spinor na součiny ε symbolů a spinorů symetrických vůči záměně nějakých dvou indexů, dále na součiny ε a spinorů symetrických vůči permutacím ve dvou skupinách, z nichž jednou je právě ona dvojice atd.

Náš případ bude ukazovat to, co se dá fysikálně popsat jako „skládání momentů hybnosti“. Mějme kupříkladu různé spinory $A_{(i)ABC}$, $B_{(i)DEFG}$, obé symetrické vůči všem permutacím indexů. V takovém případě závisí pouze na tom, kolik indexů z množiny $\{A, B, C\}$ resp. $\{D, E, F, G\}$ je jednotka. Pokud má spinor k spinorových indexů, může mezi nimi být 0 až k jednotek ($k + 1$ variant) a tedy obsahuje $k + 1$ nezávislých složek. V kvantové mechanice se dozvíte, že lze částici popisované takovým spinorem připsat spin $s = k/2$ (celé nebo polocelé číslo) a $k+1 = 2s+1$ složek bude odpovídat tzv. amplitudám pravděpodobnosti, že se částice nachází ve stavu s průmětem spinu do osy z $s_z = -s, -s+1, \ldots, s-1, s$.

Ale zpět k matematice. Spinor $S_{ABC,DEFG}$ symetrický vůči permutacím v obou skupinách

$$S_{ABC,DEFG} = S_{BAC,DEFG} = S_{ABC,EDFG} = \ldots, \tag{19.154}$$

který si lze představit např. jako nějakou sumu

$$S_{ABC,DEFG} = \sum_i A_{ABC} B_{DEFG}, \tag{19.155}$$

lze rozložit způsobem

$$\begin{aligned} S_{ABC,DEFG} = \mathrm{sym}_{ABC}\mathrm{sym}_{DEFG}(S^{7/2}_{ABCDEFG} + S^{5/2}_{ABDEF}\varepsilon_{CG}+ \\ +S^{3/2}_{ADE}\varepsilon_{BF}\varepsilon_{CG} + S^{1/2}_{D}\varepsilon_{AE}\varepsilon_{BF}\varepsilon_{CG}), \end{aligned} \tag{19.156}$$

kde čísla $7/2\ldots$ znamenají polovinu počtu indexů, tj. spin.

Spinory $S^{7/2}_{ABCDEFG}$ lze spočítat zpětně jako např.

$$S^{5/2}_{ABDEF} = \kappa \cdot \mathrm{sym}_{ABDEF} S_{ABC,DEFG}\varepsilon^{CG}, \tag{19.157}$$

ovšem kombinatorickou konstantu κ není lehké spočítat.

Fysikálně se věc vykládá tak, že dvě částice A,B se spiny s_a, s_b (v našem případě 3/2 a 2) mohou vytvořit „složenou" částici se spiny v intervalu (krok minus jedna)

$$s_a + s_b, s_a + s_b - 1, \ldots, |s_a - s_b|\,. \tag{19.158}$$

Pokud všem těmto řečem nerozumíte, alespoň se přesvědčte, že počet složek je stejný:

$$(2s_a + 1)(2s_b + 1) = \sum_{s=|s_a-s_b|}^{s_a+s_b} (2s + 1). \tag{19.159}$$

Trojrozměrné transformace

Budeme si všímat Lorentzových transformací, fixujících navíc jakýkoli vektor ve směru času, tedy i vektor

$$V^{A\bar{B}} = \begin{pmatrix} 1 & \circ \\ \circ & 1 \end{pmatrix} \tag{19.160}$$

délky $\sqrt{2}$, tj. $V^\mu = (\sqrt{2}, \circ, \circ, \circ)$. Pomocí něho lze „přepočítávat" horní nepruhované indexy na dolní pruhované a naopak.

$$S^A = V^{A\bar{B}} S_{\bar{B}}, \quad S^{\bar{B}} = S_A V^{A\bar{B}} \ldots \tag{19.161}$$

Ve vzorci pro invarianci $V^{A\bar{B}}$ napsaném jako ($t^{\bar{B}}_{\bar{B}'}$ zde znamená $t^{\bar{B}}_{\bar{B}'} = \overline{t^{B}_{B'}}$)

$$V^{A\bar{B}} = t^A_{A'} V^{A'\bar{B}'} t^{\bar{B}}_{\bar{B}'} = V^{A'\bar{B}'} \tag{19.162}$$

lze interpretovat V jako jednotkovou matici, a tak navíc o matici přechodu t (o niž už víme, že je unimodulární) můžeme říci, že je unitární ($\mathbf{tt}^* = \mathbf{1}$).

Takové transformace jednoduše tvoří podgrupu $\mathbb{SU}(2)$ grupy $\mathbb{SL}(2,\mathbb{C})$. Jak vypadá taková matice z $\mathbb{SU}(2)$? Označíme-li ji jako

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \tag{19.163}$$

má být

$$\mathbf{AA}^* = \mathbf{1}, \tag{19.164}$$

z čehož mimo jiné $\alpha\overline{\gamma} + \beta\overline{\delta} = 0$ lze vyjádřit δ. Navíc má být determinant jednotkový

$$1 = \alpha\delta - \beta\gamma = -\frac{\alpha\overline{\alpha}\gamma}{\overline{\beta}} - \beta\gamma = -\frac{\gamma}{\overline{\beta}}(\alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta}), \tag{19.165}$$

ale protože $\alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta} = 1$, máme výsledné $\gamma = -\overline{\beta}$ a z toho také $\delta = \overline{\alpha}$.

To je příjemná věc: matice $\mathbf{A}$ z grupy $\mathbb{SU}(2)$ má tvar

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \text{kde} \quad \alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta} = 1. \tag{19.166}$$

Nepožadujeme-li poslední podmínku, dostaneme množinu matic isomorfní tělesu kvaternionů. Ověřte zvláště, že matice přiřazená (kvaternionovému) součinu dvou kvaternionů je (maticovým) součinem matic přiřazených těmto kvaternionům. Jako u náhrady komplexního čísla maticí 2×2 si i zde všimněte, že

$$(\mathbf{Q}^*)^{JJ} = (\mathbf{Q}^{JJ})^*, \tag{19.167}$$

značí-li $\mathbf{Q}^{JJ}$ komplexní matici $2n \times 2n$ vzniklou z kvaternionické matice $\mathbf{Q}$ uvedeným rozepsáním (a viz poznámku pod čarou).

$$\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mapsto \begin{pmatrix} \alpha + \beta i & \gamma + \delta i \\ -\gamma + \delta i & \alpha - \beta i \end{pmatrix} \tag{19.168}$$

Když už jsme tak daleko, můžeme již také říci, že symplektická grupa $\mathbb{S}p(2n)$ není nic jiného než grupa unitárních matic[19] $n \times n$; tentokrát nikoli reálných ani komplexních, ale kvaternionických.

[19] Matice $\mathbf{A}$, že $\mathbf{AA}^* = \mathbf{1}$, kde pod adjungovanou maticí míníme matici transponovanou a kvaternionicky sdruženou: $(\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k)^* = \alpha - \beta i - \gamma j - \delta k$.

Za matici $\mathbf{K}$ z definice na straně 115 si představte komplexní matici $2n \times 2n$, která je nulová kromě „tlusté“ diagonály, kde má n bloků 2×2 tvaru

$$\begin{pmatrix} \circ & -1 \\ 1 & \circ \end{pmatrix}. \tag{19.169}$$

Snad neušlo vaší pozornosti, že při rotaci o 2π se změní spinory s lichým počtem indexů na opačné (a až při rotaci o 4π se vrátí na původní hodnotu).

Je na čase, abychom vysvětlili kosmetický rozdíl mezi grupou $\mathbb{SO}(n)$ a $\mathbb{S}pin(n)$. Říkejme **rotování** $\hat{R}$ každému spojitému (každý maticový element je spojitý) zobrazení[20] intervalu do grupy ortogonálních matic (zajímáme se hlavně o $n = 3$)

$$\hat{R} : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{SO}(n) \tag{19.170}$$

takovému, že $\hat{R}(0) = \mathbf{1}$. Ekvivalencí „$\approx$“ dvou rotování $\hat{R}_{(0)}$ a $\hat{R}_{(1)}$ mějme na mysli fakt, že existuje spojité (všechny maticové elementy $\hat{R}_v(t)$ jsou spojité jakožto funkce dvou proměnných v, t) zobrazení

$$\{v \mapsto \hat{R}_v\} : \langle 0, 1\rangle \to \mathcal{P}_{\text{prostor rotování}} \tag{19.171}$$

takové, že $\forall v \in \langle 0, 1\rangle \hat{R}_v(1) = \hat{R}_0(1)$, $\hat{R}_{(0)}(t) = \hat{R}_0(t)$ a $\hat{R}_{(1)}(t) = \hat{R}_1(t)$. (Jsou ekvivalentní, pokud lze plynule přejít od jednoho rotování k druhému; nutnou podmínkou ekvivalence je rovnost koncových matic $\hat{R}_{(0)}(1) = \hat{R}_{(1)}(1)$.) Ukažte **reflexivitu**, **symetričnost** a **transitivitu**[21] zavedené ekvivalence.

Na rotováních zavedeme rozumnou binární operaci

$$[\hat{R}_0 \cdot \hat{R}_1](t) = \begin{cases} \hat{R}_0(2t) \text{ pro } 0 \le t \le 1/2 \\ \hat{R}_0(1) \cdot \hat{R}_1(2t-1) \text{ pro } t \le 1/2 \le 1 \end{cases}. \tag{19.172}$$

(Polovinu času provádíme dvakrát zrychleně rotaci $\hat{R}_0$ a druhou polovinu $\hat{R}_1$. Lehce ukážete, že náhradou činitelů za ekvivalentní rotování se i součin změní na ekvivalentní.)

Jelikož $[\hat{R}_0 \cdot \hat{R}_1](1) = \hat{R}_0(1) \cdot \hat{R}_1(1)$, dostaneme grupu téměř isomorfní s $\mathbb{SO}(n)$, až na jednu drobnost. Rotování o 2π kolem osy z

$$\hat{R}(t) = \begin{pmatrix} 1 & \circ & \circ \\ \circ & \cos 2\pi t & -\sin 2\pi t \\ \circ & \sin 2\pi t & \cos 2\pi t \end{pmatrix} \tag{19.173}$$

[20] Speciální případ homotopie.

[21] Reflexivní je relace, pokud $\forall \hat{R} \quad \hat{R} \approx \hat{R}$.
Symetrická, pokud $\forall \hat{R}_0, \hat{R}_1 \quad \hat{R}_0 \approx \hat{R}_1 \Longleftrightarrow \hat{R}_1 \approx \hat{R}_0$.
Transitivní, pokud $\forall \hat{R}_0, \hat{R}_1, \hat{R}_2 \quad \hat{R}_0 \approx \hat{R}_1$ a $\hat{R}_1 \approx \hat{R}_2 \Longrightarrow \hat{R}_0 \approx \hat{R}_2$.

je ekvivalentní rotaci o 2π kolem kterékoli jiné osy a (spojitým přechodem bude rotování o 2π kolem osy, která bude plynule přecházet od osy z k ose a s tím, jak se v mění od 0 do 1), a proto je také „nehybné“ rotování ($\hat{R}(t) = \mathbf{1}$) ekvivalentní rotaci o 4π kolem jakékoli osy. (Proto nemohou existovat žádné částice se spinem, jehož dvojnásobek není celé číslo.) Ale plynulý přechod od nehybného rotování k rotování o 2π nenajdete. Matematicky řečeno, grupa $\mathbb{SU}(2)$ je narozdíl od grupy $\mathbb{SO}(3)$ **jednoduše souvislá**, protože každá uzavřená křivka v ní – rotování – lze stáhnout na bod.

Když jsme již zmínili stažitelné křivky – uvedeme zde i pojem **fundamentální grupy** π_1 dané variety. Jde o grupu všech tříd uzavřených křivek (křivky jedné třídy lze na sebe spojitě převádět) s operací danou napojením těchto křivek. Jednoduše souvislé variety tedy mají fundamentální grupu triviální, povrch genu[22] g má fundamentální grupu $\mathbb{Z}^{2g}$, sféra se ztotožněnými protějšími body má fundamentální grupu $\mathbb{Z}_2$ atd.

A tak tvoří všechny třídy ekvivalentních rotování grupu $\mathbb{S}pin(n)$ (pro $n = 3$ isomorfní $\mathbb{SU}(2)$) takovou, že existuje morfismus na $\mathbb{SO}(n)$, který přiřadí vždy dvěma prvkům $\mathbb{S}pin(n)$ jeden prvek $\mathbb{SO}(n)$.

Diracova rovnice

Pochopíte-li následující odstavce, budete se moci cítit velmi chytře, až uslyšíte, že např. relativistickou invarianci **Diracovy rovnice** dokázal až dvacet let po jejím objevení český fysik Trkal. (To samozřejmě není tak úplně pravda.)

Když hledali lidé vhodnou relativistickou úpravu Schrödingerovy rovnice, napadla je zprvu Klein-Gordonova[23] rovnice, která operátorově vyjadřuje vztah (užíváme jednotky $c = \hbar = 1$)

$$E^2 = m^2 + \vec{\mathbf{p}}^2, \quad \text{totiž} \quad (-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta)\Phi = m^2\Phi. \tag{19.174}$$

Tato rovnice je relativisticky korektní, abychom ji převedli do Hamiltonova formalismu (kde se vyskytují jen první derivace), musíme zvolit funkci dvousložkovou (Φ a $\partial/\partial t\Phi$) a nakonec zjistíme, že se pro elektron vůbec nehodí (hodí se pro pion).

[22] Míníme tím plochu, která je z topologického hlediska sférou, v níž g dvojic kruhových děr spojíme rourou. Genus jedna má tedy torus.

[23] Mnohdy zvaná Klein-Fockova.

Hledáme jiné vylepšení Schrödingerovy rovnice

$$(\frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{U})\psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi \tag{19.175}$$

a napadá nás nahradit $\hat{p}^2/2m$ relativisticky správným výrazem $\sqrt{m^2+p^2}$. Tuto odmocninu nám nezbývá počítat jinak než jako nekonečnou řadu obsahující jakkoli vysokou mocninu $\hat{p}$ čili jakkoli vysokou derivaci a ze zkušeností Taylorova vzorce (kde jsme posun vyjádřili jako exponenciálu derivace) je nám zřejmé, že výsledná teorie bude nelokální: funkce ψ v okamžiku $t+dt$ bude ovlivněna funkcí ψ v čase t v jakkoli vzdálených bodech.

Přesto se Diracovi podařilo $m^2+\hat{p}^2$ odmocnit lokálně; začal totiž operovat s vícesložkovou vlnovou funkcí. V našem spinorovém jazyce lze říci, že diracovskou vlnovou funkci tvoří dva spinory

$$\xi^{\bar{A}}, \eta_A, \tag{19.176}$$

každý z nichž se skládá z dvou komplexních složek. (Index $\bar{A}$ resp. A může být buď nula – pak jde o amplitudu, že má elektron spin nahoru – nebo jedna – spin dolů.) Rovnice napíšeme ve tvaru

$$(\hat{p}_{A\bar{A}} - eA_{A\bar{A}})\xi^{\bar{A}} = \frac{m}{\sqrt{2}}\eta_A, \quad (\hat{p}^{A\bar{A}} - eA^{A\bar{A}})\eta_A = \frac{m}{\sqrt{2}}\xi^{\bar{A}}, \tag{19.177}$$

kde $\hat{p}_{A\bar{A}} = i\partial_{A\bar{A}}$ je operátor čtyřhybnosti, $A_{A\bar{A}}$ je čtyřpotenciál, m klidová hmotnost elektronu a e jeho náboj (záporný).

Obvykle se píše Diracova rovnice ve formě matic. Píšeme-li složky vlnové funkce pod sebe do sloupce Ψ

$$\Psi^1 = \xi^{\bar{0}}, \quad \Psi^2 = \xi^{\bar{1}}, \quad \Psi^3 = \eta_0, \quad \Psi^4 = \eta_1, \tag{19.178}$$

nabudou rovnice tvar jedné

$$((\hat{p}_\mu - eA_\mu)\gamma^\mu - m)\,\vec{\boldsymbol{\Psi}} = 0, \tag{19.179}$$

kde γ^μ jsou **Diracovy matice** 4×4, které mají v naší spinorové representaci tvar

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \circ & \circ & 1 & \circ \\ \circ & \circ & \circ & 1 \\ 1 & \circ & \circ & \circ \\ \circ & 1 & \circ & \circ \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ & -1 \\ \circ & \circ & -1 & \circ \\ \circ & 1 & \circ & \circ \\ 1 & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}, \tag{19.180}$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ & i \\ \circ & \circ & -i & \circ \\ \circ & -i & \circ & \circ \\ i & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} \circ & \circ & -1 & \circ \\ \circ & \circ & \circ & 1 \\ 1 & \circ & \circ & \circ \\ \circ & -1 & \circ & \circ \end{pmatrix}. \tag{19.181}$$

Všimněte si, že dvě různé Diracovy matice antikomutují a čtverec γ^0 je jednotková, čtverec zbylých minus jednotková matice, což zapíšeme

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\mathbf{1}. \tag{19.182}$$

Navíc i-krát časová derivace Ψ, kterou píšeme pomocí hamiltoniánu jako $\mathbf{H}\Psi$, dá pro hamiltonián[24]

$$\mathbf{H} = \vec{\alpha}\hat{\vec{\mathbf{p}}} + m\beta, \tag{19.183}$$

kde jest použito obvyklé značení pro matice $\vec{\alpha} = \gamma^0\vec{\gamma}$, $\beta = \gamma^0$. Pouhým užitím antikomutačních pravidel pro matice zjistíte, že

$$\mathbf{H}^2 = m^2 + \vec{\mathbf{p}}^2, \tag{19.184}$$

což jsme na počátku chtěli.

Čtyři složky **bispinoru** jsme vybrali určitým způsobem. Stejně tak lze ale pracovat s libovolnými lineárními kombinacemi těchto složek; lze vyjádřit Ψ „v jiné basi“. Tvary γ-matic se změní, zůstanou však antikomutační relace, γ^0 zůstane hermitovská a $\gamma^{1,2,3}$ antihermitovské (pro unitární transformace).

Tak například počítáme-li, na co přechází rovnice v nerelativistickém případě (když třeba ukazujeme, že magnetický moment spojený se spinem je dvojnásobný ve srovnání s orbitálním pohybem), volíme tzv. **standardní representaci**, jelikož v ní jsou poslední dvě složky mnohem menší než první dvě (ve spinorové byly první a poslední dvě v nerelativistické limitě stejné).

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \xi^{\bar{0}} + \eta_0 \\ \xi^{\bar{1}} + \eta_1 \\ \xi^{\bar{0}} - \eta_0 \\ \xi^{\bar{1}} - \eta_1 \end{pmatrix}. \tag{19.185}$$

<u>CVIČENÍ.</u> Odvoďte tvar γ-matic ve standardní reprentaci. ($\heartsuit\heartsuit$)

[24]Pro tyto úvahy stavíme čtyřpotenciál roven nule.

19.5 Tensory a nezávislé jevy

Vraťme se na závěr z výšin obecné relativity a Diracových rovnic k něčemu přízemnějšímu – třeba k diskusi, co je to střední (kvadratická) chyba měření (v praktikách se s ní potkáte dosti, pokud po vás nebudou chtít chyby „mezní"), neboť i zde je tensor užitečným nástrojem. Nevěříte? Uveďme pár poznámek na téma „nezávislost v teorii pravděpodobnosti". Asi již na střední škole jste slyšeli

DEFINICI. Dvě náhodné veličiny F a G nabývající konečně mnoha hodnot nazveme **nezávislé**, pokud

$$\mathrm{Prob}(F = x \& G = y) = \mathrm{Prob}(F = x) \cdot \mathrm{Prob}(G = y), \tag{19.186}$$

přičemž $\mathrm{Prob}(F = x)$ značí pravděpodobnost události, že F nabývá hodnoty x. (Nebudeme dále formalisovat tento pojem, to je úkolem teorie pravděpodobnosti.) Připomeňme pojem míry na konečné množině (ve skutečnosti jde o prvek duálu k prostoru funkcí na X, pro konečné X však na této interpretaci příliš nezáleží):

DEFINICE. Je-li X konečná množina, tak nezápornou míru na X, to znamená funkci $p : X \to \mathbb{R}$ takovou, že $p(x) \geq 0 \quad \forall x \in X$, nazveme **pravděpodobností**, pokud $\sum_{x \in X} p(x) = 1$.

Vezměme nyní tensorový součin formálních lineárních obalů X a Y (pro nekonečné metrické prostory X, Y se bere tensorový součin duálů k prostorům spojitých funkcí na X resp. Y, jak jsme již poznamenali na straně 302; nás teď pro jednoduchost zajímají jen konečné množiny). Je-li p resp. q pravděpodobnost (obecněji míra) na X resp. Y, tak pravděpodobnost (či míru) $p \otimes q$ definovanou vztahem

$$p \otimes q(f \otimes g) = p(f)q(g) \tag{19.187}$$

nebo prostěji $p \otimes q(x, y) = p(x)q(y)$ nazveme tensorovým součinem p a q. (Někteří mluví o direktním součinu, jiní jen o součinu; tensor to však je!)

POZNÁMKA. Pro člověka s „kategoriálním" náhledem na matematiku, kterého již na obecné škole přesvědčili (…) o důležitosti pojmu kartézského součinu množin, by nemělo být překvapením, že pojem tensorového součinu pravděpodobností popisuje něco fundamentálního.

DEFINICE. Pravděpodobnost p na „stavovém prostoru" X nazveme **rozdělením pravděpodobnosti** náhodné veličiny F, pokud

$$\mathrm{Prob}(F = x) = p(x). \tag{19.188}$$

TVRZENÍ. Nechť mají náhodné veličiny F resp. G rozložení pravděpodobnosti p resp. q (na X resp. Y). Označme symbolem ω

$$\omega(x, y) = \mathrm{Prob}(F = x \,\&\, G = y) \tag{19.189}$$

tzv. **sdružené rozložení** F a G. Potom F a G jsou nezávislé

$$\iff \omega = p \otimes q. \tag{19.190}$$

Máme-li dvě náhodné veličiny F_1, F_2 s oborem hodnot v nějaké komutativní grupě $\mathbb{G}$ – třeba výsledky dvou nezávislých měření – můžeme chtít studovat součet $F_1 + F_2 \equiv F_2 + F_1$. Raději bychom zde viděli $\mathbb{R}$ namísto konečné grupy, tím bychom ale vnesli hned na úvodu do našeho výzkumu technické komplikace, které přenecháme pozdějším kursům analýzy a teorie pravděpodobnosti. Přicházíme zde opět k důležitému pojmu **konvoluce** (tentokráte pravděpodobností, srovnej však se stranou 256).

DEFINICE. Nechť p a q jsou pravděpodobnosti (obecněji míry) na konečné komutativní grupě $\mathbb{G}$. Pravděpodobnost (míru) danou předpisem

$$g \in \mathbb{G} \mapsto \sum_{a \in \mathbb{G}} p(g - a) q(a) \equiv \sum_{h,i: h+i=g} p(h) q(i) \tag{19.191}$$

nazveme **konvolucí** p a q a budeme ji označovat $p * q$. Je to tedy další pravděpodobnost; $p * q(g)$ udává pravděpodobnost, že součet $h + i$ je g, kde h resp. i má rozdělení p resp. q.

TVRZENÍ. Obrazem tensorového součinu $p \otimes q$ při zobrazení $(x, y) \to x + y : \mathbb{G} \times \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ je právě konvoluce pravděpodobností p a q.

Podobně se definuje konvoluce více pravděpodobností (měr); důkaz komutativity a asociativity (díky ní lze vynechávat závorky) si provede každý sám.

$$p * q = q * p, \qquad (p * q) * r = p * (q * r) \tag{19.192}$$

Vícenásobné konvoluce

($\sharp$) Často nás zajímají vícenásobné konvoluce, které v jazyce pravděpodobnostních rozložení odpovídají součtům více nezávislých veličin. Hodíme-li např. tisíckrát nezávisle mincí resp. kostkou, jde nám o tisícinásobnou konvoluci pravděpodobnosti

$$p = \frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1) \text{ resp. } p = \frac{1}{6}(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5 + \delta_6), \tag{19.193}$$

zajímáme-li se o to, kolikrát padla panna či kolik je součet jednotlivých hodů kostkou. (Omlouváme se čtenáři, že jsme zvolili příklad, kde grupa $\mathbb{G}$ – zde nejspíše $\mathbb{Z}$ či $\mathbb{R}$ – bude mít nekonečně mnoho prvků.)

Asi již chápeme, že jednou z důležitých otázek řešených teorií pravděpodobnosti bude charakterisace toho, jak „vypadají“ mnohonásobné konvoluce typu

$$p * p * \ldots * p. \tag{19.194}$$

V případě n činitelů zapisujme uvedenou pravděpodobnost jako $p \underset{n}{*} p$. Vzpomeňme si na tvrzení ze strany 257:

$$\widehat{p \underset{n}{*} p} = (\widehat{p})^n \tag{19.195}$$

(V teorii pravděpodobnosti se místo pojmu „Fourierova transformace“ používá synonyma **charakteristická funkce**.)

V případě $\mathbb{G} = \mathbb{R}$ se ukazuje, že charaktery mají tvar

$$\{x \mapsto \exp(i\xi x)\}, \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{19.196}$$

Jde nám tedy o to, jak vypadá $\left(\widehat{p(\xi)}\right)^n$ pro libovolnou pravděpodobnost na $\mathbb{R}$.

Pro ty, kteří se cítí býti již trochu obeznámeni s pojmem míry na $\mathbb{R}$ přidáme ještě pár poznámek na toto téma: není-li nosič p soustředěn v jediném bodě (tedy není-li p δ-funkcí), tak funkce

$$\widehat{p}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} p(x) dx \tag{19.197}$$

splňuje všude podmínku

$$\xi \neq 0 \Rightarrow |\widehat{p}(\xi)| < 1, \tag{19.198}$$

přičemž je $\widehat{p}(0) = 1$.

Jakpak se chová funkce

$$(\widehat{p}(\xi))^n \tag{19.199}$$

pro veliká n? „To zjistí každý matematik hodný toho jména do pěti minut.“[25]: nechť

$$\widehat{p}(\xi) = 1 + ia\xi - \frac{b^2}{2}\xi^2 - \dots \tag{19.200}$$

je Taylorův rozvoj $\widehat{p}(\xi)$. Zde je

$$a = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx, \quad b^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx \tag{19.201}$$

a resp. b^2 střední hodnota x resp. x^2. Předpokládejme pro jednoduchost značení $a = 0$ (zkoumejme místo veličiny x veličinu $x - a$, jejíž střední hodnota je nula). Potom je

$$\widehat{p}(\xi)^n \approx \exp\left(-\frac{Nb^2}{2}\xi^2\right). \tag{19.202}$$

Objasněte! Ti, kteří znají Fourierův obraz Gaussovy míry, jej na pravé straně již vidí, a tudíž nebudou udiveni platností tzv. **centrální limitní věty** teorie pravděpodobnosti, která říká, že mnohonásobná konvoluce pravděpodobnosti vypadá již zhruba Gaussovsky, jinými slovy

CENTRÁLNÍ LIMITNÍ VĚTA. Mají-li nezávislé veličiny $x_1, \dots, x_n$ nulovou střední hodnotu a rozptyl (střední hodnotu kvadrátu) b^2, má veličina

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{\sqrt{n}} \tag{19.203}$$

v limitě pro $n \to \infty$ tzv. **normální rozdělení**

$$p = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right). \tag{19.204}$$

ROZPTYL. Zapomeňte na všechny ty báječné věci, o nichž se zde píše, a radši pochopte, proč je rozptyl veličiny x roven

$$\delta_x^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 - 2x\langle x \rangle + \langle x \rangle^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \tag{19.205}$$

[25] Volně citováno z úvodu ke článku V. I. Arnolda, *Matematické trivium.* „Kdo nespočte střední hodnotu sté mocniny sinu do pěti minut, nerozumí matematice, i kdyby se zabýval supervarietami, nestandardní analýzou nebo větami o vnořování.“

značí-li $\langle x\rangle$ střední hodnotu veličiny x počítanou podle vzorců typu

$$\langle x\rangle = \sum_{x_i} x(x_i)p(x_i) \quad \text{resp.} \quad \langle x\rangle = \int x\cdot p(x)dx \tag{19.206}$$

a proč je rozptyl součtu dvou nezávislých veličin roven součtu rozptylů těchto veličin

$$\begin{aligned}\langle (x'+y')^2\rangle = \langle x'^2 + 2x'y' + y'^2\rangle = \langle x'^2\rangle + \langle 2x'y'\rangle + \langle y'^2\rangle = \\ = \langle x'^2\rangle + 2\langle x'\rangle\langle y'\rangle + \langle y'^2\rangle = \langle x'^2\rangle + \langle y'^2\rangle,\end{aligned} \tag{19.207}$$

kde např. x' značí $x-\langle x\rangle$ a v důkazu bylo použito, že střední hodnota z čísla je totéž číslo (fakt, že střední hodnota jednotky je jedna je tatáž podmínka, jako normovanost pravděpodobnosti), střední hodnota součtu je součet středních hodnot a hlavně to, že střední hodnota součinu dvou nezávislých veličin je rovna součinu středních hodnot těchto veličin. (♡)

19.6 Epilog

Zakončeme knihu opět citátem z knihy zmíněné na straně 294. Tentokrát však citátem doslovným (kromě změny singuláru na plurál a substituce zkratky „LA“ na místo pojmu „povětrnost“).

...Za tou příčinou neostýchali jsme se bez bližšího výkladu používati některých vědomostí z lučby, silozpytu a hvězdářství, kde toho bylo potřebí k vysvětlení některé stránky k LA patřící. Jinde jsme je však stručně napřed vyložili, čímž jsme se arci vzdali naděje, že by všichni čtenářové všemu stejně porozuměli. Neb při tak hojném účastenství, jakého se Matici lidu dostalo, nutno míti především na zřeteli, že každý čtenář, ať jest více neb méně připravený a vzdělaný, chce míti z knihy nějaký užitek, který by se aspoň vyrovnal nákladu na zakoupení knihy učiněnému a ztrátě času ku čtení obětovaného.

Aby však každý b e z p ř í p r a v y a b e z p ř e m ý š l e n í všechno hned pochopil a si pamatoval, co v této knize jest obsaženo, toho nemohli a nechtěli jsme dosáhnouti, jelikož jest to cíl velmi vzdálený a téměř nedostižitelný. Vedlé toho jsme měli na mysli, že kniha tato dostane se nejvíce do rukou čtenářů takových, kteří o tomto předmětu sotva budou mít jinou, a za tou příčinou jsme do ní vložili i některé delší seznamy rozličných udání, které jinak bychom mohli vynechati.

Co se konečně tkne slohu – nechceme tvrditi, že by nemohl být ještě populárnějším a chápavosti čtenářů málo vzdělaných přiměřenějším; tolik ale s druhé strany dovolujeme si poznamenati, že by pak kniha stala se několikráte tak rozsáhlou a vzdělanějšímu čtenáři – a těch čítá Matice lidu více – zdlouhavou. Neb spis o předmětu tak všeobecném, jako LA, dotýká se na všech stranách přírodních věd ostatních a měl by obsahovati pojednání o všech, aby se bez přípravy všeliké obešel, aneb býti nanejvýš povrchním a tudíž zbytečným, kdyby se k nim hloub nevztahoval.

Prostřední cestu jakousi nalézti bylo naší snahou svědomitou; zdali se nám to tak podařilo, jak jsme si přáli aneb jak jiní snad očekávají, o tom nechť rozhodne nestranný soudce. A kdyby se stalo, že by rozsudek měl proti nám vypadnouti nechť se shovívavě má na zřeteli známý výrok „žádná kniha není tak špatná, aby se z ní nedalo něčemu přiučiti".

Spisovatelé

Náměty k obsahu skript

Veškeré náměty k obsahu skript posílejte prosím na elektronické adresy

`mzahrad@karlin.mff.cuni.cz` a `motl@physics.rutgers.edu`.

Plánujeme napsání doplňkových a rozšiřujících kapitol k uvedenému textu. Všechny tyto texty, dále veškeré opravy a reakce na náměty čtenářů budou uloženy spolu s již existující HTML verzí této knihy na webovských stránkách autorů skript

`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~mzahrad/skripta/`,
`http://www.kolej.mff.cuni.cz/~lumo/skripta/`

Rejstřík

abeceda
- latinská, 7
- řecká, 7

aditivní grupa, 27
algebra
- graduovaná, 170
- Lieova, 149
- Poincaré, 170
- symetrická, 309

alternace, 306
amplituda
- pravděpodobnosti, 209

analytická funkce, 233
analýza
- funkcionální, 22
- harmonická, 104, 257

anihilační operátor, 160, 243
antikomutátor, 42, 170
antilineární zobrazení, 259
antisymetrie, 115
antisymetrisace, 306
anulátor, 308
aproximace, 253
asociativita, 300
asymptota, 277
automorfismus, 34, 41, 64
- vnější, 167
- vnitřní, 28

Babilonova věta, 127
balík
- vlnový, 240

Banachova věta, 195
base, 46, 52
- cyklická, 192
- duální, 222
- ortonormální, 226
- vůči podprostoru, 181

Besselova funkce, 255
bijekce, 29
bilineární forma, 259
bispinor, 331
bloková matice, 87, 100
bod
- nevlastní, 273
- pevný, 195

bodová grupa, 123
bracket, 62
Briančelova věta, 220

Cantorovo diskontinuum, 48
Cardanův vzorec, 36
Cartan, 114
Cartanova podalgebra, 162
Cayleyovo číslo, 40, 116
celočíselná mřížka, 163
centralisátor, 176, 177
centrum algebry Lieovy, 154
centrum grupy, 29
cirkulant, 104
Cramerovo pravidlo, 18
cyklická base, 192
cykličnost
- stopy, 91

cyklus, 31

Čebyševův polynom, 251
čísla
- grassmannská, 170, 310

číslo

Cayleyovo, 40, 116
charakteristické, 109
vlastní, 109
čtvrtohory, 21

definitnost, 271
derivace kovariantní, 320
determinant, 93, 96
operátoru, 102
diagonalisace, 264
diagonální matice, 75
diagram
Dynkinův, 167
Feynmanův, 209
Stiefelův, 163
diference, 74
diferenciální forma, 319
dimense, 46, 48, 52
Hausdorffova, 48
Diracova funkce, 263
Diracova matice, 330
Diracova rovnice, 329
Diracova symbolika, 62
direktní rozklad, 186
direktní součet, 186, 309
diskrétní grupa, 113
disperse, 240
distribuce, 230
distributivnost, 297
dláždění
kvasiperiodické, 124
periodické, 123
duál
topologický, 233
dualita, 217
její zobrazení, 259
duální graf, 218
duální norma, 219
duální prostor, 221
dyadický součin, 297
Dynkinův diagram, 167

ekvivalentní úprava, 82
elementární částice, 30
eliminace
Gaussova, 15, 82, 101
elipsa, 276
elipsoid, 276
endomorfismus, 64
epimorfismus, 28
evoluční rovnice, 131
exponenciála, 131, 210
prostoru tensorová, 309

faktorgrupa, 28
faktormnožina, 296
faktorprostor, 50
Feynman-Kacova formule, 212
Feynmanův diagram, 209
Feynmanův integrál, 207
fonon, 245
forma
bilineární, 259
diferenciální, 319
hermitovská, 260
kvadratická, 259, 260
positivní, 261
samoadjungovaná, 261
sesquilineární, 260
symetrická, 260
Toeplitzova, 264
formule
Feynman-Kacova, 212
Fourierova řada, 241
fraktál, 48
fraktura
německá, 151
Frobeniova věta, 84
fundamentální grupa, 329
funkce
analytická, 233
Besselova, 255
Diracova, 263
Greenova, 232
Haarova, 283
hypergeometrická, 255
charakteristická, 334
sférická, 249

typu spline, 55
vlastní, 109
vytvořující, 247, 253
funkcionální analýza, 22, 150

Gaussova eliminace, 15, 82
generátor
infinitesimální, 142, 151
generování, 31, 46
genus, 329
geometrie
algebraická, 45
Minkowského, 117
projektivní, 273
gotické písmo, 151
graduovaná algebra, 170
graduovaný komutátor, 170
graf
duální, 218
Grammova matice, 238
grassmannská čísla, 170, 310
Greenova funkce, 232
grupa, 27
Abelova, 28
aditivní, 27
bodová, 123
cyklická, 31
diskrétní, 113
duální, 217
fundamentální, 329
holonomií, 321
kompaktní, 114, 161
komutativní, 28
konformní, 117
krystalografická, 30
Lieova, 113
Lorentzova, 117
multiplikativní, 27
obecná lineární, 101
Poincaré, 117
poloprostá, 29
prostá, 29
prostorová, 122
souvislá, 149
stacionární, 123
translací, 123
Weylova, 165

Haarova funkce, 283
Haarova míra, 116
Hamilton, 39
Hamilton-Cayleyova věta, 193
hamiltonián, 243
harmonická analýza, 104, 257
Hausdorffova dimense, 48
Heisenbergův obraz, 138
hermitovská forma, 260
hermitovský operátor, 228
Hermitův polynom, 244
Hilbert, 9, 241
hlavní osa, 279
hodnost, 78
hodnota
střední, 240
holonomií grupa, 321
homomorfismus, 28
homotopie, 328
hybnost, 321
hyperbola, 277
hyperboloid, 277
hypergeometrická funkce, 255
hyperplocha, 272

charakter, 37, 217, 334
charakteristická funkce, 334
charakteristická rovnice, 110, 193
charakteristické číslo, 109
chiralita, 160
Christoffelův symbol, 320

ideál, 154, 162
idempotentnost, 68
identita
Jacobiho, 149
infinitesimální generátor, 142, 151
injekce, 28
integrace
invariantní, 161

integrál
    Feynmanův, 207
    přes trajektorie, 207
invariantní integrace, 161
invariantní podprostor, 124, 199
inverse, 32
inversní matice, 81, 106
ireducibilita, 38
isometrie, 30
isomorfismus, 29, 50
    kanonický, 223
    se skalárním součinem, 64

Jacobi-Sylvestrova metoda, 268
Jacobiho identita, 149
Jacobiho polynom, 255
jádro
    formy, 263
    homomorfismu, 29
    konvoluce, 256
    zobrazení, 77
jednoduchá šněrovanost, 166
Jordanův tvar, 183, 186

kanonický isomorfismus, 223
kanonický tvar, 264
kategorie, 188
Killingova forma, 153
kódování obrazu, 280
kolmost, 60
kompaktifikace, 322
kompaktní grupa, 114, 161
komponenta, 149
komutant, 154
komutativita
    algebry Lieovy, 154
    tensorového součinu, 297
komutátor, 133, 149
    graduovaný, 170
konformní grupa, 117
kontinuum, 49
kontra, 222
kontrakce, 195
kontravariantnost, 302
konvence
    sumační, 302
konvergence, 132
konvexní obal, 219
konvoluce, 255, 333
konvoluční operátor, 256
korelace, 61
kořen
    racionální, 43
kořen grupy, 164
kořenový činitel, 35
kořenový podprostor, 186
kososymetričnost, 115
kostka
    Rubikova, 30
koule, 276
kovariantnost, 302
kreační operátor, 160, 243
Kroneckerův symbol, 60
křivka Gaussova, 240
kubatura
    krychle, 43
kužel, 276
kuželosečka, 220, 272
    přímková, 220
kvadratická forma, 259, 260
kvadratická plocha, 272
kvadrika, 272
kvantová mechanika, 238
kvantový oscilátor, 243
kvasikrystal, 123
kvasiperiodické dláždění, 124
kvaternion, 39, 327

Laguerrův polynom, 254
Laplaceův operátor, 132
laplacián, 214
latinský čtverec, 47
Lebesgueova míra, 230
Legendreův polynom, 246
Leibnizovo pravidlo, 320
levotočivost, 94
Lieova algebra, 149
Lieova grupa, 113

linearisace, 20, 263
lineární kombinace, 46
lineární obal, 46
  formální, 296
lineární regrese, 62, 84, 288
lineární zobrazení, 69
logaritmus, 145
Lorentzova grupa, 117

magický čtverec, 47
manifold, 321
matice, 69
  adjungovaná, 226
  antihermitovská, 228
  antisymetická, 115
  bloková, 87, 100
  diagonální, 75
  Diracova, 330
  formy, 261
  Grammova, 238, 314, 315
  hermitovská, 228
  hermitovsky sdružená, 226
  inversní, 81, 106
  jednotková, 73, 81, 264, 276
  její norma, 132
  kontragradientní, 225
  kososymetrická, 115
  lidu, 294
  normální, 228
  ortogonální, 116
  Pauliho, 159
  permutační, 75
  podobné, 90
  polosymetrická, 115
  positivní, 202
  přechodu, 89
  pseudoinversní, 287
  pseudoortogonální, 117
  pseudounitární, 117
  rozptylu, 209
  rozšířená, 83
  samoadjungovaná, 228
  singulární, 81
  stochastická, 202, 205
  symplektická, 115, 147, 327
  transponovaná, 106
  trojúhelníková, 75
  unimodulární, 115
  unitární, 115, 117, 228
  Vandermondova, 76
  zobrazení, 71
maximální torus, 162
mechanika
  kvantová, 9, 238
meteorologie, 22
metoda
  doplnění na čtverec, 266
  Jacobi-Sylvestrova, 268
  nejmenších čtverců, 84
metrika, 132
Minkowského geometrie, 117
minor, 268, 269
míra, 229
  Haarova, 116
množina míry nula, 49
modul, 45
  pravý, 155
mohutnost, 49
monomorfismus, 28
morfismus, 28
mřížka, 168
  celočíselná, 163
multilinearita, 99, 259
multiplikativní grupa, 27
multiplikátor, 224

nadplocha, 272
násobnost
  kořene, 110
německá fraktura, 151
nespočetnost, 49
neurčitost, 240
nevlastní bod, 273
nezávislost, 47, 332
  vůči podprostoru, 181
nilpotentní operátor, 82, 180
norma
  duální, 219

matice, 132
vektoru, 62
normální operátor, 228
normální rozdělení, 335
nosič, 233, 334

obal
formální, 255
konvexní, 219
obal lineární, 46
formální, 296
objem, 93
obraz
zobrazení, 77
odchylka, 240
okrajová úloha, 212
okruh, 37
oktonion, 40
operátor, 70
anihilační, 160, 243
derivování, 179
diference, 74
hermitovský, 228
konvoluční, 256
kreační, 160, 243
Laplaceův, 132
nilpotentní, 82, 180
normální, 228
samoadjungovaný, 228
unitární, 228
orientace
souhlasná, 94
ortogonalisace
Gramm-Schmidtova, 65, 66, 75, 266, 268
ortogonalita, 60, 116
ortogonální doplněk, 67
ortogonální projekce, 67
ortonormální base, 226
osa hlavní, 279
oscilátor
kvantový, 243

parabola, 278
paraboloid, 278
paralelní posun, 320
parita, 167
Parsevalova rovnost, 257
Pascalova věta, 220
Pauliho matice, 159
Penrose, 18, 124
periodické dláždění, 123
permanent, 96
permutace, 31
lichá, 32
sudá, 32
permutační matice, 75
Perron-Frobeniova věta, 202, 205
pětiúhelník, 18
pevný bod, 195
písmo
gotické, 151
Platónovo těleso, 20
plocha
kvadratická, 272
přímková, 278
podalgebra
Cartanova, 162
podalgebra Lieova, 154
podgrupa, 28
invariantní, 28
normální, 28
podobnost, 90
podprostor, 50
invariantní, 124, 199
kořenový, 186
Poincarého grupa, 117
Poissonovo rozdělení, 143
polární rozklad, 289
pologrupa, 75, 207
poloměr
spektrální, 202
polopřímý součin, 34
polosymetričnost, 115
polyedr, 54
polynom
Čebyševův, 251
Hermitův, 61, 66, 244

- Jacobiho, 255
- Laguerrův, 254
- Legendreův, 61, 66, 246
- matic, 193

positivní forma, 261
positivní matice, 202
posloupnost
- Fibonacciho, 19

pravděpodobnost, 229, 332
pravidlo
- Cramerovo, 18, 107
- Sarusovo, 101

pravotočivost, 94
princip
- duality, 220

projekce, 68
- doplňková, 68
- ortogonální, 67

projektivní geometrie, 273
projektivní prostor, 70, 272
prostor
- afinní, 70
- duální, 62, 221
- euklidovský, 64
- Hilbertův, 9, 241
- lineární, 45
- nulový, 77
- projektivní, 70, 272
- řádkový, 78
- Schwartzův, 233
- sloupcový, 78
- vektorový, 45

prostorová grupa, 122
přemístění, 122
přidružená representace, 161
přímková kuželosečka, 220
přímková plocha, 278
pseudoinversní matice, 287
pseudoortogonální matice, 117
pseudoreálná representace, 157
pseudoskalár, 317
pseudounitární matice, 117

racionální kořen, 43
radikál, 36
rank, 162
reflexivita, 328
regrese
- lineární, 62, 84, 288

regulárnost, 81
relace
- neurčitosti, 240
- úplnosti, 68, 237

repér, 274
representace, 75, 155
- lineární formy, 225
- přidružená, 161
- pseudoreálná, 157
- souřadnicová, 239

restrikce, 260
rhomboid, 128
Ricciho tensor, 320
Riemannův tensor, 320
rotace vektoru, 150
rovnice
- Diracova, 329
- evoluční, 131
- charakteristická, 110, 193
- Schrödingerova, 131, 329
- soustava diferenciální, 137
- vedení tepla, 131
- vývojová, 131

rovnoběžnostěn, 54
rovnost
- Parsevalova, 257

rozdělení
- normální, 335
- Poissonovo, 142, 143

rozdělení jednotky, 233
rozklad
- direktní, 186
- polární, 289
- spektrální, 235

rozložitelnost, 300, 308
rozptyl, 240
rozšířená matice, 83
rozvoj
- determinantu, 105

Rubikova kostka, 30

řada
    Fourierova, 241
řádkový prostor, 78
řecká abeceda, 7
řetězec vektorů, 182
Říp, 57

samoadjungovaná forma, 261
samoadjungovaný operátor, 228
Sarusovo pravidlo, 101
sedmiúhelník, 44
semidirektní součin, 34
sesquilineární forma, 260
setrvačnost, 271
sférická funkce, 249
Schrödingerova rovnice, 131, 329
Schurova věta, 236
Schwartzův prostor, 233
signatura, 271
simplex, 54
singulární matice, 81
skalár, 294
skalární součin, 59, 260
sloupcový prostor, 78
součet direktní, 186
součin
    direktní, 29
    dyadický, 297
    polopřímý, 34
    přímý, 29
    semidirektní, 34
    skalární, 59, 260
    tensorový, 296
souhlasnost, 94
soustava dif. rovnic, 137
souvislá grupa, 149
souvislost jednoduchá, 329
spektrální poloměr, 202
spektrální rozklad, 235
spektrum, 109
spin, 158, 322
spinor, 322
spinvektor, 322
spline, 55
stacionární grupa, 123
stacionární stav, 203
standardní model, 30
stav
    stacionární, 203
Steinitzova věta, 51
Stiefelův diagram, 163
stochastická matice, 202
stopa, 91, 139
strukturní zobrazení, 156
stupeň, 181
    kořene, 110
superalgebra, 170
supergravitace, 172
superkomutátor, 170
superprostor, 171
superstring, 169, 214, 310
supersymetrická teorie, 244, 310
supersymetrie, 170
surjekce, 28
svinutí, 322
symbol
    Kroneckerův, 60
symbol Christoffelův, 320
symetrická forma, 260
symetričnost, 328
symetrisace, 306
symplektická matice, 147
symplektičnost, 115, 327

šněrovanost
    jednoduchá, 166
švabach, 151

Taylorův vzorec, 141
těleso, 38
    Platónovo, 20
tensor, 293, 317
    deformace, 295
    elektromagnetický, 306
    křivosti, 295, 320
    Levi-Civitty, 317, 318

metrický, 294, 305
napětí, 295
piezoelektrický, 295
pružnosti, 295
Ricciho, 320
teorie kategorií, 188
teorie pole, 209
teorie pole kvantová, 232
teorie relativity, 317
teorie supersymetrická, 244, 310
Toeplitzova forma, 264
topologický duál, 233
torus maximální, 162
trajektorie, 210
transformace
Fourierova, 239
diskrétní, 105
transitivita, 328
transposice, 31
trialita, 167
trisekce úhlu, 42
třída ekvivalence, 97, 296
tvar
Jordanův, 183, 186
kanonický, 264

úloha okrajová, 212
unimodulárnost, 115
unitární operátor, 228
unitárnost, 115
úplnosti relace, 237
úprava
ekvivalentní, 82
úžení, 304

váha, 168
vakuum, 160, 244, 311
polarisace, 210
válec, 278
Vandermondova matice, 76
varieta, 321
vektor, 45
polární, 317
representující, 225
vlastní, 105, 109
věta
Babilonova, 127
Banachova, 195
Briančelova, 220
centrální limitní, 335
Frobeniova, 84
Hamilton-Cayleyova, 193
o representaci, 225, 259
o setrvačnosti, 271
o třech potenciálech, 214
Pascalova, 220
Perron-Frobeniova, 202, 205
Pythagorova, 315
Schurova, 236
Steinitzova, 51
vielbein, 323
vlastní číslo, 109
vlastní funkce, 109
vlastní vektor, 105, 109
vlna rovinná, 239
vlnky, 283
vytvořující funkce, 247
vývojová rovnice, 131
vzorec
Cardanův, 36
Taylorův, 141, 263

Weylova grupa, 165

zákon kosmické lenivosti, 318
závislost, 47
zlatý řez, 19, 127, 234
znak permutace, 32
zobrazení
adjungované, 226
antilineární, 225, 259
duality, 259
duální, 222
lineární, 69
multilineární, 259
strukturní, 156
transponované, 223
zúžení, 260

LETNÍ SEMESTR

1) Exponenciála matice. Definice, základní vlastnosti (vlastní vektory exponenciály, exponenciála podobných matic). Vztah Tr A a det exp A. Příklady.
2) Pojem Lieovy algebry a příklady : g = gl, sl, o, u, su. Vztahy typu exp g = G. Isomorfismus vektorového násobení a komutování v o(3).
3) Teorie nilpotentních operátorů. Ekviv. charakterisace pomocí spektra, příklady (operátory derivování na polynomech). Studium posloupnosti kořenových podprostorů k-tého řádu a alternativně k-násobných obrazů. Nezávislost vůči podprostoru. Konstrukce počátečních vektorů řetězců dávajících Jordanovu basi prostoru.
4) Direktní rozklad prostoru na kořenové podprostory daného operátoru. Obecná Jordanova věta. Věta Hamilton-Cayleyho. Exponenciála Jordanovy matic s použitím na řešení soustav lineárních diferenciálních rovnic.
5) Positivní a stochastické matice. Hledání největšího vlastního čísla iterací. Interpretace příslušného vlastního vektoru (stacionární stav systému).
6) Pojem duálního prostoru, duální base, duálního operátoru, transponované matice, kontragradientní matice (přechodu duálních basí).
7) Dualita a skalární součin: věta o representaci lineární formy (skalárním násobením vhodným vektorem). Pojem adjungovaného operátoru. Samoadjungované (Hermitovské), unitární, obecněji normální operátory. Adjunkce diferenciálního operátoru a metoda per partes.
8) Věta o spektrálním rozkladu normálního operátoru. Příklad - operátor derivování na trigonometrických polynomech. Funkce normálního operátoru. Ortogonální polynomy (příklad: Hermitovy, Legendreovy) jako výsledek ortogonalisačního procesu ve vhodném skalárním součinu (alternativně jako vlastní vektory vhodného diferenciálního operátoru).
9) Bilineární a kvadratické formy. Diagonalisace Hermitovské formy: a) doplněním na čtverec, b) Jacobi-Sylvesterův zápis ortogonalisačního procesu (zvl. pro positivně definitní formy), c) diagonalisace pomocí spektrálního rozkladu

representujícího operátoru formy (dávající ortogonální "hlavní osy" formy). Signatura a způsoby jejího zjištování.

10) Kvadriky (a kuželosečky), klasifikace a vlastnosti (omezenost, přímkové plochy, vlastnosti rovinných řezů). Zmínka o projektivním prostoru. Význam paraboloidů v analýze funkcí více proměnných (lokální extrémy, sedlové body funkcí).
11) Polární rozklad obecného operátoru na komposici unitárního a Hermitovského operátoru (resp. unitárního, diagonálního, unitárního operátoru).
12) Pseudoinverse obdélníkové matice.
13) Pojem tensorového součinu vektorových prostorů, isomorfismy mezi různými definicemi, jako je formální lineární obal kartézského součinu basí, množina multilineárních funkcionálů na součinu duálů, faktorprostor formálního lineárního obalu kartézského součinu prostorů. Rozložitelné tensory. Příklady tensorů: vektory, kovektory, bilineární formy, strukturní tensor algebry, determinant jako multilineární funkce sloupců, fyzikální příklady.
14) Složkový zápis tensoru a transformační vztahy. Kovariantní a kontravariantní indexy tensoru, zápisy indexů dolů a nahoru a sumační pravidlo.
15) Základní operace s tensory: tensorové násobení, součet tensorů stejného typu, permutace složek tensoru, úžení (stopa). Tensory a skalární součin: ortogonální transformace tensorů, zdvihání a spouštění indexů.
16) Symetrické tensory a tensorový součin, symetrisace.
17) Antisymetrické tensory, antisymetrisace, antisymetrický (vnější) tensorový součin, Grassmannova algebra. Vektorový součin. Měření ploch mnohoúhelníků, obecněji k-rozměrných polyedrů v n-rozměrném euklidovském prostoru. Grammova matice a Grammův determinant obdélníkové matice.

(Zde uvedeným sylabům se snažila přiblížit přednáška LA vedená jedním z autorů této knihy v minulých letech.)