1 Množinová algebra

101 Prázdna množina.
$A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A - \emptyset = A$, $A - A = \emptyset$.

102 Komplement. Nech $A, B \subseteq X$. Potom
$X - (X - A) = (A^c)^c = A$,
$A - B = A \cap (X - B) = A \cap B^c$,
$A \cap (X - A) = A \cap A^c = \emptyset$,
$A \cup (X - A) = A \cup A^c = X$.

103 Komutatívne zákony.
$A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.

104 Asociatívne zákony.
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

105 Distributívne zákony.
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

106 Zákony idempotencie.
$A \cup A = A$, $A \cap A = A$.

107 Absorpčné zákony.
$A \cup (B \cap A) = A$, $A \cap (B \cup A) = A$.

108 de Morganove zákony.
$X - (A \cup B) = (X - A) \cap (X - B)$,
$X - (A \cap B) = (X - A) \cup (X - B)$.

109 Inklúzia.

1. $A \subseteq B \equiv A \cap B = A$,
2. $A \subseteq B \equiv A \cup B = B$,
3. $A \subseteq B \equiv A - B = \emptyset$,
4. $A \subseteq B \equiv B^c \subseteq A^c$.

110 Monotónnosť operácií $\cup$, $\cap$, $-$, $\times$. Pre ľubovoľné množiny A, B, C, D platí:

1. Ak $A \subseteq C$ a $B \subseteq C$, tak $A \cup B \subseteq C$.
2. Ak $C \subseteq A$ a $C \subseteq B$, tak $C \subseteq A \cap B$.
3. Ak $A \subseteq C$ a $B \subseteq D$, tak $A \cup B \subseteq C \cup D$.
4. Ak $A \subseteq C$ a $B \subseteq D$, tak $A \cap B \subseteq C \cap D$.
5. Ak $A \subseteq C$ a $B \subseteq D$, tak $A \times B \subseteq C \times D$.
6. Ak $A \subseteq C$ a $B \supseteq D$, tak $A - B \subseteq C - D$.

111 Použitím predchádzajúcich zákonov dokážte rovnosti:

1. $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$,
2. $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$.
3. $A \dot{-} B = (A \cup B) - (A \cap B)$,
4. $A \dot{-} \emptyset = A$, 5. $A \dot{-} A = \emptyset$,
6. $A \dot{-} B = B \dot{-} A$,
7. $(A \dot{-} B) \dot{-} C = A \dot{-} (B \dot{-} C)$,
8. $A \cap (B \dot{-} C) = (A \cap B) \dot{-} (A \cap C)$,

112 Kartézsky súčin. Dokážte:

1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$,
2. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$,
3. $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$,
4. $A \times (B \dot{-} C) = (A \times B) \dot{-} (A \times C)$,
5. $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$,
6. $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$,
7. $(B - C) \times A = (B \times A) - (C \times A)$,
8. $(B \dot{-} C) \times A = (B \times A) \dot{-} (C \times A)$.

113 Dokážte (použitím vyššie sformulovaných zákonov), alebo vyvráťte (nájdením vhodného príkladu) tvrdenie, že pre všetky množiny A, B, C, D platí

1. $A \cap B = A \dot{-} (A - B)$,
2. $A \dot{-} (B \cap C) = (A \dot{-} B) \cap (A \dot{-} C)$,
3. $A - B = A \dot{-} (A \cap B)$,
4. $A \cup B = (A \dot{-} B) \dot{-} (A \cap B)$,
5. $A - (B \cup C) = (A - B) - C$,
6. $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$,
7. $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$,
8. $A \cup (B \dot{-} C) = (A \cup B) \dot{-} (A \cup C)$,
9. $A \dot{-} (B \cup C) = (A \dot{-} B) \cup (A \dot{-} C)$,
10. $A - (B \times C) = (A - B) \times (A - C)$,
11. $A \cap (B \times C) = (A \cap B) \times (A \cap C)$,
12. $(A - B) \cap (C - D) = (A - C) - (B - D)$,
13. $A \cap B = A \dot{-} (A \dot{-} B)$,
14. $A - [B - (C - D)] =$
$= (A - B) \cup [(A \cap C) - D]$,
15. $(A \cup B)^c - C = (A \cap C)^c \cup (B - C)$,
16. $A^c \cap (B \cup C) = (A \cup B)^c \cap C$.

V posledných dvoch rovnostiach sa komplement vzťahuje na množinu $X = A \cup B \cup C$.

114 Dokážte, že pre $n > 1$ platí:
$A_1 \cup \cdots \cup A_n =$
$= (A_1 - A_2) \cup \cdots \cup (A_{n-1} - A_n) \cup (A_n - A_1)$
$\cup (A_1 \cap \cdots \cap A_n)$.

115 $\langle x, y \rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.
Dokážte, že $\langle x, y \rangle = \langle x', y' \rangle \equiv x = x'$ & $y = y'$.

116 $\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}$—potenčná množina.

1. $\emptyset, A \in \mathcal{P}(A)$.
2. Ak $A \subseteq B$, tak $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.
3. Ak A je konečná množina s n prvkami, tak $\mathcal{P}(A)$ obsahuje 2^n množín.
4. Vymenujte prvky množiny $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$. Sú medzi nimi usporiadané dvojice?

2 Nekonečné operácie

201 Monotónnosť operácií $\bigcup$, $\bigcap$.

1. Ak $T \subseteq T'$, tak $\bigcup_{t\in T} A_t \subseteq \bigcup_{t\in T'} A_t$ a $\bigcap_{t\in T'} A_t \subseteq \bigcap_{t\in T} A_t$.
2. Ak $t_0 \in T$, tak $\bigcap_{t\in T} A_t \subseteq A_{t_0} \subseteq \bigcup_{t\in T} A_t$.
3. Ak $A_t \subseteq B$ pre každé $t \in T$, tak $\bigcup_{t\in T} A_t \subseteq B$.
4. Ak pre každé $t \in T$ existuje $s \in S$ také, že $A_t \subseteq B_s$, tak $\bigcup_{t\in T} A_t \subseteq \bigcup_{s\in S} B_s$.
5. Ak $B \subseteq A_t$ pre každé $t \in T$, tak $B \subseteq \bigcap_{t\in T} A_t$.
6. Ak pre každé $t \in T$ existuje $s \in S$ také, že $B_s \subseteq A_t$, tak $\bigcap_{s\in S} B_s \subseteq \bigcap_{t\in T} A_t$.

202 Komutatívnosť. Pre každé zobrazenie $f : T \to T$ množiny indexov T na seba platí:
$\bigcup_{t\in T} A_t = \bigcup_{t\in T} A_{f(t)}$, $\bigcap_{t\in T} A_t = \bigcap_{t\in T} A_{f(t)}$.

203 Asociatívnosť. Ak $T = \bigcup_{s\in S} T_s$, tak

$$\bigcup_{s\in S}\bigcup_{t\in T_s} A_t = \bigcup_{t\in T} A_t,\ \bigcap_{s\in S}\bigcap_{t\in T_s} A_t = \bigcap_{t\in T} A_t.$$

204 de Morganove zákony.

$X - \bigcup_{t\in T} A_t = \bigcap_{t\in T} (X - A_t)$,

$X - \bigcap_{t\in T} A_t = \bigcup_{t\in T} (X - A_t)$.

205 Distributívne zákony.

1. $A \cap \bigcup_{t\in T} A_t = \bigcup_{t\in T} (A \cap A_t)$,
2. $A \cup \bigcap_{t\in T} A_t = \bigcap_{t\in T} (A \cup A_t)$,
3. $A \times (\bigcup_{t\in T} A_t) = \bigcup_{t\in T} (A \times A_t)$,
4. $A \times (\bigcap_{t\in T} A_t) = \bigcap_{t\in T} (A \times A_t)$,
5. $(\bigcup_{t\in T} A_t) \times A = \bigcup_{t\in T} (A_t \times A)$,
6. $(\bigcap_{t\in T} A_t) \times A = \bigcap_{t\in T} (A_t \times A)$,
7. $\bigcap_{t\in T}\bigcup_{s\in S} A_{t,s} = \bigcup_{f\in {}^TS}\bigcap_{t\in T} A_{t,f(t)}$,
8. $\bigcup_{t\in T}\bigcap_{s\in S} A_{t,s} = \bigcap_{f\in {}^TS}\bigcup_{t\in T} A_{t,f(t)}$ (${}^TS$ označuje množinu všetkých zobrazení z T do S).

206 Použitím vyššie sformulovaných zákonov dokážte:

1. $A \cup \bigcup_{t\in T} A_t = \bigcup_{t\in T} (A \cup A_t)$,
2. $A \cap \bigcap_{t\in T} A_t = \bigcap_{t\in T} (A \cap A_t)$,
3. $(\bigcup_{t\in T} A_t) \cap (\bigcup_{s\in S} B_s) = \bigcup_{t\in T}\bigcup_{s\in S} (A_t \cap B_s) = \bigcup_{[t,s]\in T\times S} (A_t \cap B_s)$,
4. $(\bigcap_{t\in T} A_t) \cup (\bigcap_{s\in S} B_s) = \bigcap_{t\in T}\bigcap_{s\in S} (A_t \cup B_s) = \bigcap_{[t,s]\in T\times S} (A_t \cup B_s)$,

5–8. $\bigcup_{t\in T}\bigcap_{s\in S} (A_t \boxplus B_s) = \bigcap_{s\in S}\bigcup_{t\in T} (A_t \boxplus B_s)$ pre operácie $\boxplus = \cup, \cap, -, \times$,

9. $\big(\bigcup_{t\in T} A_t\big) - A = \bigcup_{t\in T} (A_t - A)$,
10. $\big(\bigcap_{t\in T} A_t\big) - A = \bigcap_{t\in T} (A_t - A)$.

207 Ukážte, že pre každú postupnosť množín A_n existuje postupnosť navzájom disjunktných množín $B_n \subseteq A_n$ takých, že $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$.

208 Zistite, ktoré z inklúzií medzi množinami X a Y platia alebo nájdite kontrapríklady:

1. $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cap B_n$, $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$.
2. $X = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \cup B_n$, $Y = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \cup \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$.
3. $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n - B_n$, $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n - \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$.
4. $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c - B_n$, $Y = \big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big)^c - \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$.
5. $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{m\in\mathbb{N}} A_{n,m}$, $Y = \bigcap_{m\in\mathbb{N}}\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{n,m}$.
6. $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{m\in\mathbb{N}} (A_n \dot{-} B_m)$,
   $Y = \bigcap_{m\in\mathbb{N}}\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \dot{-} B_m)$.
7. $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{m\in\mathbb{N}-\{n\}} A_m$,
   $Y = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{m\in\mathbb{N}-\{n\}} A_m$.

3 Matematická indukcia

301 Matematickou indukciou dokážte, že pre všetky prirodzené čísla $n \geq 1$ platí:

1. $n^5/5 + n^3/3 + 7n/15 \in \mathbb{N}$.
2. $(\forall a, b \in \mathbb{R}^+)\ (a^n + b^n)/2 \geq [(a+b)/2]^n$.
3. $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.
4. $1/2 + 1/6 + \cdots + 1/[(n+1)(n+2)] < 1$.
5. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.
6. Existuje rozklad n na prvočinitele.
7. Ak n nemá prvočíselné delitele menšie ako m, tak počet deliteľov čísla n je $d_n \leq \dfrac{n}{m} + 1$.

4 Relácie

$\mathrm{id}_X = \{[x,y] \in X \times X : x = y\}$ a pre $R \subseteq X \times X$, $R^{-1} = \{[x,y] : [y,x] \in R\}$, $\neg R = (X \times X) - R$. Nech R je relácia $\leq$ na $\mathbb{R}$. Pomenujte R^{-1} a $\neg R$.

401 Pre relácie R, S, T dokážte, že platí:

1. $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.
2. $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$.
3. $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$.
4. $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$.
5. $(\neg R)^{-1} = \neg(R^{-1})$.
6. $\mathrm{id}_X \subseteq R$ práve vtedy, keď R je reflexívna.
7. $R \subseteq R^{-1}$ práve vtedy, keď R je symetrická.
8. $R \circ R \subseteq R$ práve vtedy, keď R je tranzitívna.
9. $\mathrm{id}_X \cap R = \emptyset$ práve vtedy, keď R je ireflexívna (antireflexívna).
10. $R \cap R^{-1} \subseteq \mathrm{id}_X$ práve vtedy, keď R je antisymetrická.
11. $R \cap R^{-1} = \emptyset$ práve vtedy, keď R je asymetrická.
12. $R \cup R^{-1} = X \times X$ práve vtedy, keď R je dichotomická.
13. $R \subseteq \mathrm{id}_X$ práve vtedy, keď R je symetrická a antisymetrická.
14. Ak R, S sú reflexívne relácie, tak aj relácie R^{-1}, $R \circ S$, $R \cup S$, $R \cap S$ sú reflexívne.
15. Ak R, S sú symetrické relácie, tak aj relácie R^{-1}, $R \cup S$, $R \cap S$ sú symetrické, ale $R \circ S$ nemusí byť symetrická.
16. Ak R, S sú tranzitívne relácie, tak aj relácie R^{-1}, $R \cap S$ sú tranzitívne, ale $R \cup S$ a $R \circ S$ nemusia byť tranzitívne.
17. Ak R je tranzitívna a antireflexívna, tak $R \cup \mathrm{id}_X$ je čiastočné usporiadanie.
18. R je čiastočné usporiadanie práve vtedy, keď $\mathrm{id}_X \subseteq R$ a $R - \mathrm{id}_X$ je tranzitívna.
19. Ak R je symetrická, tak jej tranzitívny uzáver (t.j. relácia $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$) je ekvivalencia na množine $D(R) = \{x : \exists y\ [x,y] \in R\}$.

402 Zistite, či existujú relácie s nasledujúcimi vlastnosťami. Ak áno, uveďte príklad.

1. reflexívna, symetrická, tranzitívna;
2. reflexívna, symetrická, antisymetrická;
3. reflexívna, antireflexívna;
4. reflexívna, tranzitívna, antisymetrická;
5. symetrická, tranzitívna, antireflexívna;
6. symetrická, antisymetrická, antireflexívna.

5 Zobrazenia

501 Nájdite definičné obory, obory hodnôt daných relácií, a zistite, či tieto relácie sú zobrazenia, a ak áno, tak či sú prosté.

1. $\{[x,y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \cdot y = x^2 + 1\}$,
2. $\{[n,m] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : n = 2m + 1\}$,
3. $\{[x,A] \in \mathbb{N} \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) : (\forall y)(y \in A \equiv y \mid x)\}$.

502 Nech f, g sú zobrazenia. Zistite, či aj výsledok jednotlivých množinových operácií $f \cap g$, $f \cup g$, $f - g$, $f \dot{-} g$ je zobrazenie. Ak nie, nájdite podmienky, ktoré f a g musia spĺňať, aby výsledky jednotlivých operácií boli opäť zobrazenia.

503 Nech f je zobrazenie. Dokážte:

1. $f(\bigcup_{t \in T} A_t) = \bigcup_{t \in T} f(A_t)$;
2. $f(\bigcap_{t \in T} A_t) \subseteq \bigcap_{t \in T} f(A_t)$;
3. $f(X - A) \supseteq f(X) - f(A)$;
4. $f^{-1}(\bigcup_{t \in T} B_t) = \bigcup_{t \in T} f^{-1}(B_t)$;
5. $f^{-1}(\bigcap_{t \in T} B_t) = \bigcap_{t \in T} f^{-1}(B_t)$;
6. $f^{-1}(X - A) = f^{-1}(X) - f^{-1}(A)$;
7. Ak $A \subseteq D(f)$, potom $A \subseteq f^{-1}(f(A))$;
8. Ak $B \subseteq H(f)$, potom $B = f(f^{-1}(B))$.
9. Nájdite kontrapríklady, k príslušným rovnostiam v úlohách 2., 3. a 7.

504 Nech f je zobrazenie. Dokážte:

1. Ak g je inverzná relácia ku f a ak g je zobrazenie, tak g je inverzné zobrazenie ku f.
2. Ak existuje inverzné zobrazenie f^{-1} ku f, tak f^{-1} je inverzná relácia ku f.

6 Mohutnosti

601 Ukážte, že nasledujúce funkcie sú bijekcie:

1. $h_{a,b} : [0,1] \to [a,b]$, $h_{a,b}(x) = a + x(b-a)$.
2. $g_a : [0,1) \to [a,\infty)$,
   $g_a(x) = 1/(1-x) + a - 1$.
3. $g'_a : [0,1) \to (-\infty,a]$,
   $g'_a(x) = -1/(1-x) + a + 1$.

602 Zostrojte bijekcie:

1. $f_1 : (0,1) \xrightarrow[\text{na}]{\text{0-1}} (0,1]$,
2. $f_2 : (0,1) \xrightarrow[\text{na}]{\text{0-1}} [0,1)$,
3. $f_3 : (0,1) \xrightarrow[\text{na}]{\text{0-1}} [0,1]$,
4. $f_4 : (0,1) \xrightarrow[\text{na}]{\text{0-1}} (-\infty,\infty)$.

603 Pre každý interval reálnych čísel I,
$I = [a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$, (a,b), $(-\infty,\infty)$,
$(-\infty,a)$, $(-\infty,a]$, (a,∞), $[a,\infty)$,
pre reálne čísla $a < b$, kompozíciou funkcií $h_{a,b}$, g_a, g'_a, f_1, f_2, f_3, f_4 a ich inverzií zostrojte bijekciu $f : (0,1) \xrightarrow[\text{na}]{\text{0-1}} I$.
Morálne poučenie: všetky intervaly s neprázdnym vnútrom, konečné aj nekonečné, majú rovnaké mohutnosti.
(Návod: napr. $f(x) = h_{a,b}(f_3(x))$ pre $x \in (0,1)$ je bijekcia z $(0,1)$ na $[a,b]$).

604 Zostrojte bijekcie medzi množinami A, B.

1. $A = \mathbb{N}$, $B = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ je štvorec}\}$;
2. $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Z}$;
3. $A = \mathbb{N} \times \{0,1\}$, $B = \mathbb{N}$;
4. $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$;
5. $A = (0,1)$, $B = (0,1) \cup \mathbb{N}$;
6. $A = {}^{\mathbb{N}}\{0,1\}$, $B = {}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}\{0,1\}$;
7. $A = {}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}\{0,1\}$, $B = {}^{\mathbb{N}}\big({}^{\mathbb{N}}\{0,1\}\big)$;
8. $A = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $B = {}^{\mathbb{N}}\{0,1\}$;
9. $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$;
10. $A = [0,1)$,
    $B = \{[x,y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\}$;

605 Nech $f : A \to B$, $g : C \to D$. Definujme $h : A \times C \to B \times D$ takto:

$$h(x,y) = [f(x), g(y)].$$

Zistite, či nasledujúce tvrdenia sú pravdivé.

1. h je prostá práve vtedy, keď f a g sú prosté.
2. h je „na“ práve vtedy, keď f a g sú „na“.
3. h je bijekcia práve vtedy, keď f a g sú bijekcie.

606 Pomocou Cantorovej-Bernsteinovej vety dokážte, že množiny A, B majú rovnaké mohutnosti.

1. $A = {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$, $B = {}^{\mathbb{N}}\{0,1\}$.
2. $A = \mathbb{Q}^+$, $B = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
3. $A = [0,1)$, $B = {}^{\mathbb{N}}\{0,1\}$.
4. $A = [0,1) \times [0,1)$, $B = [0,1)$.
5. $A = \{f \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R} : f \text{ je neklesajúca}\}$,
   $B = \{f \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R} : f \text{ je rastúca}\}$.
6. $A = {}^{\mathbb{N}}[0,1]$,
   $B = \{f \in {}^{\mathbb{N}}[0,1] : \lim_{n\to\infty} f(n) \text{ existuje}\}$.
7. $A = [0,1]$, $B = C([0,1])$—systém spojitých funkcií z $[0,1]$ do $\mathbb{R}$.

607 Počítanie s mohutnosťami. Označenie: $0 = |\emptyset|$, $n = |\{0,1,\ldots,n-1\}|$, $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$, $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}|$.
Pre ľubovoľné mohutnosti κ, λ, μ, ν dokážte:

1. $\kappa < 2^\kappa$.
2. Ak $\kappa \le \lambda$ a $\lambda \le \kappa$, tak $\kappa = \lambda$.
3. Ak $\kappa \le \lambda$ a $\mu \le \nu$, tak $\kappa + \mu \le \lambda + \nu$, $\kappa \cdot \mu \le \lambda \cdot \nu$, $\kappa^\mu \le \lambda^\nu$.
4. $\kappa + 0 = \kappa$, $\quad \kappa \cdot 0 = 0$, $\quad \kappa^0 = 1$.
5. $\kappa + 1 = \kappa$ pre $\kappa \ge \aleph_0$, $\kappa \cdot 1 = \kappa$, $\quad \kappa^1 = \kappa$.
6. $\kappa + \kappa = 2 \cdot \kappa$, $\quad \kappa \cdot \kappa = \kappa^2$.
7. $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa$.
8. $\kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa$.
9. $(\kappa + \lambda) + \mu = \kappa + (\lambda + \mu)$.
10. $(\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu = \kappa \cdot (\lambda \cdot \mu)$.
11. $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$.
12. $\kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu = \kappa^{\lambda+\mu}$.
13. $\kappa^\lambda \cdot \mu^\lambda = (\kappa \cdot \mu)^\lambda$.
14. $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda\cdot\mu}$.

608 Nasledujúce výrazy upravte do takého tvaru, v ktorom sa nevyskytujú operácie sčítania, násobenia, a pokiaľ to je možné, mocniny s iným základom ako 2.

1. $\aleph_0 + \aleph_0$	6. $\mathfrak{c} + \aleph_0$	11. $\aleph_0^{\mathfrak{c}}$
2. $n \cdot \aleph_0$	7. $\mathfrak{c} + \mathfrak{c}$	12. $\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$
3. $\aleph_0 \cdot \aleph_0$	8. $\aleph_0 \cdot \mathfrak{c}$	13. $\big(2^{2^{\aleph_0}} \cdot {\aleph_0}^{\aleph_0^{\aleph_0}}\big)^{2^{\aleph_0}}$
4. $\aleph_0^n$	9. $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c}$	14. $\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}}$
5. $\aleph_0^{\aleph_0}$	10. $\mathfrak{c}^{\aleph_0}$	15. $(\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}} + \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}})^{\mathfrak{c}}$

609 Definujme $\kappa_0 = \aleph_0$, $\kappa_{n+1} = 2^{\kappa_n}$. Dokážte, že $\kappa_n + \kappa_m = \kappa_n \cdot \kappa_m = \kappa_{\max\{n,m\}}$ a ${\kappa_n}^{\kappa_m} = \kappa_{\max\{n,m+1\}}$ pre $n, m \in \mathbb{N}$.

610 Akú najväčšiu mohutnosť môže mať

1. systém intervalov s racionálnymi koncami,
2. systém navzájom disjunktných otvorených intervalov,
3. systém navzájom disjunktných kruhov v rovine,
4. systém navzájom disjunktných podmnožín množiny $\mathbb{N}$,
5. systém podmnožín $\mathbb{N}$ lineárne usporiadaný inklúziou.

611 Aká je mohutnosť množiny $A \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$.

1. $A = \{p \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} : p \text{ je priamka}\}$;
2. $A = \{K \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} : K \text{ je kruh}\}$;
3. $A = \{E \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} : E \text{ je ekvivalencia}\}$;
4. $A = \{f \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R} : f \text{ je spojitá}\}$;
5. $A = \{f \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R} : f \text{ je rastúca}\}$.