Katedra matematickej informatiky
Prírodovedecká fakulta UPJŠ

Fuzzy logické programovanie

Peter Vojtáš

Košice 1998

Peter Vojtáš: Katedra matematickej informatiky, Prírodovedecká fakulta UPJŠ v Košiciach, Jesenná 5, 041 54 Košice
E-mail: vojtas@kosice.upjs.sk

Obsah

1. Výrokový počet vo viachodnotovej logike

1.1. **Motivácia.** a) Problém zastavenia Turingovho stroja: Kleene zavádza trojhodnotovú logiku s pravdivostnými hodnotami 0, u, 1 (u pre „undecided“).

b) Łukasiewiczova interpretácia modálnej logiky obsahuje tri pravdivostné hodnoty: 0, 1/2, 1. Hodnoty 1/2, 1 pre možné a hodnota 1 pre nutné.

c) Existuje analógia medzi logickými operáciami a booleovskými operáciami na javoch v štatistike a v pravdepodobnosti.

d) Vágnosť vo vyjadrovaní. Ľudská reč obsahuje neurčité veličiny (množstvá): vysoký, málo, ťažký.

e) Štatistické metrické priestory.

1.2. **Jazyk výrokového počtu.** Jazyk výrokového počtu tvorí spočítateľná (nekonečná) množina $\mathsf{EV} = \{e_0, e_1, \dots\}$ *výrokových premenných* (*elementárnych výrokov*), dvojica zátvoriek, čiarka a konečná množina $\mathcal{L}$ logických spojok. *Vytvárajúcou postupnosťou výroku* je taká postupnosť slov nad jazykom, ktorá spĺňa nasledujúcu podmienku: Každé slovo A v tejto postupnosti je buď výroková premenná alebo existujú slová $A_1, \dots, A_n$ v postupnosti pred výskytom slova A a existuje n-árna spojka $s \in \mathcal{L}$ taká, že A je slovo $s(A_1, \dots, A_n)$. Slovo A je *výrok* (*formula výrokového počtu*), ak existuje vytvárajúca postupnosť výroku, ktorej posledným členom je A. Množinu všetkých výrokov daného jazyka označujeme $\mathsf{Výroky}$.

Množina EV je obsiahnutá v každom jazyku výrokového počtu. Preto pojem „jazyk výrokového počtu“ ztotožňujeme s množinou $\mathcal{L}$. Poznamenajme ešte, že binárne logické spojky niekedy píšeme v infixnom tvare AsB (tak ako je to zvykom) namiesto prefixného tvaru $s(A, B)$.

1.3. **Množina pravdivostných hodnôt V.** Množinou pravdivostných hodnôt môže byť ľubovoľná množina $V \subseteq [0,1]$ taká, že $0, 1 \in V$. Každej logickej spojke $s \in \mathcal{L}$ árnosti n je priradená n-árna *pravdivostná funkcia* $\overset{\bullet}{s} : V^n \to V$.

Príklad 1.3.1. *V klasickej logike množina pravdivostných hodnôt je množina* $V = \{0, 1\}$ *a uvažujú sa jazyky* $\mathcal{L}_1 = \{\neg, \&\}$, $\mathcal{L}_2 = \{|\}$, $\mathcal{L}_3 = \{\neg, \&, \vee, \to, \leftrightarrow\}$. *Pravdivostné funkcie jednotlivých spojok sú dané pravdivostnými tabuľkami.* □

1.4. **Sémantika výrokového počtu.** *Interpretácia jazyka výrokového počtu* je ľubovoľné zobrazenie $v : \mathsf{EV} \to V$ a priradenie, ktoré každej spojke $s \in \mathcal{L}$ priradí pravdivostnú funkciu $\overset{\bullet}{s}$. Zobrazenie v sa dá jediným spôsobom predĺžiť na zobrazenie $\overline{v} : \mathsf{Výroky} \to V$ tak, že $\overline{v}(s(A_1, \dots, A_n)) = \overset{\bullet}{s}(\overline{v}(A_1), \dots, \overline{v}(A_n))$ pre ľubovoľnú n-árnu spojku $s \in \mathcal{L}$ a ľubovoľnú n-ticu výrokov $A_1, \dots, A_n$. Zobrazenie v nazývame tiež *ohodnotenie výrokových premenných*.

Príklad 1.4.1. *Pravdivostné funkcie s množinou pravdivostných hodnôt* $[0,1]$:

$$(1)\ \textit{Łukasiewiczove spojky}\quad \begin{cases} \overset{\bullet}{\&}_{\mathsf{Ł}}(x,y) = \max\{0, x+y-1\}, \\ \overset{\bullet}{\vee}_{\mathsf{Ł}}(x,y) = \min\{1, x+y\}, \\ \overset{\bullet}{\to}_{\mathsf{Ł}}(x,y) = \min\{1, 1-x+y\}. \end{cases}$$

$$(2)\ \textit{Produktové spojky}\quad \begin{cases} \overset{\bullet}{\&}_{\mathsf{P}}(x,y) = x \cdot y, \\ \overset{\bullet}{\vee}_{\mathsf{P}}(x,y) = x + y - x \cdot y, \\ \overset{\bullet}{\to}_{\mathsf{P}}(x,y) = \begin{cases} 1, & ak\ x \le y, \\ y/x, & ak\ x > y. \end{cases} \end{cases}$$

$$
\text{(3) } \textit{Gödelove spojky} \qquad \begin{cases} \overset{\bullet}{\&}_{\mathsf{G}}(x,y) = \min\{x,y\}, \\ \overset{\bullet}{\vee}_{\mathsf{G}}(x,y) = \max\{x,y\}, \\ \overset{\bullet}{\to}_{\mathsf{G}}(x,y) = \begin{cases} 1, & ak\ x \le y, \\ y, & ak\ x > y. \end{cases} \end{cases}
$$

$$
\text{(4) } \textit{Negácia} \qquad \overset{\bullet}{\neg}(x) = 1 - x.
$$

V teórii pravdepodobnosti spojky v prípadoch (1)–(3) *v poradí odpovedajú disjunktnosti, nezávislosti a inklúzii javov. V nasledujúcom používame toto označenie*: $\mathcal{L}_{\mathsf{Ł}} = \{\neg, \&_{\mathsf{Ł}}, \vee_{\mathsf{Ł}}, \to_{\mathsf{Ł}}\}$, $\mathcal{L}_{\mathsf{P}} = \{\neg, \&_{\mathsf{P}}, \vee_{\mathsf{P}}, \to_{\mathsf{P}}\}$, $\mathcal{L}_{\mathsf{G}} = \{\neg, \&_{\mathsf{G}}, \vee_{\mathsf{G}}, \to_{\mathsf{G}}\}$. □

Akúkoľvek funkciu môžeme prehlásiť za pravdivostnú funkciu nejakej spojky, hoci v ničom nemusí pripomínať klasické spojky. Samozrejme vtedy, keď zistíme, že je vhodná na popísanie nejakého javu.

Indukciou cez dĺžku vytvárajúcej postupnosti výroku A definujeme (1) *árnosť výroku* $n_A \in \mathbb{N}$, (2) *očíslovanie elementárnych výrokov v* A, t.j. konečné zobrazenie $\pi_A : \{1, 2, \ldots, n_A\} \to \mathbb{N}$, a (3) *pravdivostnú funkciu výroku* $f_A : V^{n_A} \to V$:

a) Ak $A = e_k$, potom (1) $n_A = 1$, (2) $\pi_A(1) = k$, (3) $f_A(x) = x$.

b$_0$) Ak s je 0-árna spojka a $A = s$, potom (1) $n_A = 0$, (2) $f_A = \overset{\bullet}{s} \in V$ je 0-árna funkcia, a (3) $\pi_A = \emptyset$.

b$_k$) Ak $A = s(A_1, \ldots, A_k)$, potom

(1) $n_A = n_{A_1} + \cdots + n_{A_k}$,

(2) $\pi_A(i + n_{A_1} + \cdots + n_{A_{j-1}}) = \pi_{A_j}(i)$ pre $1 \le i \le n_{A_j}$, $1 \le j \le k$,

(3) $f_A(x_1^1, \ldots, x_{n_{A_1}}^1, \ldots, x_1^k, \ldots, x_{n_{A_k}}^k)$
$= \overset{\bullet}{s}(f_{A_1}(x_1^1, \ldots, x_{n_{A_1}}^1), \ldots, f_{A_k}(x_1^k, \ldots, x_{n_{A_k}}^k))$.

O pravdivostnej hodnote výroku A rozhoduje výlučne ohodnotenie konečnej množiny elementárnych výrokov $\{e_{\pi_A(1)}, \ldots, e_{\pi_A(n_A)}\}$:

Tvrdenie 1.4.2. $\overline{v}(A) = f_A(v(e_{\pi_A(1)}), \ldots, v(e_{\pi_A(n_A)}))$ *pre každý výrok* A *a každé ohodnotenie* $v : \mathsf{EV} \to V$. □

Pravdivosť výroku závisí od množiny uvažovaných pravdivostných hodnôt. Pre ľubovoľnú množinu $V \subseteq [0, 1]$ takú, že $0, 1 \in V$ a V je uzavretá vzhľadom na pravdivostné funkcie spojok jazyka $\mathcal{L}$ definujeme množinu $\mathsf{Tautológie}(\mathcal{L}, V)$ všetkých výrokov v jazyku $\mathcal{L}$ takých, že $\overline{v}(A) = 1$ pre každé ohodnotenie $v : \mathsf{EV} \to V$. Budeme hovoriť, že výrok A je V-*tautológia* a zapisovať $\models_V A$, ak $A \in \mathsf{Tautológie}(\mathcal{L}, V)$. V tomto kontexte hovoríme o V-*výrokovom počte*. Namiesto A je $[0, 1]$-tautológia hovoríme, že A *je tautológia* a zapisujeme $\models A$.

Ak $\overline{v}(A) \le \overline{v}(B)$ pre každé ohodnotenie v, potom $A \to_i B$ je tautológia pre každé $i = \mathsf{Ł}$, P, G lebo $\overset{\bullet}{\to}_i(x, y) = 1$ pre $x \le y$. Hovoríme, že *výroky sú ekvivalentné* (V-*ekvivalentné*), ak $\overline{v}(A) = \overline{v}(B)$ pre každé ohodnotenie v. Ekvivalentnosť dvoch rôznych výrokov poukazuje na určitú závislosť medzi spojkami vo výrokoch. Napríklad v $\{0, 1\}$-výrokovom počte všetky spojky možno nahradiť dvojicou spojok $\neg$, $\&$.

Príklad 1.4.3. *Závislosti medzi spojkami.*

(1) *De Morganove zákony. Nech* $i = \mathsf{Ł}$, P *alebo* G. *Výroky* $A \vee_i B$ *a* $\neg(\neg A \&_i \neg B)$ *sú ekvivalentné.*

(2) *Implikácia.*

(a) *Výroky* $\neg A \vee_{\mathsf{Ł}} B$ *a* $A \to_{\mathsf{Ł}} B$ *sú ekvivalentné.*

(b) *Nech* $i = \mathsf{P}$ *alebo* $i = \mathsf{G}$. *Potom výroky* $\neg A \vee_i B$ *a* $A \to_i B$ *nie sú ekvivalentné a dokonca ani žiadna implikácia vytvorená z týchto výrokov nie je tautológia.*

(3) *Distributívnosť konjunkcie vzhľadom na disjunkciu (a naopak).*

(a) *Výroky* $A \,\&_{\mathsf{G}}\, (B \vee_{\mathsf{G}} C)$ *a* $(A \,\&_{\mathsf{G}}\, B) \vee_{\mathsf{G}} (A \,\&_{\mathsf{G}}\, C)$ *sú ekvivalentné.*

(b) *Implikácia* $A \,\&_{\mathsf{P}}\, (B \vee_{\mathsf{P}} C) \to_{\mathsf{P}} (A \,\&_{\mathsf{P}}\, B) \vee_{\mathsf{P}} (A \,\&_{\mathsf{P}}\, C)$ *je tautológia, ale obrátená implikácia k nej nie je tautológia.*

(c) *Implikácia* $A \,\&_{\mathsf{Ł}}\, (B \vee_{\mathsf{Ł}} C) \to_{\mathsf{Ł}} (A \,\&_{\mathsf{Ł}}\, B) \vee_{\mathsf{Ł}} (A \,\&_{\mathsf{Ł}}\, C)$ *je tautológia, ale obrátená implikácia k nej nie je tautológia.*

(4) *Zákon vylúčenia tretieho. Výrok* $A \vee_{\mathsf{Ł}} \neg A$ *je tautológia, a výroky* $A \vee_{\mathsf{P}} \neg A$, $A \vee_{\mathsf{G}} \neg A$ *nie sú tautológie.*

(5) *Idempotencia konjunkcie (a disjunkcie).*

(a) *Výroky* $A \,\&_{\mathsf{G}}\, A$ *a* A *sú ekvivalentné.*

(b) *Nech* $i = \mathsf{Ł}$ *alebo* $i = \mathsf{P}$. *Implikácia* $A \,\&_i\, A \to_i A$ *je tautológia, ale obrátená implikácia nie je.*

(6) *Absorpcia.*

(a) *Výroky* $A \vee_{\mathsf{G}} (B \,\&_{\mathsf{G}}\, A)$ *a* A *sú ekvivalentné.*

(b) *Nech* $i = \mathsf{Ł}$ *alebo* $i = \mathsf{P}$. *Implikácia* $A \to_i A \vee_i (B \,\&_i\, A)$ *je tautológia, ale obrátená implikácia k nej nie.*

Dôkaz. Nech $v : \mathsf{EV} \to [0,1]$ je ľubovoľné ohodnotenie a nech $a = \overline{v}(A)$, $b = \overline{v}(B)$, $c = \overline{v}(C)$.

(1) $\overline{v}(A \vee_i B) = \overset{\bullet}{\vee}_i(a,b) = 1 - \overset{\bullet}{\&}_i(1-a, 1-b) = \overline{v}(\neg(\neg A \,\&_i\, \neg B))$ pre každé $i = \mathsf{Ł}, \mathsf{P}, \mathsf{G}$.

(2) $i = \mathsf{Ł}$: $\overline{v}(\neg A \vee_{\mathsf{Ł}} B) = \overset{\bullet}{\vee}_{\mathsf{Ł}}(1-a, b) = \min\{1, 1-a+b\} = \overset{\bullet}{\to}_{\mathsf{Ł}}(a,b) = \overline{v}(A \to_{\mathsf{Ł}} B)$.

$i = \mathsf{P}$: Pre $a = b = 0.1$ je
$\overline{v}(\neg A \vee_{\mathsf{P}} B) = \overset{\bullet}{\vee}_{\mathsf{P}}(0.9, 0.1) = 0.91$, $\overline{v}(A \to_{\mathsf{P}} B) = \overset{\bullet}{\to}_{\mathsf{P}}(0.1, 0.1) = 1$.
Pre $a = 0.9$, $b = 0.1$ je
$\overline{v}(\neg A \vee_{\mathsf{P}} B) = \overset{\bullet}{\vee}_{\mathsf{P}}(0.1, 0.1) = 0.19$, $\overline{v}(A \to_{\mathsf{P}} B) = \overset{\bullet}{\to}_{\mathsf{P}}(0.9, 0.1) = 0.\overline{1}$.

$i = \mathsf{G}$: $\overline{v}(\neg A \vee_{\mathsf{G}} B) = \max\{1-a, b\}$.
Pre $a = b = 0.5$ je $\overline{v}(\neg A \vee_{\mathsf{G}} B) = 0.5$ a $\overline{v}(A \to_{\mathsf{G}} B) = 1$.
Pre $a = 0.5$, $b = 0.3$ je $\overline{v}(\neg A \vee_{\mathsf{G}} B) = 0.5$ a $\overline{v}(A \to_{\mathsf{G}} B) = 0.3$.

(3) $i = \mathsf{Ł}$: Pre $a = b = c = 0.4$ je
$\overline{v}(A \,\&_{\mathsf{Ł}}\, (B \vee_{\mathsf{Ł}} C)) = \overset{\bullet}{\&}_{\mathsf{Ł}}(0.4, 0.8) = 0.2$, $\overline{v}((A \,\&_{\mathsf{Ł}}\, B) \vee_{\mathsf{Ł}} (A \,\&_{\mathsf{Ł}}\, C)) = \overset{\bullet}{\&}_{\mathsf{Ł}}(0,0) = 0$.
Pre $a = b = c = 0.7$ je
$\overline{v}(A \,\&_{\mathsf{Ł}}\, (B \vee_{\mathsf{Ł}} C)) = \overset{\bullet}{\&}_{\mathsf{Ł}}(0.7, 1) = 0.7$, $\overline{v}((A \,\&_{\mathsf{Ł}}\, B) \vee_{\mathsf{Ł}} (A \,\&_{\mathsf{Ł}}\, C)) = \overset{\bullet}{\&}_{\mathsf{Ł}}(0.4, 0.4) = 0.8$.

$i = \mathsf{P}$: $\overline{v}(A \,\&_{\mathsf{P}}\, (B \vee_{\mathsf{P}} C)) = a(b + c - bc) \leq a(b + c - abc) = \overline{v}((A \,\&_{\mathsf{P}}\, B) \vee_{\mathsf{P}} (A \,\&_{\mathsf{P}}\, C))$. Pre $bc \neq 0$ a $0 < a < 1$ je $\overline{v}(A \,\&_{\mathsf{P}}\, (B \vee_{\mathsf{P}} C)) < \overline{v}((A \,\&_{\mathsf{P}}\, B) \vee_{\mathsf{P}} (A \,\&_{\mathsf{P}}\, C))$.

$i = \mathsf{G}$: $\overline{v}(A \,\&_{\mathsf{G}}\, (B \vee_{\mathsf{G}} C)) = \min\{a, \max\{b, c\}\}$ a $\overline{v}((A \,\&_{\mathsf{G}}\, B) \vee_{\mathsf{G}} (A \,\&_{\mathsf{G}}\, C)) = \max\{\min\{a,b\}, \min\{a,c\}\}$. Keďže $\langle [0,1], \min, \max \rangle$ je distributívny zväz, $\overline{v}(A \,\&_{\mathsf{G}}\, (B \vee_{\mathsf{G}} C)) = \overline{v}((A \,\&_{\mathsf{G}}\, B) \vee_{\mathsf{G}} (A \,\&_{\mathsf{G}}\, C))$.

(4) $i = \mathsf{Ł}$: $\overline{v}(A \vee_{\mathsf{Ł}} \neg A) = \min\{1, a + (1-a)\} = 1$.

$i = \mathsf{P}$: $\overline{v}(A \vee_{\mathsf{P}} \neg A) = a + (1-a) - a(1-a) = (a - 1/2)^2 + 3/4$.

$i = \mathsf{G}$: $\overline{v}(A \vee_{\mathsf{G}} \neg A) = \max\{a, 1-a\}$.

(5) $i = \mathsf{Ł}$: $\overline{v}(A \,\&_{\mathsf{Ł}}\, A) = \max\{0, 2a-1\} \leq a = \overline{v}(A)$. Rovnosť platí práve vtedy, keď $a = 0$ alebo $a = 1$.

$i = \mathsf{P}$: $\overline{v}(A \,\&_{\mathsf{P}}\, A) = a^2 \leq a = \overline{v}(A)$. Rovnosť platí práve vtedy, keď $a = 0$ alebo $a = 1$.

$i = \mathsf{G}$: $\overline{v}(A \,\&_{\mathsf{G}}\, A) = \max\{a, a\} = a = \overline{v}(A)$.

(6) $i = \text{Ł}$: $\overline{v}(A \vee_{\text{Ł}} (B \,\&_{\text{Ł}}\, A)) = \min\{1, a + \max\{0, b + a - 1\}\} \geq \min\{1, a\} = a = \overline{v}(A)$. Rovnosť platí práve vtedy, keď $a + b \leq 1$.

$i = \mathsf{P}$: $\overline{v}(A \vee_{\mathsf{P}} (B \,\&_{\mathsf{P}}\, A)) = a + (ba) - a(ba) = a(1 + b(1 - a)) \geq a = \overline{v}(A)$. Rovnosť platí práve vtedy, keď $\{a, b\} \cap \{0, 1\} \neq \emptyset$.

$i = \mathsf{G}$: $\overline{v}(A \vee_{\mathsf{G}} (B \,\&_{\mathsf{G}}\, A)) = \max\{a, \min\{b, a\}\} = a = \overline{v}(A)$. □

Príklad 1.4.4. *Označme* $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{Ł}} \cup (\mathcal{L}_{\mathsf{P}} \setminus \{\to_{\mathsf{P}}\}) \cup (\mathcal{L}_{\mathsf{G}} \setminus \{\to_{\mathsf{G}}\})$. *Množina* $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ *je uzavretá vzhľadom na pravdivostné funkcie spojok jazyka* $\mathcal{L}$ *a* $V_n = \{0, 1/n, \ldots, n/n\}$ *je uzavretá na pravdivostné funkcie spojok jazyka* $\mathcal{L}_{\text{Ł}} \cup \mathcal{L}_{\mathsf{G}}$ *pre* $n \geq 1$. *Platia nasledujúce inklúzie.*

(1) $\mathsf{Tautológie}(\mathcal{L}, [0, 1]) = \mathsf{Tautológie}(\mathcal{L}, [0, 1] \cap \mathbb{Q})$,

(2) $\mathsf{Tautológie}(\mathcal{L}_{\text{Ł}}, [0, 1] \cap \mathbb{Q}) \subsetneqq \mathsf{Tautológie}(\mathcal{L}_{\text{Ł}}, V_{n+1}) \subsetneqq \mathsf{Tautológie}(\mathcal{L}_{\text{Ł}}, V_n)$,

(3) $\mathsf{Tautológie}(\mathcal{L}_{\mathsf{G}}, [0, 1] \cap \mathbb{Q}) \subsetneqq \mathsf{Tautológie}(\mathcal{L}_{\mathsf{G}}, V_{n+1}) \subsetneqq \mathsf{Tautológie}(\mathcal{L}_{\mathsf{G}}, V_n)$,

(4) $\mathsf{Tautológie}(\{\neg, \&_{\mathsf{G}}, \vee_{\mathsf{G}}\}, [0, 1]) = \mathsf{Tautológie}(\{\neg, \&_{\mathsf{G}}, \vee_{\mathsf{G}}\}, \{0, 1/2, 1\}) = \emptyset$.

Dôkaz. (1) Pravdivostné funkcie všetkých spojok jazyka $\mathcal{L}$ sú spojité. Pravdivostná funkcia f_A výroku A je kompozíciou pravdivostných funkcií spojok a preto je tiež spojitá. Predpokladajme, že pre nejaké ohodnotenie $v : \mathsf{EV} \to [0, 1]$ je $\overline{v}(A) < 1$. Podľa Tvrdenia 1.4.2 $f_A(v(e_{\pi_A(1)}), \ldots, v(e_{\pi_A(n_A)})) < 1$ a zo spojitosti funkcie f_A vyplýva, že množina $\{(x_1, \ldots, x_{n_A}) : f_A(x_{\pi_A(1)}, \ldots, x_{\pi_A(n_A)}) < 1\}$ je otvorená neprázdna množina a teda obsahuje nejakú n_A-ticu $(r_1, \ldots, r_{n_A}) \in ([0, 1] \cap \mathbb{Q})^{n_A}$. Nech $w : \mathsf{EV} \to [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ je také ohodnotenie, že $w(e_{\pi(i)}) = r_{\pi_A(i)}$ pre $i \leq n_A$. Potom $\overline{w}(A) < 1$. Preto platí rovnosť $\mathsf{Tautológie}(\mathcal{L}, [0, 1]) = \mathsf{Tautológie}(\mathcal{L}, [0, 1] \cap \mathbb{Q})$.

(2) Nech A_1 je ľubovoľný elementárny výrok, $A_{n+1} = A_1 \vee_{\text{Ł}} A_n$. Nech v je ľubovoľné ohodnotenie a označme $a = v(A_1)$. Indukciou sa ľahko ukáže, že $\overline{v}(A_n) = \min\{1, na\}$. Nech $B_n = \neg A_{n+1} \vee_{\text{Ł}} A_n$. Ukážeme, že B_n je V_n-tautológia, ale nie je V_{n+1}-tautológia. Keďže $\overline{v}(B_n) = \min\{1, (1 - \overline{v}(A_{n+1})) + \overline{v}(A_n)\}$ a $\overline{v}(A_n) \leq \overline{v}(A_{n+1})$, $\overline{v}(B_n) = 1$ práve vtedy, keď $\overline{v}(A_n) = \overline{v}(A_{n+1})$, t.j. práve vtedy, keď $a = 0$ alebo $na \geq 1$. Táto podmienka je splnená pre každé $a \in V_n$ ale neplatí pre všetky $a \in V_{n+1}$.

(3) Nech $A_n = (e_0 \to_{\mathsf{G}} e_1) \vee_{\mathsf{G}} \ldots \vee_{\mathsf{G}} (e_n \to_{\mathsf{G}} e_{n+1})$. $\overline{v}(A_n) < 1$ práve vtedy, keď $v(e_0) > v(e_1) > \cdots > v(e_{n+1})$. Tieto nerovnosti sa nedajú splniť v množine pravdivostných hodnôt V_n, ale dajú sa splniť vo V_n. Preto A_n je V_n-tautológia, ale nie je V_{n+1}-tautológia.

(4) Nech $v(e) = 1/2$ pre každý elementárny výrok e. Indukciou cez dĺžku vytvárajúcej postupnosti výroku A sa ľahko overí, že $\overline{v}(A) = 1/2$ pre každý výrok A v jazyku $\{\neg, \vee_{\mathsf{G}}, \&_{\mathsf{G}}\}$. □

Príklad 1.4.5 (Paradox viac-hodnotovej logiky)**.** *Predpokladajme, že* $\overline{v}(A) = \overline{v}(\neg A) = 1/2$. *Potom* $\overline{v}(A \,\&\, A) = \dot{\&}(\overline{v}(A), \overline{v}(A)) = \dot{\&}(\overline{v}(A), \overline{v}(\neg A)) = \overline{v}(A \,\&\, \neg A)$. □

Tento paradox uviedol J. Paris (Handbook of uncertain reasonning, 1996). Budeme ho obchádzať tak, že budeme mať viac konjunkcií a disjunkcií k dispozícii (na každý účel inú). Totiž javy na ľavej strane sú v inklúzii, zatiaľ čo javy na pravej strane sú disjunktné.

1.5. **Triangulárna norma.** Funkcia $t : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ je *t-norma*, ak

(1) $t(1,1) = 1$ a $t(1,0) = t(0,1) = t(0,0) = 0$.
(2) t je neklesajúca v oboch argumentoch, t.j., ak $x_1 \leq x_2$ a $y_1 \leq y_2$, tak $t(x_1, y_1) \leq t(x_2, y_2)$.
(3) t je symetrická, t.j. $t(x,y) = t(y,x)$.
(4) $t(x,1) = x$.
(5) t je asociatívna, t.j. $t(x, t(y,z)) = t(t(x,y), z)$.

Ľahko sa overí, že pravdivostné funkcie $\overset{\bullet}{\&}_{Ł}$, $\overset{\bullet}{\&}_{P}$, $\overset{\bullet}{\&}_{G}$ sú t-normy a $\overset{\bullet}{\&}_{Ł} \leq \overset{\bullet}{\&}_{P} \leq \overset{\bullet}{\&}_{G}$. Každá t-norma t spĺňa okamžite aj rovnosť $t(x,0) = 0$ vďaka monotónnosti a podmienke (1). Vôbec, t-normy sú vhodní kandidáti pre pravdivostné funkcie konjunkcií. Napriek tomu, z praktického hľadiska je požiadavka asociatívnosti pri pravdivostných funkciách logických spojok málokedy splniteľná. Jedným z dôvodov sú zaokrúhľovacie chyby pri výpočte. Nech $\overset{\bullet}{\&}_{G'}$ označuje Gödelovu konjunkciu zaokrúhlenú na jedno desatinné miesto. Potom

$$\overset{\bullet}{\&}_{G'}(0.5, \overset{\bullet}{\&}_{G'}(0.7, 0.9)) = \overset{\bullet}{\&}_{G'}(0.5, 0.6) = 0.3,$$
$$\overset{\bullet}{\&}_{G'}(\overset{\bullet}{\&}_{G'}(0.5, 0.7), 0.9) = \overset{\bullet}{\&}_{G'}(0.4, 0.9) = 0.4.$$

Iným dôvodom je, že to niekedy neumožňuje voľba konečnej množiny logických hodnôt (napríklad $V = \{0, 1/n, \ldots, n/n\}$).

Tvrdenie 1.5.1. *$t(x,y) \leq \overset{\bullet}{\&}_{G}(x,y)$ pre každú t-normu t a $x, y \in [0,1]$, t.j. $\overset{\bullet}{\&}_{G}$ je najväčšia t-norma.* □

Dôkaz. Pomocou podmienok (2) a (4) definície t-normy dostaneme

$$t(x,y) \leq \min\{t(x,1), t(1,y)\} = \min\{x,y\} = \overset{\bullet}{\&}_{G}(x,y). \qquad \Lambda$$

Tvrdenie 1.5.2. *Nasledujúca funkcia je najmenšia t-norma:*

$$t_{\min}(x,y) = \begin{cases} x, & \text{ak } y = 1, \\ y, & \text{ak } x = 1 \text{ a } y < 1, \\ 0, & \text{ak } x, y < 1. \end{cases}$$

Dôkaz. Priamo z definície vyplýva, že $t_{\min} \leq t$ pre každú t-normu. Ukážeme, že $t_{\min}$ je t-norma. Netriviálna je len podmienka asociatívnosti a tá sa overí rozborom prípadov

$$t_{\min}(t_{\min}(x,y), z) = \left\{ \begin{matrix} t_{\min}(y,z), & \text{ak } x = 1, \\ t_{\min}(x,z), & \text{ak } y = 1, \\ t_{\min}(x,y), & \text{ak } z = 1, \\ 0, & \text{ináč}, \end{matrix} \right\} = t_{\min}(x, t_{\min}(y,z)). \qquad \Lambda$$

Príklad 1.5.3. *Pre $p > 0$ definujeme $t_p(x,y) = \sqrt[p]{\max\{0, x^p + y^p - 1\}}$.*

(1) *Funkcia t_p je t-norma a $t_1 = \overset{\bullet}{\&}_{Ł}$.*
(2) *Ak $p > q > 0$, potom $t_p(x,y) \leq t_q(x,y)$ a rovnosť $t_p(x,y) = t_q(x,y)$ platí práve vtedy, keď $x^q + y^q \leq 1$ alebo $x = 1$ alebo $y = 1$.* □

1.6. **Odvodzovanie výrokov.** *Teória vo výrokovom počte* s množinou pravdivostných hodnôt V je ľubovoľné zobrazenie $T : \mathsf{Výroky} \to V$. Teóriu T stotožňujeme s čiastočnou funkciou $T' = T{\restriction}\{A : T(A) > 0\}$ alebo ekvivalentne $T' = \{(A, x) : x = T(A) > 0\}$. Usporiadaná dvojica $(A, x) \in \mathsf{Výroky} \times V$ sa nazýva *axióma teórie* T, ak $T(A) = x$. Ohodnotenie $v : \mathsf{EV} \to V$ sa nazýva *model teórie* T, ak $\overline{v}(A) \geq T(A)$ pre každý výrok A. Dvojica (A, x) je *tautologický dôsledok teórie* T, zapisujeme $T \models_V (A, x)$, ak $\overline{v}(A) \geq x$ pre každý model v teórie T. Postupnosť (A_0, x_0), (A_1, x_1), $\dots$, (A_n, x_n) je *dôkaz v teórii* T *so systémom odvodzovacích pravidiel* $\mathcal{P}$, ak pre každé $i \leq n$ je $x_i \leq T(A_i)$ alebo existujú indexy $j_1, \dots , j_m < i$ a pravdivostné hodnoty $x'_{j_1} \leq x_{j_1}$, $\dots$, $x'_{j_m} \leq x_{j_m}$, $x'_i \geq x_i$ také, že

$$\frac{(A_{j_1}, x'_{j_1}), \dots , (A_{j_m}, x'_{j_m})}{(A_i, x'_i)}$$

je inštanciou nejakého odvodzovacieho pravidla v $\mathcal{P}$.

1.7. **Modus ponens.** Predpokladajme, že funkcia $I : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ je pravdivostná funkcia implikácie $\to_I$. *Modus ponens pre* $\to_I$ je odvodzovacie pravidlo tvaru

$$\frac{(A, x), (A \to_I B, y)}{(B, C(x, y))}, \tag{1.1}$$

kde $C : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$. Odvodzovacie pravidlo (1.1) je *korektné odvodzovacie pravidlo*, ak $\overline{v}(B) \geq C(x, y)$ pre každý model v teórie $T = \{(A, x), (A \to_I B, y)\}$ a pre všetky výroky A, B.

Nech $C, I : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ sú ľubovoľné funkcie. Nech $\mathrm{MP}(C, I)$ označuje tvrdenie: *Odvodzovacie pravidlo* (1.1) *je korektné odvodzovacie pravidlo v* $[0, 1]$-*výrokovom počte.*

V pravidle (1.1) nech A, B sú ľubovoľné elementárne výroky. Ohodnotenie $v : \mathsf{EV} \to [0, 1]$ je modelom teórie $T = \{(A, x), (A \to_I B, y)\}$ práve vtedy, keď $a = v(A) \geq x$ a $\overline{v}(A \to_I B) = I(a, b) \geq y$, kde $b = v(B)$. Preto platí

$$\begin{aligned} \mathrm{MP}(C, I) &\equiv (\forall a, b, x, y \in [0, 1])(a \geq x \,\&\, I(a, b) \geq y) \to b \geq C(x, y) \\ &\equiv (\forall x, y, a, b \in [0, 1])(x \geq a \,\&\, C(a, b) > y) \to b > I(x, y) \end{aligned} \tag{1.2}$$

(v druhej charakterizácii sú premenné x, y zamenené s premennými a, b a implikácia obmenenou implikáciou). Pre $I, C : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ definujeme

$$\begin{aligned} &\mathcal{C}_I = \{C : \mathrm{MP}(C, I)\}, && \mathcal{I}_C = \{I : \mathrm{MP}(C, I)\}, \\ &C_I^{\sup} = \sup \mathcal{C}_I, && I_C^{\sup} = \sup \mathcal{C}_I, \\ &C_I(x, y) = \inf\{b \in [0, 1] : I(x, b) \geq y\}, && I_C(x, y) = \sup\{b \in [0, 1] : C(x, b) \leq y\}, \end{aligned}$$

kde $\inf \emptyset = 1$ a $\sup \emptyset = 0$. Z definície $\mathrm{MP}(C, I)$ je očividný význam funkcie $C_I^{\sup}$ v snahe získať čo najsilnejšie odvodzovacie pravidlo a podobný je aj význam $I_C^{\sup}$.

Tvrdenie 1.7.1. *Nech* $C, I : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$.

(1a) $C_I^{\sup}(x, y) = \inf\{b : (\exists a \geq x)\, I(a, b) \geq y\} \leq C_I(x, y)$, $C_I^{\sup} \in \mathcal{C}_I$ *a funkcia* $C_I^{\sup}$, *je neklesajúca v oboch argumentoch.*

(1b) *Ak* I *je nerastúca v prvom argumente, potom* $C_I^{\sup} = C_I$ *a teda funkcia* C_I *je neklesajúca v oboch argumentoch.*

(2a) $I_C^{\sup}(x,y) = \inf\{b : (\exists a \leq x)\, C(a,b) > y\} \leq I_C(x,y)$ *a funkcia* $I_C^{\sup}$ *je nerastúca v prvom argumente a neklesajúca v druhom argumente.*

(2b) *Ak* C *je neklesajúca v prvom argumente, potom* $I_C^{\sup}(x,y) = \inf\{b : C(x,b) > y\}$.

(2c) *Ak* C *je neklesajúca v oboch argumentoch, potom* $I_C^{\sup} = I_C$ *a teda funkcia* I_C *je nerastúca v prvom argumente a neklesajúca v druhom argumente.*

Dôkaz. Vlastnosti v podmienkach (1a), (2a) vyplývajú z charakterizácií (1.2) vlastnosti $\mathrm{MP}(C,I)$. Dokážeme len nerovnosť v (2a). Stačí ukázať, že I_C je horným ohraničením systému $\mathcal{I}_C$. Predpokladajme teda, že platí $\mathrm{MP}(C,I)$ a ukážeme, že $I \leq I_C$. Zvoľme $x, y \in [0,1]$ ľubovoľne. Označme $b_0 = I(x,y)$. Keďže $I(x,y) \geq b_0$, z $\mathrm{MP}(C,I)$ vyplýva $y \geq C(x,b_0)$ a teda $I(x,y) = b_0 \leq \sup\{b : C(x,b) \leq y\} = I_C(x,y)$.

(1b) & (2b) Z monotónnosti I a z monotónnosti C vyplývajú v tom istom poradí rovnosti množín

$$\{b : (\exists a \geq x)\, I(a,b) \geq y\} = \{b : I(x,b) \geq y\},$$
$$\{b : (\exists a \leq x)\, C(a,b) > y\} = \{b : C(x,b) > y\}$$

a teda aj ich dolných hraníc.

(2c) Podľa (2a) platí nerovnosť $I_C^{\sup} \leq I_C$. Obrátená nerovnosť

$$I_C^{\sup}(x,y) = \inf\{b : C(x,b) > y\} \geq \sup\{b : C(x,b) \leq y\} = I_C(x,y)$$

vyplýva z monotónnosti C a charakterizácie (2b). □

Budeme potrebovať nasledujúce dve vlastnosti funkcií C, I:

$$\Phi_2(C,I) \equiv (\forall x, y \in [0,1])\, C(x, I(x,y)) \leq y,$$
$$\Phi_3(C,I) \equiv (\forall x, y \in [0,1])\, I(x, C(x,y)) \geq y.$$

Podmienka $\Phi_2(C,I)$ súvisí s korektnosťou modus ponens a súčasné splnenie podmienky $\Phi_3(C,I)$ zaručuje maximalitu príslušného modus ponens (t.j. implikácia v charakterizácií (1.2) platí aj obrátene za predpokladu, že I je monotónna).

Tvrdenie 1.7.2. *Nech* $C, I : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$. *Funkcie* I_C *a* C_I *sú neklesajúce v druhom argumente. Naviac platí:*

(1a) *Ak* I *je nerastúca v prvom argumente, potom* C_I *je neklesajúca v prvom argumente.*

(1b) *Ak* C *je neklesajúca v prvom argumente, potom* I_C *je nerastúca v prvom argumente.*

(2a) $C \leq C_I \to \Phi_2(C,I) \to I \leq I_C$.

(2b) $I_C \leq I \to \Phi_3(C,I) \to C_I \leq C$.

(3a) $\Phi_2(C,I)\ \&\ \Phi_3(C,I) \to C = C_I$, *ak* C *je neklesajúca v druhom argumente.*

(3b) $\Phi_2(C,I)\ \&\ \Phi_3(C,I) \to I = I_C$, *ak* I *je neklesajúca v druhom argumente.*

(4a) $\Phi_2(C, I_C) \to C = C_{I_C}$.

(4b) $\Phi_3(C_I, I) \to I = I_{C_I}$.

(5a) $\Phi_2(C, I_C)$, *ak* $(\forall x)(\exists b)\, C(x,b) = 0$ *a* C *je zľava spojitá v druhom argumente.*

(5b) $\Phi_3(C_I, I)$, *ak* $(\forall x)(\exists b)\, I(x,b) = 1$ *a* I *je sprava spojitá v druhom argumente.*

Dôkaz. Tvrdenia (1a) a (1b) vyplývajú bezprostredne z definícií.

(2a) Ak $C \leq C_I$, potom z definície C_I dostávame $C(x,y) \leq C_I(x, I(x,y)) = \inf\{b : I(x,b) \geq I(x,y)\} \leq y$. Nerovnosť $C(x, I(x,y)) \leq y$ znamená, že $I_C(x,y) = \sup\{b : C(x,b) \leq y\} \geq I(x,y)$.

(2b) Ak $I_C \leq I$, potom z definície I_C dostávame $I(x,y) \geq I_C(x, C(x,y)) = \sup\{b : C(x,b) \leq C(x,y)\} \geq y$. Nerovnosť $I(x, C(x,y)) \geq y$ znamená, že $C_I(x,y) = \inf\{b : I(x,y) \geq y\} \leq C(x,y)$.

(3a) Podľa (2a) z $\Phi_2(C,I)$ máme nerovnosť $I \leq I_C$. Nech $x, y \in [0,1]$ sú ľubovoľné. Označme $W = \{b : C(x,b) \leq y\}$. Pre každé $b \in W$ vďaka $\Phi_3(C,I)$ a monotónnosti I platí $I(x,y) \geq I(x, C(x,b)) \geq b$. Preto $I(x,y) \geq \sup W = I_C(x,y)$.

(3b) Podľa (2b) z $\Phi_3(C,I)$ máme nerovnosť $C_I \leq C$. Nech $x, y \in [0,1]$ sú ľubovoľné. Označme $W = \{b : I(x,b) \geq y\}$. Pre každé $b \in W$ vďaka $\Phi_2(C,I)$ a monotónnosti C platí $C(x,y) \leq C(x, I(x,b)) \leq b$. Preto $C(x,y) \leq \inf W = C_I(x,y)$.

(4a) Podľa (2b) platí $\Phi_3(C, I_C)$ a z (3a) vyplýva rovnosť $C_{I_C} = C$.

(4b) Podľa (2b) platí $\Phi_3(C, I_C)$ a z (3b) vyplýva rovnosť $I_{C_I} = I$.

(5a) Nech $x, y \in [0,1]$ sú ľubovoľné. $I_C(x,y) = \sup W$, kde $W = \{b : C(x,b) \leq y\}$. Podľa predpokladu $W \neq \emptyset$ a teda existuje neklesajúca postupnosť čísiel $b_n \in W$ pre $n \in \mathbb{N}$ taká, že $I_C(x,y) = \lim_{n\to\infty} b_n$. Z predpokladu spojitosti funkcie C dostávame $C(x, I_C(x,y)) = \lim_{n\to\infty} C(x, b_n) \leq y$.

(5b) $C_I(x,y) = \inf W$, kde $W = \{b : I(x,b) \geq y\} \neq \emptyset$. Vyberme $b_n \in W$, $b_n \geq b_{n+1}$ tak, že $C_I(x,y) = \lim_{n\to\infty} b_n$. Potom $I(x, C_I(x,y)) = \lim_{n\to\infty} C(x, b_n) \geq y$. □

Bezprostredným dôsledkom sú nasledujúce fakty:

(1) $\Phi_2(C_I, I)$	(3) $I \leq I_{C_I}$	(5) $\Phi_2(C, I_C) \leftrightarrow C = C_{I_C}$
(2) $\Phi_3(C, I_C)$	(4) $C_{I_C} \leq C$	(6) $\Phi_3(C_I, I) \leftrightarrow I = I_{C_I}$

Tvrdenie 1.7.3. *Ak C je neklesajúca v oboch argumentoch, potom nasledujúce podmienky sú ekvivalentné.*

(1) $\mathrm{MP}(C,I)$.
(2) $C \leq C_I$.
(3) $\Phi_2(C,I)$.

Dôkaz. Podľa Tvrdenia 1.7.1(1) platia implikácie (1) → (2) → (3). Nech $a \geq x$ a $I(a,b) \geq y$. Nerovnosti $C(x,y) \leq C(a, I(a,b)) \leq b$ platia vďaka monotónnosti funkcie C a podmienke $\Phi_2(C,I)$. Toto dokazuje platnosť implikácie (3) → (1). □

Z Tvrdenia 1.7.3 vyplýva, že $C_I^{\sup}$ je najväčšia monotónna funkcia C taká, že platí $C \leq C_I$.

Ak oproti predpokladom Tvrdenia 1.7.3 je funkcia C naviac zľava spojitá v druhom argumente a $(\forall x)(\exists b)\, C(x,b) = 0$, potom k ekvivalentným podmienkam (1)–(3) v Tvrdení 1.7.3 možno pridať ešte jednu podmienku:

(4) $I \leq I_C$.

Dôkaz. Z podmienky $\mathrm{MP}(C,I)$ podľa Tvrdenia 1.7.1(2a) vyplýva nerovnosť (4). Dokážeme implikáciu (4) → (3). Za uvedeného predpokladu z Tvrdenia 1.7.2(5a) vyplýva $\Phi_2(C, I_C)$ a vďaka monotónnosti funkcie C dostávame $C(x, I(x,y)) \leq C(x, I_C(x,y)) \leq y$. □

Tvrdenie 1.7.4. *Nech $C, I : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$.*

(1) $C_{I_C} = C$ *práve vtedy, keď C je neklesajúca v druhom argumente a zľava spojitá v druhom argumente.*
(2) $I_{C_I} = I$ *práve vtedy, keď I je neklesajúca v druhom argumente a sprava spojitá v druhom argumente.*

Dôkaz. (1) Nech $C_{I_C} = C$. Podľa Tvrdenia 1.7.2 je funkcia C neklesajúca v druhom argumente. Nech $w_n \leq w_{n+1}$, $w_n \in [0,1]$ pre $n \in \mathbb{N}$. Vďaka monotónnosti funkcie C platí $\lim_{n\to\infty} C(x, w_n) \leq C(x, \lim_{n\to\infty} w_n)$. Dokážeme obrátenú nerovnosť. Označme $y = \lim_{n\to\infty} w_n$ a $b_0 = \lim_{n\to\infty} C(x, w_n)$. Potom $I_C(x, b_0) = \sup\{w : C(x,w) \leq b_0\} \geq y$, lebo $C(x, w_n) \leq b_0$ pre $n \in \mathbb{N}$. Preto platí $C(x, \lim_{n\to\infty} w_n) = C_{I_C}(x,y) = \inf\{b : I_C(x,b) \geq y\} \leq b_0 = \lim_{n\to\infty} C(x, w_n)$.

Naopak, nech C je neklesajúca a zľava spojitá v druhom argumente. Nech $x, y \in [0,1]$ sú ľubovoľné. $C_{I_C}(x,y) = \inf W$, kde $W = \{b : I_C(x,y) \geq y\}$. Keďže C je neklesajúca, tak $(\forall w < y)\, C(x,w) \leq b$ a zo spojitosti funkcie C vyplýva, že $C(x,y) \leq b$ pre každé $b \in W$. Preto $C(x,y) \leq \inf W = C_{I_C}(x,y)$. Opačná nerovnosť vyplýva z Tvrdenia 1.7.2(2b).

(2) Nech $I_{C_I} = I$. Podľa Tvrdenia 1.7.2 je funkcia I neklesajúca v druhom argumente. Nech $w_n \geq w_{n+1}$, $w_n \in [0,1]$ pre $n \in \mathbb{N}$. Označme $y = \lim_{n\to\infty} w_n$ a $b_0 = \lim_{n\to\infty} I(x, w_n)$. Potom $C_I(x, b_0) = \inf\{w : I(x,w) \geq b_0\} \leq y$, lebo $I(x, w_n) \geq b_0$ pre $n \in \mathbb{N}$. Preto $I(x, \lim_{n\to\infty} w_n) = I_{C_I}(x,y) = \sup\{b : C_I(x,b) \leq y\} \geq b_0 = \lim_{n\to\infty} I(x, w_n)$. Opačná nerovnosť je dôsledkom monotónnosti funkcie I.

Naopak. Nech $x, y \in [0,1]$ sú ľubovoľné. $I_{C_I}(x,y) = \sup W$, kde $W = \{b : C_I(x,b) \leq y\}$. Pre každé $b \in W$ je $C_I(x,b) = \inf\{w : I(x,w) \geq b\} \leq y$ a keďže I je neklesajúca, tak $(\forall w > y)\, I(x,w) \geq b$ a zo spojitosti funkcie C vyplýva, že $I(x,y) \geq b$ pre každé $b \in W$. Preto $I(x,y) \geq \sup W = I_{C_I}(x,y)$. Opačná nerovnosť vyplýva z Tvrdenia 1.7.2(2a). □

Tvrdenie 1.7.5. *Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*

(1) $\mathrm{MP}(C,I)$ & $\Phi_3(C,I)$,
(2) $C = C_I^{\sup}$ & $I = I_C$,
(3) $I = I_C$, *C je neklesajúca v oboch argumentoch a zľava spojitá v druhom argumente,*
(4) $C = C_I$, *I je nerastúca v prvom argumente, neklesajúca v druhom argumente a sprava spojitá v druhom argumente,*
(5) $C = C_I$ & $I = I_C$ & Ω, *kde Ω je ľubovoľné z tvrdení (α), (β), (α) & (β), $(\alpha) \vee (\beta)$ a*

$$(\alpha) \equiv I \text{ je nerastúca v prvom argumente,}$$
$$(\beta) \equiv C \text{ je neklesajúca v prvom argumente.}$$

Dôkaz. (1) → (2) Z $\mathrm{MP}(C,I)$ vyplývajú nerovnosti $C \leq C_I^{\sup} \leq C_I$ a z $\Phi_3(C,I)$ podľa Tvrdenia 1.7.2(2b) máme $C_I \leq C$.

(2) → (3) Funkcia $C = C_I^{\sup}$ je neklesajúca v oboch argumentoch. Preto funkcia $I = I_C$ je nerastúca v prvom argumente a podľa Tvrdenia 1.7.1(1b) platí $C_I^{\sup} = C_I$. Preto $C = C_I = C_{I_C}$ a funkcia C je zľava spojitá v druhom argumente podľa Tvrdenia 1.7.4(1).

(3) → (4) Z podmienky (3) podľa Tvrdenia 1.7.4(1) vyplýva, že $C = C_{I_C} = C_I$ a teda $I = I_C = I_{C_I}$. Podľa Tvrdenia 1.7.2(1b) je funkcia $I = I_C$ nerastúca v prvom argumente.

(4) → (5) Podľa Tvrdenia 1.7.4(2) z podmienky (4) vyplývajú rovnosti $I = I_{C_I} = I_C$ a teda rovnosť $C = C_I$ a samozrejme aj podmienka Ω.

(5) → (1) Ak funkcia C je neklesajúca v prvom argumente, tak funkcia $I = I_C$ je nerastúca v prvom argumente. Ak funkcia I je nerastúca v prvom argumente, tak funkcia $I = I_C$ je neklesajúca v prvom argumente. Teda nech tvrdenie Ω je akékoľvek, z Tvrdenia 1.7.2(1a) vyplýva, že funkcia $C = C_I$ je neklesajúca v oboch

argumentoch a preto podľa Tvrdenia 1.7.3 z rovnosti $C = C_I$ vyplýva $\mathrm{MP}(C, I)$. Podľa Tvrdenia 1.7.2(2b) z rovnosti $I = I_C$ vyplýva $\Phi_3(C, I)$. $\square$

Hovoríme, že *modus ponens* (1.1) *je regulárny*, ak je korektný a platí $\Phi_3(C, I)$, t.j. ak platí ktorákoľvek podmienka v Tvrdení 1.7.5. V takomto prípade hovoríme, že *funkcia I je združená k funkcii C*.

Príklad 1.7.6. *Predpokladajme, že modus ponens* (1.1) *je regulárny. Potom funkcie C, I majú nasledujúce vlastnosti:*

(1) $I(x, y) = I(x, C(x, I(x, y)))$.
(2) $C(x, y) = C(x, I(x, C(x, y)))$.
(3) $I(x, z) \geq y \leftrightarrow C(x, y) \leq z$.
(4) $I(x, y) = 1 \leftrightarrow C(x, 1) \leq y$.
(5) $I(x, 0) = 1 \leftrightarrow C(x, 1) = 0$.
(6) $I(x, 1) = 1$.
(7) $C(x, 0) = 0$.

Dôkaz. Všetky podmienky sú dôsledkom vlastností $\Phi_2(C, I)$, $\Phi_3(C, I)$ a monotónnosti funkcií C, I. $\square$

Hovoríme, že funkcia $C : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ je *konjunktor*, ak C je neklesajúca v oboch argumentoch a C rozširuje dvojhodnotovú konjunkciu, t.j. $C(1, 1) = 1$, $C(0, 0) = C(0, 1) = C(1, 0) = 0$. Hovoríme, že funkcia $I : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ je *implikátor*, ak I je nerastúca v prvom argumente, neklesajúca v druhom argumente a I rozširuje dvojhodnotovú implikáciu, t.j. $I(1, 0) = 0$, $I(0, 0) = I(0, 1) = I(1, 1) = 1$.

Príklad 1.7.7. *Pravdivostné funkcie $\overset{\bullet}{\to}_{\mathsf{Ł}}$, $\overset{\bullet}{\to}_{\mathsf{P}}$, $\overset{\bullet}{\to}_{\mathsf{G}}$ sú implikátory sprava spojité v druhom argumente a sú združené v poradí k funkciám $C_{\mathsf{Ł}} = \overset{\bullet}{\&}_{\mathsf{Ł}}$, $C_{\mathsf{P}} = \overset{\bullet}{\&}_{\mathsf{P}}$, $C_{\mathsf{G}} = \overset{\bullet}{\&}_{\mathsf{G}}$.*

Príklad 1.7.8. *Nech $p > 0$. Implikátor $I_p(x, y) = \min\{1, \sqrt[p]{1 - x^p + y^p}\}$ je združený k t-norme $t_p(x, y) = \sqrt[p]{\max\{0, x^p + y^p - 1\}}$.*

Tvrdenie 1.7.9. *Nech $C, I : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$.*

(1a) *Ak $I(0, 0) = 1$ a $(\forall b < 1)\, I(1, b) < 1$, potom $C_I^{\sup}$ je konjunktor.*
(1b) *Ak $I(0, 0) = 1$, $(\forall b < 1)\, I(1, b) < 1$ a I je nerastúca v prvom argumente, potom C_I je konjunktor.*
(2a) *Ak $(\forall b < 1)\, C(0, b) = 0$ a $(\forall b > 0)(\exists a)\, C(a, b) > 0$, potom $I_C^{\sup}$ je implikátor.*
(2b) *Ak $(\forall b < 1)\, C(0, b) = 0$, $(\forall b > 0)\, C(1, b) > 0$ a C je neklesajúca v prvom argumente, potom I_C je implikátor.*

Dôkaz. $C_I^{\sup}$ je neklesajúca a $I_C^{\sup}$ je nerastúca v prvom a neklesajúca v druhom argumente. Podobné vlastnosti majú aj funkcie C_I a I_C za daných predpokladov monotónnosti funkcií I a C. Zostáva len overiť, že predlžujú dvojhodnotovú konjunkciu, či dvojhodnotovú disjunkciu.

(1a) $C_I^{\sup}(x, 0) = \inf\{b : (\exists a \geq x)\, I(a, b) \geq 0\} = 0$,
$C_I^{\sup}(0, y) = \inf\{b : (\exists a)\, I(a, b) \geq y\} = 0$, lebo $I(0, 0) = 1$,
$C_I^{\sup}(1, 1) = \inf\{b : I(1, b) \geq 1\} = 1$, lebo $(\forall b < 1)\, I(1, b) < 1$.
(1b) Za predpokladu, že I je nerastúca v prvom argumente je $C_I = C_I^{\sup}$ podľa Tvrdenia 1.7.1(b).
(2a) $I_C^{\sup}(0, 0) = \inf\{b : C(0, b) > 0\} = 1$, lebo $(\forall b < 1)\, C(0, b) = 0$,
$I_C^{\sup}(0, 1) = \inf\{b : C(0, b) > 1\} = 1$,
$I_C^{\sup}(1, 0) = \inf\{b : (\exists a)\, C(a, b) > 0\} = 0$, lebo $(\forall b > 0)(\exists a)\, C(a, b) > 0$,
$I_C^{\sup}(1, 1) = \inf\{b : (\exists a)\, C(a, b) > 1\} = 1$.

(2b) $I_C(0,0) = \sup\{b : C(0,b) \leq 0\} = 1$, lebo $(\forall b < 1)\, C(0,b) = 0$,
$I_C(1,0) = \sup\{b : C(1,b) \leq 0\} = 0$, lebo $(\forall b < 1)\, C(1,b) > 0$,
$I_C(0,1) = \sup\{b : C(0,b) \leq 1\} = 1$,
$I_C(1,1) = \sup\{b : C(1,b) \leq 1\} = 1$. □

2. Predikátový počet vo viachodnotovej logike

2.1. **Jazyk $\mathcal{L}$.** Daná je neprázdna množina Atr. Prvky množiny Atr nazývame *atribúty*. Pre každý atribút $a \in \mathsf{Atr}$ nech $\mathsf{Var}_a = \{x_0^a, x_1^a, \dots\}$ je spočítateľný (nekonečný) systém symbolov, ktoré nazývame *premenné atribútu a*. Systémy Var_a, $a \in \mathsf{Atr}$ sú navzájom disjunktné. Ďalej, je daný systém *predikátových symbolov* $\mathcal{P}$ a systém *funkčných symbolov* $\mathcal{F}$. Každému predikátovému symbolu $p \in \mathcal{P}$ a každému funkčnému symbolu $f \in \mathcal{F}$ je priradená árnosť $\mathrm{ar}(p)$ prípadne $\mathrm{ar}(f)$. V prípade predikátového symbolu $\mathrm{ar}(p)$ je funkcia z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ do Atr pre nejaké n, zapisujeme ju $\mathrm{ar}(p) = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, kde $\mathrm{ar}(p)(i) = a_i$ a hovoríme, že p je n-árny predikátový symbol. Podobne $\mathrm{ar}(f) = \langle a_1, \dots, a_n, a_{n+1} \rangle$ pre nejaké n a hovoríme, že f je n-árny funkčný symbol. Pre každý atribút $a \in \mathsf{Atr}$ je daný systém $\mathcal{C}_a$ *konštantných symbolov atribútu a*. Na konštantné symboly môžeme pozerať aj ako na 0-árne funkčné symboly. Prípadné 0-árne predikátové symboly reprezentujú logické konštanty.

Abeceda jazyka predikátového počtu $\mathcal{L}$ je tvorená systémami symbolov

$$\mathsf{Var}_a,\ a \in \mathsf{Atr}, \quad \mathcal{P}, \quad \mathcal{F}, \quad \mathcal{C}_a,\ a \in \mathsf{Atr}, \quad \mathcal{S},$$

kde $\mathcal{S}$ je systém logických spojok. Okrem týchto symbolov jazyk obsahuje kvantifikátory ($\forall$, $\exists$), zátvorky a čiarku.

Vytvárajúca postupnosť termu jazyka $\mathcal{L}$ je postupnosť usporiadaných dvojíc

$$(t_0, b_0), (t_1, b_1),\ \dots,\ (t_m, b_m)$$

taká, že pre každé $i \leq m$ je $b_i \in \mathsf{Atr}$, t_i je slovo v abecede jazyka $\mathcal{L}$ a je splnená jedna z nasledujúcich podmienok: (1) $t_i \in \mathsf{Var}_{b_i}$, (2) $t_i \in \mathcal{C}_{b_i}$, (3) existuje $f \in \mathcal{F}$, $\mathrm{ar}(f) = \langle a_1, \dots, a_{n+1} \rangle$ a existujú indexy $j_1, \dots, j_n < i$ také, že $b_{j_l} = a_l$ pre $l \leq n$, $b_i = a_{n+1}$ a $t_i = f(t_{j_1}, \dots, t_{j_n})$. Hovoríme, že slovo t je *term atribútu a*, ak existuje vytvárajúca postupnosť termu, ktorej posledným členom je usporiadaná dvojica (t, a). Term označuje množinu všetkých termov jazyka $\mathcal{L}$. Každé zobrazenie $\theta : \bigcup_{a \in \mathsf{Atr}} \mathsf{Var}_a \to \mathsf{Term}$, ktoré každej premennej priradí term toho istého atribútu ako je atribút premennej sa nazýva *substitúcia*.

Pre ľubovoľný term $t \in \mathsf{Term}$ a substitúciu θ definujeme term $t[\theta] \in \mathsf{Term}$ indukciou cez dĺžku vytvárajúcej postupnosti termu: (1) ak $t = x$, potom $t[\theta] = \theta(x)$, (2) ak $t = c$, potom $t[\theta] = c$ a (3) ak $t = f(t_1, \dots, t_n)$, potom $t[\theta] = f(t_1[\theta], \dots, t_n[\theta])$.

Triviálna substitúcia id je definovaná rovnosťou $\mathrm{id}(x) = x$. Nech θ_1, θ_2 sú ľubovoľné substitúcie. Definujeme operáciu kompozície $\theta_1 \circ \theta_2$ rovnosťou $(\theta_1 \circ \theta_2)(x) = \theta_1(x)[\theta_2]$. Postupnosť slov φ_0, φ_1, ..., φ_m je *vytvárajúca postupnosť formuly jazyka* $\mathcal{L}$, ak pre každé $i \leq m$ je splnená jedna z podmienok: (1) $\varphi_i = p(t_1, \dots, t_n)$, kde $p \in \mathcal{P}$, $\mathrm{ar}(p) = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ a t_1, ..., t_n sú termy atribútov a_1, ..., a_n v rovnakom poradí, (2) $\varphi_i = s(\varphi_{j_1}, \dots, \varphi_{j_n})$ pre n-árnu logickú spojku s a indexy $j_1, \dots, j_n < i$, (3) $\varphi_i = (\forall x_k^a)\, \varphi_j$ alebo $\varphi_i = (\exists x_k^a)\, \varphi_j$ pre nejaké $j < i$. Slovo φ je *formula jazyka* $\mathcal{L}$, ak existuje vytvárajúca postupnosť formuly, ktorej posledným členom je φ. Formula φ je *formula bez kvantifikátorov*, ak žiaden člen vytvárajúcej postupnosti formuly φ nespĺňa podmienku (3). Množinu všetkých formúl jazyka $\mathcal{L}$ označujeme Σ a množinu všetkých formúl jazyka $\mathcal{L}$ bez kvantifikátorov označujeme Σ_0.

Pre ľubovoľnú formulu $\varphi \in \Sigma_0$ a pre každú substitúciu θ definujeme formulu $\varphi[\theta] \in \Sigma_0$ indukciou cez dĺžku vytvárajúcej postupnosti formuly: (1) ak $\varphi = p(t_1, \ldots, t_n)$, potom $\varphi[\theta] = p(t_1[\theta], \ldots, t_n[\theta])$ a (2) ak $\varphi = s(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, potom $\varphi[\theta] = s(\varphi_1[\theta], \ldots, \varphi_n[\theta])$.

Nech $\mathcal{C}_0 = \{c_n : n \in \mathbb{N}\}$ je postupnosť navzájom rôznych konštánt a $\theta : \mathcal{C}_0 \to \mathsf{Term}$, kde $\theta(c_n)$ je term toho istého atribútu ako konštanta c_n pre všetky n. Rovnakým spôsobom sa definuje substitúcia $\varphi[\theta]$ pre $\varphi \in \Sigma_0$ (tento pojem v špeciálnom prípade použijeme v dôkaze Vety 3.4.15).

2.2. **Interpretácia jazyka $\mathcal{L}$.** Nech $V \subseteq [0, 1]$ je množina pravdivostných hodnôt, $0, 1 \in V$ a nech $\{M_a : a \in \mathsf{Atr}\}$ je systém neprázdnych množín. *Interpretácia* $\mathfrak{M}$ *jazyka* $\mathcal{L}$ je zobrazenie s nasledujúcimi vlastnosťami:

(1) Každému predikátovému symbolu $p \in \mathcal{P}$, $\mathrm{ar}(p) = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle$, $\mathfrak{M}$ priradí funkciu (t.j. fuzzy reláciu) $p_{\mathfrak{M}} : M_{a_1} \times \cdots \times M_{a_n} \to V$ a v prípade, že $n = 0$, $p_{\mathfrak{M}} \in V$ je pravdivostná hodnota.
(2) Každému funkčnému symbolu $f \in \mathcal{F}$ s $\mathrm{ar}(p) = \langle a_1, \ldots, a_{n+1}\rangle$, $n \geq 1$, $\mathfrak{M}$ priradí funkciu $f_{\mathfrak{M}} : M_{a_1} \times \cdots \times M_{a_n} \to M_{a_{n+1}}$.
(3) Každému konštantnému symbolu $c \in \mathcal{C}_a$ $\mathfrak{M}$ priradí prvok $c_{\mathfrak{M}} \in M_a$.

Interpretáciu $\mathfrak{M}$ ztotožňujeme so systémom

$$\langle\langle M_a : a \in \mathsf{Atr}\rangle, \langle p_{\mathfrak{M}} : p \in \mathcal{P}\rangle, \langle f_{\mathfrak{M}} : f \in \mathcal{F}\rangle, \langle c_{\mathfrak{M}} : c \in \textstyle\bigcup_{c \in \mathsf{Atr}} \mathcal{C}_a\rangle\rangle$$

a $\mathfrak{M}$ nazývame *štruktúra pre jazyk $\mathcal{L}$.*

Zobrazenie $e : \bigcup_{a \in \mathsf{Atr}} \mathsf{Var}_a \to \bigcup_{a \in \mathsf{Atr}} M_a$ sa nazýva *ohodnotenie premenných*, ak $e(x_i^a) \in M_a$ pre $i \in \mathbb{N}$, $a \in \mathsf{Atr}$. Indukciou cez vytvárajúcu postupnosť termu definujeme *hodnotu $t[e]$ termu t v ohodnotení e*: (1) ak $t = x \in \mathsf{Var}_a$, potom $t[e] = e(x)$, (2) ak $t = c \in \mathcal{C}_a$, potom $t[e] = c_{\mathfrak{M}}$, (3) ak $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, potom $t[e] = f_{\mathfrak{M}}(t_1[e], \ldots, t_n[e])$. Z definície je zrejmé, že ak t je term atribútu a, tak $t[e] \in M_a$.

Indukciou cez dĺžku vytvárajúcej postupnosti formuly φ jazyka $\mathcal{L}$ definujeme pravdivostnú hodnotu formuly φ v štruktúre $\mathfrak{M}$ pri ohodnotení premenných e, a túto hodnotu označíme $\mathrm{PH}(\mathfrak{M} \models_e \varphi)$:

(1) $\mathrm{PH}(\mathfrak{M} \models_e p(t_1, \ldots, t_n)) = p_{\mathfrak{M}}(t_1[e], \ldots, t_n[e])$, ak $\mathrm{ar}(p) = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle$.
(2) $\mathrm{PH}(\mathfrak{M} \models_e s(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)) = \dot{s}(\mathrm{PH}(\mathfrak{M} \models_e \varphi_1), \ldots, \mathrm{PH}(\mathfrak{M} \models_e \varphi_n))$, ak s je n-árna logická spojka.
(3) $\mathrm{PH}(\mathfrak{M} \models_e (\forall x_k^a)\, \varphi) = \inf_{m \in M_a} \mathrm{PH}(\mathfrak{M} \models_{e[x_k^a/m]} \varphi)$ a
$\mathrm{PH}(\mathfrak{M} \models_e (\exists x_k^a)\, \varphi) = \sup_{m \in M_a} \mathrm{PH}(\mathfrak{M} \models_{e[x_k^a/m]} \varphi)$,
kde $e' = e[x_k^a/m]$ je ohodnotenie premenných také, že $e'(x_k^a) = m$ a $e'(x_i^b) = e(x_i^b)$, ak $x_i^b \neq x_k^a$.

Nakoniec definujeme

$$\mathrm{PH}(\mathfrak{M} \models \varphi) = \min\{\mathrm{PH}(\models_e \varphi) : e \text{ je ohodnotenie premenných}\}.$$

Hovoríme, že $\mathfrak{M}$ *je model pre* (φ, x), ak $\mathrm{PH}(\mathfrak{M} \models \varphi) \geq x$.

Indukciou cez dĺžku vytvárajúcej postupnosti termu t jazyka $\mathcal{L}$ definujeme množinu premenných $\mathrm{var}(t)$ termu t:

(1) $\mathrm{var}(x) = \{x\}$,
(2) $\mathrm{var}(c) = \emptyset$,
(3) $\mathrm{var}(f(t_1, \ldots, t_n)) = \bigcup_{i=1}^n \mathrm{var}(t_i)$.

Indukciou cez dĺžku vytvárajúcej postupnosti formuly φ jazyka $\mathcal{L}$ definujeme množinu free(φ) voľných premenných formuly φ:

(1) $\mathrm{free}(p(t_1,\dots,t_n)) = \bigcup_{i=1}^n \mathrm{var}(t_i)$,
(2) $\mathrm{free}(s(\varphi_1,\dots,\varphi_n)) = \bigcup_{i=1}^n \mathrm{free}(\varphi_i)$,
(3) $\mathrm{free}((\forall x_k^a)\,\varphi) = \mathrm{free}((\exists x_k^a)\,\varphi) = \mathrm{free}(\varphi) \setminus \{x_k^a\}$.

Nech φ je ľubovoľná formula a nech $\mathrm{free}(\varphi) = \{x_1,\dots,x_n\}$. Formuly

$$(\forall x_1)\dots(\forall x_n)\,\varphi, \quad (\exists x_1)\dots(\exists x_n)\,\varphi$$

v tom istom poradí označujeme stručne meta-formulami $\forall\varphi$ a $\exists\varphi$ a nazývame *všeobecný uzáver formuly* φ a *existenčný uzáver formuly* φ.

Veta 2.2.1. $\mathrm{PH}(\mathfrak{M} \models \varphi) = \mathrm{PH}(\mathfrak{M} \models \forall\varphi) = \mathrm{PH}(\mathfrak{M} \models_e \forall\varphi)$ *pre každé ohodnotenie premenných* e. □

Nasledujúce tvrdenie budeme potrebovať trochu neskôr.

Tvrdenie 2.2.2. *Nech* θ *je substitúcia premenných a nech* e *je ohodnotenie premenných v štruktúre* $\mathfrak{M}$ *pre jazyk* $\mathcal{L}$. *Nech* $\theta[e]$ *je ohodnotenie premenných definované rovnosťou* $\theta[e](x) = \theta(x)[e]$.

(1) $t[\theta][e] = t[\theta[e]]$ *pre každý term* $t \in \mathsf{Term}$.
(2) $\mathrm{PH}(\mathfrak{M} \models_e \varphi[\theta]) = \mathrm{PH}(\mathfrak{M} \models_{\theta[e]} \varphi)$ *pre každú formulu* $\varphi \in \Sigma_0$.
(3) $\mathrm{PH}(\mathfrak{M} \models \varphi) \le \mathrm{PH}(\mathfrak{M} \models \varphi[\theta])$ *pre každú formulu* $\varphi \in \Sigma_0$.

Dôkaz. Vlastnosti (1) a (2) sa dokazujú indukciou cez dĺžku vytvárajúcej postupnosti termu t alebo formuly φ. Vlastnosť (3) je dôsledkom vlastnosti (2):

$$\begin{aligned}\mathrm{PH}(\mathfrak{M} \models \varphi[\theta]) &= \inf_e \mathrm{PH}(\mathfrak{M} \models_e \varphi[\theta]) = \inf_e \mathrm{PH}(\mathfrak{M} \models_{\theta[e]} \varphi)\\ &\ge \inf_e \mathrm{PH}(\mathfrak{M} \models_e \varphi) = \mathrm{PH}(\mathfrak{M} \models \varphi). \qquad \Lambda\end{aligned}$$

Teória v jazyku $\mathcal{L}$ je ľubovoľné zobrazenie $T : \Sigma \to [0,1]$. To znamená, že teória je fuzzy množina formúl jazyka. Štruktúra $\mathfrak{M}$ pre jazyk $\mathcal{L}$ je modelom teórie T, ak $\mathrm{PH}(\mathfrak{M} \models \varphi) \ge T(\varphi)$ pre každú formulu φ. Dvojica (φ, x) je axióma teórie T, ak $T(\varphi) = x$.

2.3. **Herbrandovská štruktúra pre jazyk $\mathcal{L}$.** Nech $U_{\mathcal{L}}^a$ je množina všetkých termov atribútu a bez premenných (t.j. $\mathrm{var}(t) = \emptyset$). Zrejme $\mathcal{C}_a \subseteq U_{\mathcal{C}}^a$. Pre každý funkčný symbol $f \in \mathcal{F}$ s $\mathrm{ar}(f) = \langle a_1,\dots,a_{n+1}\rangle$ funkcia $f_H : U_{\mathcal{L}}^{a_1} \times \dots \times U_{\mathcal{L}}^{a_n} \to U_{\mathcal{L}}^{a_{n+1}}$ je definovaná predpisom $f_H(t_1,\dots,t_n) = f(t_1,\dots,t_n)$ pre $t_i \in U_{\mathcal{L}}^{a_i}$, $i \le n$. Štruktúra

$$\mathfrak{M}_H = \langle\langle U_{\mathcal{L}}^a : a \in \mathsf{Atr}\rangle, \langle p_H : p \in \mathcal{P}\rangle, \langle f_H : f \in \mathcal{F}\rangle, \langle c : c \in \textstyle\bigcup_{a\in\mathsf{Atr}} \mathcal{C}_a\rangle\rangle$$

je *herbrandovská štruktúra pre jazyk* $\mathcal{L}$, ak pre každý predikátový symbol $p \in \mathcal{P}$ s $\mathrm{ar}(p) = \langle a_1,\dots,a_n\rangle$, $p_H : U_{\mathcal{L}}^{a_1} \times \dots \times U_{\mathcal{L}}^{a_n} \to V$.

Nech $p \in \mathcal{P}$ je ľubovoľný predikátový symbol, $\mathrm{ar}(p) = \langle a_1,\dots,a_n\rangle$, a nech $t_1 \in U_{\mathcal{L}}^{a_1}, \dots, t_n \in U_{\mathcal{L}}^{a_n}$. Formula $p(t_1,\dots,t_n)$ sa nazýva *ground atóm* (*konštantný atóm*) (t.j. atomická formula bez premenných). Nech $B_{\mathcal{L}}$ je množina všetkých konštantných atómov jazyka $\mathcal{L}$.

Pre každú herbrandovskú štruktúru $\mathfrak{M}$ definujme funkciu $F_{\mathfrak{M}} : B_{\mathcal{L}} \to [0,1]$ rovnosťou $F_{\mathfrak{M}}(\varphi) = \mathrm{PH}(\mathfrak{M} \models \varphi)$. Naopak, ku každej funkcii $F : B_{\mathcal{L}} \to [0,1]$ existuje herbrandovská štruktúra taká, že $F = F_{\mathfrak{M}}$.

Tvrdenie 2.3.1. *Ak $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ sú herbrandovské štruktúry pre jazyk $\mathcal{L}$, potom $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}'$ vtedy a len vtedy, keď $F_{\mathfrak{M}} = F_{\mathfrak{M}'}$.* □

Príklad 2.3.2. *Nech $\mathcal{L} = \{=, <, s, 0\}$ je jazyk s jednou sortou premenných, dvoma binárnymi predikátovými symbolmi $=$, $<$, jedným unárnym funkčným symbolom s a jedným konštantným symbolom* 0*. Potom $U_{\mathcal{L}} = \{0, s(0), s(s(0)), \dots\}$, $B_{\mathcal{L}} = \{t_1 = t_2 : t_1, t_2 \in U_{\mathcal{L}}\} \cup \{t_1 < t_2 : t_1, t_2 \in U_{\mathcal{L}}\}$.* □

Na každé ohodnotenie premenných $e : \mathsf{Var} \to \bigcup_{a \in \mathsf{Atr}} U^a_{\mathcal{L}}$ sa môžeme pozerať aj ako na substitúciu premenných konštantnými termami. Nasledujúce tvrdenie hovorí, že čo sa týka pravdivosti, nezáleží na tom ako interpretujeme funkciu e:

Tvrdenie 2.3.3. $\mathrm{PH}(\mathfrak{M} \models_e \varphi) = \mathrm{PH}(\mathfrak{M} \models \varphi[e])$ *pre každú formulu $\varphi \in \Sigma_0$ a každé ohodnotenie premenných v herbrandovskej štruktúre $\mathfrak{M}$ pre jazyk $\mathcal{L}$.*

2.4. **Predikátový počet s jednou sortou premenných.** Predikátový počet s jednou sortou premenných je špeciálnym prípadom predikátového počtu s viacerými sortami premenných, keď množina Atr je jednoprvková. Pripomeňme len podstatné zjednodušenia niektorých označení, ktoré táto redukcia umožňuje.

Árnosť predikátového alebo funkčného symbolu je prirodzené číslo určujúce počet argumentov. Jazyk pozostáva zo spočítateľnej množiny premenných $\{x_0, x_1, \dots\}$ (rovnakej sorty), množiny predikátových symbolov $\mathcal{P}$, množiny funkčných symbolov $\mathcal{F}$, množiny konštantných symbolov $\mathcal{C}$ (rovnakej sorty), množiny logických spojok, kvantifikátorov, a interpunkčných symbolov.

Interpretácia jazyka $\mathcal{L}$ (štruktúra pre jazyk $\mathcal{L}$) je systém

$$\mathfrak{M} = \langle M, \mathcal{P}_{\mathfrak{M}}, \mathcal{F}_{\mathfrak{M}}, \mathcal{C}_{\mathfrak{M}} \rangle,$$

kde M je neprázdna množina, $\mathcal{P}_{\mathfrak{M}} = \{p_{\mathfrak{M}} : p \in \mathcal{P}\}$ je množina fuzzy relácii na M, $\mathcal{F}_{\mathfrak{M}} = \{f_{\mathfrak{M}} : f \in \mathcal{F}\}$ je množina funkcií (operácií) na M, $\mathcal{C}_{\mathfrak{M}} = \{c_{\mathfrak{M}} : c \in \mathcal{C}\} \subseteq M$.

V nasledujúcom pod predikátovým počtom rozumieme predikátový počet s jednou sortou premenných.

3. Fuzzy logické programovanie

3.1. **Správna odpoveď.** Nech $\mathcal{L}$ je jazyk predikátového počtu s jednou sortou premenných a množinou logických spojok $\mathcal{S}$. Daný je systém logických spojok $\leftarrow_i$ a ich pravdivostných funkcií $\overset{\bullet}{\to}_i$ pre $i \in J$, ktoré nemusia byť súčasťou množiny $\mathcal{S}$. Pravdivostná funkcia $\overset{\bullet}{\to}_i$ interpretuje spojku $\leftarrow_i$ prostredníctvom rovnosti $\overline{v}(B \leftarrow_i A) = \overset{\bullet}{\to}_i(\overline{v}(A), \overline{v}(B))$ pre ohodnotenia v elementárnych výrokov. Pre každú spojku $\leftarrow_i$ je daná funkcia C_i taká, že odvodzovacie pravidlo

$$\frac{(A, x), (B \leftarrow_i A, y)}{(B, C_i(x, y))} \tag{3.1}$$

je korektné odvodzovacie pravidlo, t.j. platí $\mathrm{MP}(C_i, \overset{\bullet}{\to}_i)$. Podľa Tvrdenia 1.7.1 vieme, že také funkcie C_i vždy existujú. Pripomeňme, že podmienka (4) v Tvrdení 1.7.5 charakterizuje pravdivostné funkcie implikácií, ku ktorým existuje regulárny modus ponens.

Pravidlo fuzzy logického programu je formula tvaru $\varphi \leftarrow_i \psi$, kde ψ je formula jazyka $\mathcal{L}$ bez kvantifikátorov a φ je atomická formula. Formula ψ sa nazýva *telo pravidla* (*body*). Formula φ sa nazýva *hlava pravidla. Fakt fuzzy logického programu* je ľubovoľná atomická formula.

Fuzzy logický program P je zobrazenie definované na konečnej množine faktov a pravidiel do množiny pravdivostných hodnôt V také, že $P(\varphi) > 0$ pre každú formulu $\varphi \in \mathrm{dom}(P)$. Teda fuzzy logický program je teória v jazyku $\mathcal{L}$ s dodatočnou množinou spojok $\{\leftarrow_i : i \in J\}$. Teda fuzzy logický program je teória, ktorej axiómy sú fakty a pravidlá.

Slovo $?\varphi$ je *otázka* (*query*) *fuzzy logického programu* P, ak φ je formula jazyka $\mathcal{L}$ bez kvantifikátorov s množinou logických spojok $\mathcal{S}$. Usporiadaná dvojica (θ, x), kde $\theta : \mathsf{Var} \to \mathsf{Term}$ je ľubovoľná substitúcia a $x \geq 0$ sa nazýva *odpoveď na otázku* $?\varphi$ *v programe* P. Odpoveď (θ, x) na otázku $?\varphi$ v programe P je *správna odpoveď*, ak $\mathrm{PH}(\mathfrak{M} \models \varphi[\theta]) \geq x$ pre všetky modely $\mathfrak{M}$ programu P.

3.2. **Vypočítaná odpoveď.** Nech abeceda Γ obsahuje symboly jazyka $\mathcal{L}$, reálne čísla intervalu $[0,1]$ a symboly C_i pre $i \in J$. $\Gamma^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Gamma^n$ označuje množinu všetkých slov nad abecedou Γ a Ξ je množina všetkých substitúcií jazyka $\mathcal{L}$. Pre slovo $X \in \Gamma^*$ a $\theta \in \Xi$, slovo $X \circ \theta$ je slovo, ktoré vznikne zámenou všetkých výskytov všetkých premenných x v slove X termami $\theta(x)$. Teda, ak slová $X_0, \ldots, X_{n+1}$ neobsahujú premenné, potom $(X_0 x_{i_0} X_1 \ldots X_n x_{i_n} X_{n+1}) \circ \theta$ je slovo $X_0 * \theta(x_{i_0}) * X_1 * \cdots * X_n * \theta(x_{i_n}) * X_{n+1}$, kde $*$ je operácia konkatenácie slov. Indukciou cez dĺžku vytvárajúcej postupnosti formuly φ bez kvantifikátorov sa ľahko overí, že $\varphi \circ \theta = \varphi[\theta]$.

Prípustné odvodzovacie pravidlo medzi prvkami kartézskeho súčinu $\Gamma^* \times \Xi$ má jeden z nasledujúcich tvarov:

(1) Z $(X\varphi Y, \theta)$ odvoď $((XaY) \circ \theta', \theta')$, ak existuje fakt φ' programu P a substitúcia θ'' taká, že $a = P(\varphi')$ a $\varphi[\theta'] = \varphi'[\theta'']$.
(2) Z $(X\varphi Y, \theta)$ odvoď $((X \circ \theta') * C_i(\psi[\theta''], a) * (Y \circ \theta'), \theta')$, ak existuje pravidlo $\varphi' \leftarrow_i \psi$ programu P a substitúcia θ'' taká, že $a = P(\varphi' \leftarrow_i \psi)$ a $\varphi[\theta'] = \varphi'[\theta'']$.
(3) Z $(X\varphi Y, \theta)$ odvoď $(X0Y, \mathrm{id})$, ak φ je atomická formula.
(4) Z $(XC_i(a_1, a_2)Y, \theta)$ odvoď (XaY, id), ak $a_1, a_2 \in [0,1]$ a $a = C_i(a_1, a_2)$.
(5) Z $(Xs(a_1, \ldots, a_m)Y, \theta)$ odvoď (XaY, id), ak $a_1, \ldots, a_m \in [0,1]$, s je m-árna logická spojka a $a = \dot{s}(a_1, \ldots, a_m)$.

Pravidlo (3) môžeme považovať za doplnenie pravidla (1) tak, ako keby sme definovali $P(\varphi) = 0$ pre $\varphi \notin \mathrm{dom}(P)$ (a rovnako aj za doplnenie pravidla (2), keďže z korektnosti modus ponens vyplýva, že $C_i(a, 0) = 0$). Je opodstatnené napríklad spĺňaním disjunkcie. Ak sa nedá splniť jedna podformula disjunkcie, neznamená to, že sa táto disjunkcia ako celok nedá splniť.

Odpoveď (θ, x) je vypočítaná odpoveď pre otázku $?\varphi$ vo fuzzy logickom programe P, ak existuje postupnosť dvojíc (G_0, θ_0), (G_1, θ_1), $\ldots$, (G_n, θ_n) v $\Gamma^* \times \Xi$ taká, že $(G_0, \theta_0) = (\varphi, \mathrm{id})$, $G_n = x$, $\theta = \theta_1 \circ \cdots \circ \theta_n$ a pre každé $i < n$ dvojica (G_{i+1}, θ_{i+1}) je odvodená z dvojice (G_i, θ_i) použitím prípustného pravidla.

Veta 3.2.1 (Korektnosť procedurálnej sémantiky)**.** *Nech P je fuzzy logický program v jazyku $\mathcal{L}$ so systémom logických spojok, ktorých pravdivostné funkcie sú neklesajúce. Potom každá vypočítaná odpoveď je správna.*

Dôkaz. Nech $\varphi \in \Sigma_0$ a nech (θ, x) je vypočítaná odpoveď pre otázku $?\varphi$ v programe P výpočtom (G_0, θ_0), (G_1, θ_1), $\ldots$, (G_n, θ_n), t.j. $(G_0, \theta_0) = (\varphi, \mathrm{id})$, $G_n = x$, $\theta = \theta_1 \circ \cdots \circ \theta_n$. Predpokladajme, že každá vypočítaná odpoveď pre každú otázku výpočtom dĺžky menšej ako n je správna a ukážeme, že (θ, x) je správna odpoveď na otázku $?\varphi$.

Nech $n = 1$. Potom $G_1 = x$, $\theta = \theta_1$ a dvojica (G_1, θ_1) bola odvodená pravidlom (1) alebo pravidlom (3), keď φ je atomická formula; alebo pravidlom (5), keď $\varphi = s$ je 0-árna spojka. V prípade pravidla (1) existuje fakt φ' programu P a substitúcia θ'' také, že $\varphi[\theta] = \varphi'[\theta'']$ a $P(\varphi') = x$. Ak $\mathfrak{M}$ je ľubovoľný model programu P, potom $\mathrm{PH}(\mathfrak{M} \models \varphi[\theta]) = \mathrm{PH}(\mathfrak{M} \models \varphi'[\theta'']) \geq \mathrm{PH}(\mathfrak{M} \models \varphi') \geq P(\varphi') = x$ (pozri Tvrdenie 2.2.2). V prípade pravidla (3), $x = 0$, $\theta = \mathrm{id}$ a odpoveď $(\mathrm{id}, 0)$ je správna. V prípade pravidla (5), $\varphi = s$, $\overset{\bullet}{s} = x$, $\theta = \mathrm{id}$ a $\mathrm{PH}(\mathfrak{M} \models \varphi) = \overset{\bullet}{s} = x$. Vo všetkých prípadoch (θ, x) je správna odpoveď na otázku $?\varphi$.

Nech $n > 1$. Formula φ je atomická alebo zložená.

a) Predpokladajme, že φ je zložená formula, t.j. $\varphi = s(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ pre nejakú spojku s. Vieme nájsť slová G_k^i v Γ^* pre $1 \leq i \leq m$, $0 \leq k \leq n-1$ také, že $G_k = s(G_k^1, \ldots, G_k^m)$. Pre každé i také, že $1 \leq i \leq m$, nech $0 < k_1^i < k_2^i < \cdots < k_{l(i)}^i$ je rastúca postupnosť všetkých indexov k takých, že $G_{k-1}^i \circ \theta_k \neq G_k^i$ (t.j. odvodenie slova G_k z G_{k-1} je vlastne odvodením podslova G_k^i z G_{k-1}^i) a nech $k_0^i = 0$. Nech $\theta_0^i = \mathrm{id}$ a nech $\theta_{l+1}^i = \theta_{k_l^i+1} \circ \theta_{k_l^i+2} \circ \cdots \circ \theta_{k_{l+1}^i}$ pre $l < l(i)$. Nech $a_1, \ldots, a_m \in [0,1]$ sú také, že $G_{n-1} = s(a_1, \ldots, a_m)$ a nech $\theta^i = \theta_1^i \circ \cdots \circ \theta_{l(i)}^i = \theta_1 \circ \cdots \circ \theta_{k_{l(i)}^i}$. Zrejme (θ^i, a_i) je vypočítaná odpoveď pre otázku $?\varphi_i$ výpočtom (G_0^i, θ_0^i), (G_1^i, θ_1^i), $\ldots$, $(G_{l(i)}^i, \theta_{l(i)}^i)$ dĺžky $l(i) \leq n-1$ pre $1 \leq i \leq m$. Podľa indukčného predpokladu sú tieto odpovede správne. Nech $\mathfrak{M}$ je ľubovoľný model programu P. Potom vďaka monotónnosti funkcie $\overset{\bullet}{s}$ a správnosti čiastkových odpovedí dostaneme

$$
\begin{aligned}
\mathrm{PH}(\mathfrak{M} \models \varphi[\theta]) &= \overset{\bullet}{s}(\mathrm{PH}(\mathfrak{M} \models \varphi_1[\theta]), \ldots, \mathrm{PH}(\mathfrak{M} \models \varphi_m[\theta])) \\
&\geq \overset{\bullet}{s}(\mathrm{PH}(\mathfrak{M} \models \varphi_1[\theta^1]), \ldots, \mathrm{PH}(\mathfrak{M} \models \varphi_m[\theta^m])) \geq \overset{\bullet}{s}(a_1, \ldots, a_m) = x.
\end{aligned}
$$

b) Predpokladajme, že φ je atomická formula. Keďže $n > 1$, dvojica (G_1, θ_1) bola odvodená použitím pravidla (2). To znamená, že existuje pravidlo $\varphi' \leftarrow_i \psi$ programu P a substitúcia θ'' taká, že $\varphi[\theta_1] = \varphi'[\theta'']$, $G_1 = C_i(\psi[\theta''], b)$, kde $b = P(\varphi' \leftarrow_i \psi)$. Vieme nájsť slová G_1', G_2', $\ldots$ G_{n-1}' v Γ^* také, že $G_i = C_i(G_i', b)$. Nech $a = G_{n-1}' \in [0,1]$ a nech $\theta^1 = \theta_2 \circ \cdots \circ \theta_{n-1}$. Zrejme (G_1', id), (G_2', θ_2), $\ldots$, (G_{n-1}', θ_{n-1}) je výpočet dĺžky $n-2$ odpovede (θ^1, a) pre otázku $?\psi[\theta'']$. Podľa indukčného predpokladu (θ^1, a) je správna odpoveď a preto

$$
\mathrm{PH}(\mathfrak{M} \models \psi[\theta''][\theta^1]) \geq a.
$$

Keďže

$$
\begin{aligned}
\mathrm{PH}(\mathfrak{M} \models \varphi[\theta] \leftarrow_i \psi[\theta''][\theta^1]) &= \mathrm{PH}(\mathfrak{M} \models \varphi'[\theta''][\theta^1] \leftarrow_i \psi[\theta''][\theta^1]) \\
&\geq \mathrm{PH}(\mathfrak{M} \models \varphi' \leftarrow_i \psi) \geq P(\varphi' \leftarrow_i \psi) = b,
\end{aligned}
$$

z korektnosti modus ponens (3.1) dostávame $\mathrm{PH}(\mathfrak{M} \models \varphi[\theta]) \geq C_i(a, b) = x$. $\square$

3.3. **Tarskeho veta.** Čiastočne usporiadaná množina $L, \leq$ je *úplný zväz*, ak každá neprázdna množina v L má supremum (a infimum). Úplný zväz má najväčší prvok, označujeme ho symbolom 1 a najmenší prvok, označujeme ho symbolom 0. Zobrazenie $T : L \to L$ je *monotónne*, ak $x \leq y \to T(x) \leq T(y)$. Prvok $x \in L$ sa nazýva *pevný bod zobrazenia* T, ak $T(x) = x$. Najmenší pevný bod zobrazenia $T : L \to L$ označujeme $\mathrm{mfp}(T)$ (minimal fix-point). *Množina* $X \subseteq L$ *je nahor usmernená*, ak pre každé $x, y \in X$ existuje $z \in X$ také, že $x \leq z$ a $y \leq z$. Zobrazenie $T : L \to L$ *je spojité*, ak $T(\sup X) = \sup\{T(x) : x \in X\}$ pre každú nahor usmernenú množinu $X \subseteq L$. Zrejme každé spojité zobrazenie $T : L \to L$ je monotónne.

Veta 3.3.1 (Tarski)**.** *Nech L je úplný zväz a zobrazenie $T : L \to L$ monotónne. Potom T má najmenší pevný bod a platí:*

(1) $\mathrm{mfp}(T) = \inf\{x \in L : T(x) = x\} = \inf\{x \in L : T(x) \le x\}$.

(2) *Ak T je spojité zobrazenie, potom* $\mathrm{mfp}(T) = \sup\{T^n(0) : n \ge 0\}$.

Dôkaz. (1) Nech $X = \{x \in L : T(x) \le x\}$. Keďže $1 \in X$, $X \ne \emptyset$. Nech $a = \inf X$. Potom $T(a) \le T(x) \le x$ pre každé $x \in X$. Preto $T(a) \le a$. Odtiaľ vyplýva, že $T(T(a)) \le T(a)$ a teda $T(a) \in X$. Preto $a \le T(a)$ a $a = T(a)$. Ukázali sme, že prvok a je najmenší pevný bod zobrazenia T.

(2) Keďže $0 \le T(0)$, indukciou sa ľahko dokáže, že $T^n(0) \le T(T^n(0)) = T^{n+1}(0)$ pre každé $n \ge 0$. Množina $X = \{T^n(0) : n \ge 0\}$ je nahor usmernená a zo spojitosti zobrazenia T máme rovnosť $T(\sup X) = \sup\{T^{n+1}(0) : n \ge 0\} = \sup X$. To znamená, že $\sup X$ je pevný bod. Ukážeme, že je to najmenší pevný bod zobrazenia T. Nech x je ľubovoľný pevný bod zobrazenia T. Keďže $0 \le x$, indukciou sa ľahko dokáže, že $T^n(0) \le x$, t.j. x je horné ohraničenie množiny X. Preto $\sup X \le x$. □

3.4. **Veta o úplnosti fuzzy logického programovania.** Pripomeňme, že $B_{\mathcal{L}}$ je množina všetkých atomických formúl bez premenných. Nech $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ je množina všetkých funkcií $f : B_{\mathcal{L}} \to [0,1]$ s usporiadaním $f \le g$, ak $f(\varphi) \le g(\varphi)$ pre všetky $\varphi \in B_{\mathcal{L}}$. $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ je úplný zväz, ktorého najmenší prvok je nulová funkcia $\mathbf{0}(\varphi) = 0$ nadobúdajúca len hodnoty 0 a najväčší prvok je funkcia $\mathbf{1}(\varphi) = 1$ nadobúdajúca len hodnoty 1. Každá funkcia $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ jednoznačne definuje herbrandovskú interpretáciu $\mathfrak{M}_f$ jazyka $\mathcal{L}$ čo umožňuje predĺžiť funkciu f na funkciu $\overline{f}$ definovanú pre všetky formuly jazyka $\mathcal{L}$:

$$\overline{f}(\varphi) = \mathrm{PH}(\mathfrak{M}_f \models \varphi) = \inf_e \mathrm{PH}(\mathfrak{M}_f \models_e \varphi) = \inf_e \mathrm{PH}(\mathfrak{M}_f \models \varphi[e]),$$

kde infimum sa počíta cez všetky ohodnotenia premenných konštantnými termami. Budeme potrebovať iba hodnoty $\overline{f}(\varphi)$ pre formuly $\varphi \in \Sigma_0$ bez voľných premenných. Indukciou cez dĺžku vytvárajúcej postupnosti formuly $\varphi \in \Sigma_0$ definujeme (1) číslo $n_\varphi \in \mathbb{N}$, (2) postupnosť atomických formúl $\eta_1^\varphi, \eta_2^\varphi, \dots, \eta_{n_\varphi}^\varphi$, a (3) pravdivostnú funkciu $f_\varphi : [0,1]^{n_\varphi} \to [0,1]$:

a) Ak φ je atomická formula, potom (1) $n_\varphi = 1$, (2) $\eta_1 = \varphi$, (3) $f_\varphi(x) = x$.

b$_0$) Ak s je 0-árna spojka a $\varphi = s$, potom (1) $n_\varphi = 0$, (3) $f_\varphi = \dot{s} \in [0,1]$ je 0-árna funkcia.

b$_k$) Ak $\varphi = s(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$, potom
(1) $n_\varphi = n_{\varphi_1} + \cdots + n_{\varphi_k}$,
(2) $\eta^\varphi_{i+n_{\varphi_1}+\cdots+n_{\varphi_{j-1}}} = \eta_i^{\varphi_j}$ pre $1 \le i \le n_{\varphi_j}$, $1 \le j \le k$,
(3) $f_\varphi(x_1^1, \dots, x_{n_{\varphi_1}}^1, \dots, x_1^k, \dots, x^k_{n_{\varphi_k}})$
$= \dot{s}(f_{\varphi_1}(x_1^1, \dots, x^1_{n_{\varphi_1}}), \dots, f_{\varphi_k}(x_1^k, \dots, x^k_{n_{\varphi_k}}))$.

Tvrdenie 3.4.1. $\overline{f}(\varphi) = f_\varphi(f(\eta_1^\varphi), \dots, f(\eta^\varphi_{n_\varphi}))$ *pre každú formulu $\varphi \in \Sigma_0$ bez voľných premenných a každú funkciu $f : B_{\mathcal{L}} \to [0,1]$.*

Dôkaz. Indukciou cez dĺžku vytvárajúcej formuly φ. Keďže formula φ je bez voľných premenných, $\eta_i^\varphi \in B_{\mathcal{L}}$ pre všetky i. □

Nech P je fuzzy logický program a $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$. Hovoríme, že f *je model programu* P, píšeme $f \models P$, ak $\mathfrak{M}_f \models P$. Označme

$$\mathrm{Mod}(P) = \{f \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}} : f \models P\}.$$

Tvrdenie 3.4.2. *Ak P je fuzzy logický program v jazyku $\mathcal{L}$ so systémom logických spojok $\mathcal{S}$ a systémom implikácií $\{\leftarrow_i : i \in J\}$ takých, že $\overset{\bullet}{s}(1,\ldots,1) = 1$ pre každú spojku $s \in \mathcal{S}$ a $\overset{\bullet}{\rightarrow}_i(1,1) = 1$ pre $i \in J$, tak $\mathbf{1} \in \mathrm{Mod}(P)$.*

Dôkaz. Každý fakt a telo pravidla v programe P je nejaká formula $\psi \in \Sigma_0$. Indukciou cez dĺžku vytvárajúcej postupnosti formuly $\psi \in \Sigma_0$ sa ľahko overí, že $\mathrm{PH}(\mathbf{1} \models \psi) = 1$. Špeciálne $\mathrm{PH}(\mathbf{1} \models \psi) = 1$, pre každý fakt ψ. Hlava φ každého pravidla $\varphi \leftarrow_i \psi$ je atomická formula a preto $\mathrm{PH}(\mathbf{1} \models \varphi) = 1$. V dôsledku toho $\mathrm{PH}(\mathbf{1} \models \varphi \leftarrow_i \psi) = \overset{\bullet}{\rightarrow}_i(\mathrm{PH}(\mathbf{1} \models \psi), \mathrm{PH}(\mathbf{1} \models \varphi)) = 1$. □

Tvrdenie 3.4.3. *Predpokladajme, že pravdivostné funkcie spojok $s \in \mathcal{S}$ sú neklesajúce a funkcie $\overset{\bullet}{\rightarrow}_i$ pre $i \in J$ sú nerastúce v prvom argumente a neklesajúce v druhom argumente. Potom platia nasledujúce podmienky.*

(1) *Ak $f \leq g$, $f, g \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$, tak $\mathrm{PH}(f \models \varphi) \leq \mathrm{PH}(g \models \varphi)$ pre $\varphi \in \Sigma_0$.*
(2) *Množina $\mathrm{Mod}(P)$ je nadol usmernená, t.j. ak $f \models P$, $g \models P$ a $h = \inf\{f, g\}$, potom $h \models P$.*
(3) *Ak naviac funkcie $\overset{\bullet}{\rightarrow}_i$ pre $i \in J$ sú sprava spojité v druhom argumente, tak pre každú neprázdnu množinu $X \subseteq \mathrm{Mod}(P)$ je $h = \inf X \in \mathrm{Mod}(P)$.*

Dôkaz. (1) Pre ľubovoľnú formulu $\varphi \in \Sigma_0$ platí

$$\begin{aligned}\mathrm{PH}(f \models \varphi) &= \inf_e f_\varphi(f(\eta_1^\varphi[e]), \ldots, f(\eta_{n_\varphi}^\varphi[e])) \\ &\leq \inf_e f_\varphi(g(\eta_1^\varphi[e]), \ldots, g(\eta_{n_\varphi}^\varphi[e])) = \mathrm{PH}(g \models \varphi).\end{aligned}$$

(2) Ak φ je atomická formula, tak

$$\begin{aligned}\mathrm{PH}(h \models \varphi) &= \inf_e h(\varphi[e]) = \min\{\inf_e f(\varphi[e]), \inf_e g(\varphi[e])\} \\ &= \min\{\mathrm{PH}(f \models \varphi), \mathrm{PH}(g \models \varphi)\} \geq P(\varphi).\end{aligned}$$

Nech $\varphi \leftarrow_i \psi$ je pravidlo. Najprv predpokladajme, že toto pravidlo je bez voľných premenných. Potom

$$\begin{aligned}\mathrm{PH}(h \models \varphi \leftarrow_i \psi) &= \overset{\bullet}{\rightarrow}_i(\mathrm{PH}(h \models \psi), h(\varphi)) \\ &= \min\{\overset{\bullet}{\rightarrow}_i(\mathrm{PH}(h \models \psi), f(\varphi)), \overset{\bullet}{\rightarrow}_i(\mathrm{PH}(h \models \psi), g(\varphi))\} \\ &\geq \min\{\overset{\bullet}{\rightarrow}_i(\mathrm{PH}(f \models \psi), f(\varphi)), \overset{\bullet}{\rightarrow}_i(\mathrm{PH}(g \models \psi), g(\varphi))\} \\ &= \min\{\mathrm{PH}(f \models \varphi \leftarrow_i \psi), \mathrm{PH}(g \models \varphi \leftarrow_i \psi)\}.\end{aligned}$$

Teraz, keď pripustíme voľné premenné v pravidle $\varphi \leftarrow_i \psi$ dostaneme

$$\begin{aligned}\mathrm{PH}(h \models \varphi \leftarrow_i \psi) &= \inf_e \mathrm{PH}(h \models \varphi[e] \leftarrow_i \psi[e]) \\ &\geq \inf_e \min\{\mathrm{PH}(f \models \varphi[e] \leftarrow_i \psi[e]), \mathrm{PH}(g \models \varphi[e] \leftarrow_i \psi[e])\} \\ &= \min\{\mathrm{PH}(f \models \varphi \leftarrow_i \psi), \mathrm{PH}(g \models \varphi \leftarrow_i \psi)\} \geq P(\varphi \leftarrow_i \psi).\end{aligned}$$

(3) Ak φ je atomická formula, potom

$$\mathrm{PH}(h \models \varphi) = \inf_e h(\varphi[e]) = \inf_e \inf_{f \in X} f(\varphi[e]) = \inf_{f \in X} \mathrm{PH}(f \models \varphi) \geq P(\varphi).$$

Pre pravidlo $\varphi \leftarrow_i \psi$ máme $\mathrm{PH}(h \models \varphi \leftarrow_i \psi) = \inf_e \overset{\bullet}{\rightarrow}_i(\mathrm{PH}(h \models \psi[e]), h(\varphi[e]))$. Vďaka spojitosti a monotónnosti funkcie $\overset{\bullet}{\rightarrow}_i$ v druhom argumente platí

$$\begin{aligned}\mathrm{PH}(h \models \varphi \leftarrow_i \psi) &= \inf_e \inf_{f \in X} \overset{\bullet}{\rightarrow}_i(\mathrm{PH}(h \models \psi[e]), f(\varphi[e])) \\ &\geq \inf_e \inf_{f \in X} \overset{\bullet}{\rightarrow}_i(\mathrm{PH}(f \models \psi[e]), f(\varphi[e])) \\ &= \inf_{f \in X} \mathrm{PH}(f \models \varphi \leftarrow_i \psi) \geq P(\varphi \leftarrow_i \psi). \qquad \Lambda\end{aligned}$$

Definujme operátor $T_P : \mathcal{F}_{\mathcal{L}} \to \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ rovnosťami

$$\begin{aligned}T_P(f) &= \sup\{a_P(f), b_P\}, \\ a_P(f)(\varphi) &= \sup\{C_i(\overline{f}(\psi[e]), P(\varphi' \leftarrow_i \psi)) : \varphi = \varphi'[e] \,\&\, e : \mathsf{Var} \to U_{\mathcal{L}}\}, \\ b_P(\varphi) &= \sup\{P(\varphi') : (\exists e : \mathsf{Var} \to U_{\mathcal{L}})\, \varphi = \varphi'[e]\},\end{aligned}$$

pre $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ a $\varphi \in B_{\mathcal{L}}$ (v tejto definícii kladieme $\sup \emptyset = 0$).

Príklad 3.4.4. *Program P pozostáva z nasledujúcich faktov a pravidiel s príslušnou mierou dôveryhodnosti* `cf` *(confidence factor):*

$$\begin{aligned}&\texttt{muž}(\texttt{peter}).\ \ \texttt{cf} = 1 \\ &\texttt{rodič}(\texttt{peter}, \texttt{mária}).\ \ \texttt{cf} = 0.7 \\ &\texttt{otec}(X, Y) \leftarrow_{\mathsf{Ł}} \texttt{muž}(X) \,\&_{\mathsf{G}}\, \texttt{rodič}(X, Y).\ \ \texttt{cf} = 0.9\end{aligned}$$

Zrejme $\mathcal{L} = \{\texttt{muž}, \texttt{rodič}, \texttt{otec}, \texttt{peter}, \texttt{mária}\}$, $U_{\mathcal{L}} = \{\texttt{peter}, \texttt{mária}\}$, $|B_{\mathcal{L}}| = 10$. *Označme* $\varphi_1 = \texttt{muž}(\texttt{peter})$, $\varphi_2 = \texttt{rodič}(\texttt{peter}, \texttt{mária})$, $\varphi_3 = \texttt{otec}(\texttt{peter}, \texttt{mária})$. *Platí:*

$$\begin{aligned}&T_P(\mathbf{0})(\varphi_1) = 1, \\ &T_P(\mathbf{0})(\varphi_2) = 0.7, \\ &T_P(\mathbf{0})(\varphi_3) = 0, \quad T_P^2(\mathbf{0})(\varphi_3) = C_{\mathsf{Ł}}(\overset{\bullet}{\&}_{\mathsf{G}}(1, 0.7), 0.9) = 0.6\end{aligned}$$

a $T^3(\mathbf{0}) = T^2(\mathbf{0})$ *je najmenší pevný bod operátora* T_P.

Tvrdenie 3.4.5. *Predpokladajme, že* $\overset{\bullet}{s}(0, \ldots, 0) = 0$ *a* $C_i(0, x) = 0$ *pre* $s \in \mathcal{S}$, $x \in [0, 1]$ *a pre* $i \in J$. *Potom* $a_P(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ *a* $T_P(\mathbf{0}) = b_P$.

Dôkaz. Nech $f = \mathbf{0}$. Indukciou cez dĺžku vytvárajúcej postupnosti formuly $\psi \in \Sigma_0$ sa ukáže, že $\overline{f}(\psi[e]) = 0$ pre $e : \mathsf{Var} \to U_{\mathcal{L}}$. Preto

$$a_P(\mathbf{0})(\varphi) = \sup\{C_i(0, P(\varphi' \leftarrow_i \psi)) : \varphi = \varphi'[e] \,\&\, e : \mathsf{Var} \to U_{\mathcal{L}}\} = 0. \qquad \Lambda$$

Tvrdenie 3.4.6. *Predpokladajme, že pravdivostné funkcie spojok* $s \in \mathcal{S}$ *sú neklesajúce a funkcie* C_i *pre* $i \in J$ *sú neklesajúce v prvom argumente. Potom operátory* a_P *a* T_P *sú monotónne.*

Dôkaz. Nech $f_1, f_2 \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ a nech $f_1 \leq f_2$. Keďže pravdivostné funkcie $\overset{\bullet}{s}$ pre $s \in \mathcal{S}$ sú neklesajúce a funkcie f_ψ sú kompozíciou týchto pravdivostných funkcií, preto $\overline{f}_1(\psi[e]) = f_\psi(f_1(\eta_1^\psi[e]), \ldots, f_1(\eta_{n_\psi}^\psi[e])) \leq f_\psi(f_2(\eta_1^\psi[e]), \ldots, f_2(\eta_{n_\psi}^\psi[e])) = \overline{f}_2(\psi[e])$ pre každú formulu $\psi \in \Sigma_0$. Funkcie C_i sú neklesajúce a preto

$$C_i(\overline{f}_1(\psi[e]), P(\varphi' \leftarrow_i \psi)) \leq C_i(\overline{f}_2(\psi[e]), P(\varphi' \leftarrow_i \psi)).$$

V dôsledku toho platí $a_P(f_1)(\varphi) \leq a_P(f_2)(\varphi)$ a teda tiež $T_P(f_1)(\varphi) \leq T_P(f_2)(\varphi)$ pre $\varphi \in B_{\mathcal{L}}$. $\square$

Veta 3.4.7. *Predpokladajme, že pravdivostné funkcie spojok $s \in \mathcal{S}$ sú neklesajúce a zľava spojité a funkcie C_i pre $i \in J$ sú neklesajúce v prvom argumente a zľava spojité v prvom argumente. Potom operátor T_P je spojitý.*

Dôkaz. Nech $X \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ je neprázdna nahor usmernená množina a nech $g = \sup X$. Nech $h = \sup\{T_P(f) : f \in X\}$. Operátor T_P je monotónny podľa Lemy 3.4.6 a $f \leq g$ pre $f \in X$, preto $h \leq T_P(g)$. Predpokladajme, že rovnosť neplatí a dokážeme spor.

Nech formula $\varphi \in B_{\mathcal{L}}$ je taká, že $h(\varphi) < T_P(g)(\varphi)$. Potom $h(\varphi) < a_P(g)(\varphi)$ lebo $h(\varphi) \geq T_P(f)(\varphi) \geq b_P(\varphi)$ pre hocijakú $f \in X$. Preto

$$h(\varphi) < C_i(\overline{g}(\psi[e]), P(\varphi' \leftarrow_i \psi)) = C_i(f_\psi(g(\eta_1^\psi[e]), \ldots, g(\eta_{n_\psi}^\psi[e])), P(\varphi' \leftarrow_i \psi))$$

pre nejaké pravidlo $\varphi' \leftarrow_i \psi$ a substitúciu $e : \mathsf{Var} \to U_{\mathcal{L}}$ takú, že $\varphi = \varphi'[e]$. Funkcia $c(x_1, \ldots, x_{n_\psi}) = C_i(f_\psi(x_1, \ldots, x_{n_\psi}), P(\varphi' \leftarrow_i \psi))$ je kompozíciou neklesajúcich zľava spojitých funkcií a teda je tiež neklesajúca a zľava spojitá. Preto existuje $\delta > 0$ také, že kedykoľvek $x_i' > g(\eta_i^\psi[e]) - \delta$ pre $i \leq n_\psi$, tak $h(\varphi) < c(x_1', \ldots, x_{n_\psi}')$. Keďže $g = \sup X$ a X je nahor usmernená existuje $g' \in X$ také, že $g'(\eta_i^\psi[e]) > g(\eta_i^\psi[e]) - \delta$ pre $i \leq n_\psi$. Potom

$$h(\varphi) < C_i(f_\psi(g'(\eta_1^\psi[e]), \ldots, g'(\eta_{n_\psi}^\psi[e])), P(\varphi' \leftarrow_i \psi)) \leq a_P(g')(\varphi) \leq T_P(g')(\varphi),$$

čo je spor, lebo $h \geq T_P(g')$. □

V dôsledku Vety 3.4.7 funkcia $T_P^\omega(\mathbf{0}) = \sup\{T_P^n(\mathbf{0}) : n \geq 0\}$ je pevným bodom zobrazenia T_P.

Veta 3.4.8. *Pre každý model $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ programu P je $T_P(f) \leq f$. Ak všetky odvodzovacie pravidlá modus ponens (3.1) sú regulárne, tak $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ je model programu P práve vtedy, keď $T_P(f) \leq f$.*

Dôkaz. Predpokladajme, že $f \models P$. Ukážeme, že $b_P(\varphi) \leq f(\varphi)$ a $a_P(f)(\varphi) \leq f(\varphi)$ pre každý atóm $\varphi \in B_{\mathcal{L}}$. Nech φ' je ľubovoľná atomická formula a nech $e : \mathsf{Var} \to U_{\mathcal{L}}$. Potom $f(\varphi'[e]) \geq \mathrm{PH}(f \models \varphi') \geq P(\varphi')$ a preto $b_P \leq f$. Pre ľubovoľné pravidlo $\varphi' \leftarrow_i \psi$ programu P dostaneme

$$\overset{\bullet}{\to}_i(\overline{f}(\psi[e]), f(\varphi'[e])) = \mathrm{PH}(f \models \varphi'[e] \leftarrow_i \psi[e]) \geq \mathrm{PH}(f \models \varphi' \leftarrow_i \psi) \geq P(\varphi' \leftarrow_i \psi).$$

Vďaka korektnosti modus ponens platí $f(\varphi'[e]) \geq C_i(\overline{f}(\psi[e]), P(\varphi' \leftarrow_i \psi))$. To znamená, že $a_P(f)(\varphi'[e]) \leq f(\varphi'[e])$ a nerovnosť $T_P(f) \leq f$ je dokázaná.

Predpokladajme, že všetky odvodzovacie pravidlá sú regulárne a nech $T_P(f) \leq f$. Ukážeme, že $f \models P$. Nech φ je atomická formula, $\psi \in \Sigma_0$ a $e : \mathsf{Var} \to U_{\mathcal{L}}$ je ľubovoľné ohodnotenie. Potom $f(\varphi'[e]) \geq T_P(f)(\varphi'[e]) \geq P(\varphi')$ a teda $\mathrm{PH}(f \models \varphi') = \inf_e f(\varphi'[e]) \geq P(\varphi')$. Podobne $f(\varphi'[e]) \geq a_P(f)(\varphi'[e]) \geq C_i(\overline{f}(\psi[e]), P(\varphi' \leftarrow_i \psi))$. Z Tvrdenia 1.7.5 vyplýva, že funkcia $\overset{\bullet}{\to}_i$ je neklesajúca v druhom argumente. Použitím monotónnosti funkcie $\overset{\bullet}{\to}_i$ a vlastnosti $\Phi_3(C_i, \overset{\bullet}{\to}_i)$ dostaneme

$$\begin{aligned}\mathrm{PH}(f \models_e \varphi' \leftarrow_i \psi) &= \overset{\bullet}{\to}_i(\overline{f}(\psi[e]), f(\varphi'[e])) \\ &\geq \overset{\bullet}{\to}_i(\overline{f}(\psi[e]), C_i(\overline{f}(\psi[e]), P(\varphi' \leftarrow_i \psi))) \geq P(\varphi' \leftarrow_i \psi)\end{aligned}$$

pre každé ohodnotenie e. Preto

$$\mathrm{PH}(f \models \varphi' \leftarrow_i \psi) = \inf_e \mathrm{PH}(f \models \varphi' \leftarrow_i \psi) \geq P(\varphi' \leftarrow_i \psi). \qquad \Lambda$$

Nasledujúce tvrdenie je bezprostredným dôsledkom Vety 3.3.1(2), Vety 3.4.7 a Vety 3.4.8.

Dôsledok 3.4.9. *Predpokladajme, že pravdivostné funkcie spojok $s \in \mathcal{S}$ sú neklesajúce a zľava spojité, všetky odvodzovacie pravidlá modus ponens* (3.1) *sú regulárne a funkcie C_i sú zľava spojité v oboch argumentoch. Potom $T_P^\omega(\mathbf{0}) = \inf\{f \in \mathcal{F}_\mathcal{L} : f \models P\}$ a $T_P^\omega(\mathbf{0})$ je najmenší model programu P.* □

Všimnime si teraz vzťah medzi najmenšími herbrandovskými modelmi programu P a jeho konzervatívneho rozšírenia P' pridaním postupnosti konštantných symbolov do jazyka $\mathcal{L}$. Nech teda $\mathcal{C}_0$ je spočítateľná (nekonečná) množina nových konštantných symbolov, $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \mathcal{C}_0$. Nech $P' = P$ je program v jazyku $\mathcal{L}'$. Nech $E = {}^{\mathsf{Var}}U_\mathcal{L}$, $E' = {}^{\mathsf{Var}}U_{\mathcal{L}'}$ sú odpovedajúce množiny všetkých ohodnotení premenných v týchto modeloch. Nakoniec, zvoľme pevne nejakú bijekciu $e_0 : \mathsf{Var} \to \mathcal{C}_0$.

Lema 3.4.10. *Ak $f \models P'$, tak $f{\restriction}B_\mathcal{L} \models P$.*

Dôkaz. $\mathrm{PH}(f{\restriction}B_\mathcal{L} \models \varphi) = \inf_{e\in E} f_\varphi(f(\eta_1^\varphi[e], \dots f(\eta_{n_\varphi}^\varphi[e])) \geq \mathrm{PH}(f \models \varphi) \geq P'(\varphi)$ pre každú formulu φ jazyka $\mathcal{L}$ bez kvantifikátorov. □

Lema 3.4.11. *Ak $g \models P$ a $\tilde{g}(\varphi) = \mathrm{PH}(g \models \varphi[e_0^{-1}])$ pre $\varphi \in B_{\mathcal{L}'}$, tak $\tilde{g} \models P'$.*

Dôkaz. Indukciou cez zložitosť formuly φ bez kvantifikátorov a bez voľných premenných v jazyku $\mathcal{L}'$ sa ľahko ukáže, že $\mathrm{PH}(\tilde{g} \models \varphi) = \mathrm{PH}(g \models \varphi[e_0^{-1}])$. Preto, ak φ je z oboru definície programu P', tak $\mathrm{PH}(\tilde{g} \models \varphi) = \inf_{e\in E'} \mathrm{PH}(\tilde{g} \models \varphi[e]) = \inf_{e\in E'} \mathrm{PH}(g \models \varphi[e][e_0^{-1}]) = \mathrm{PH}(g \models \varphi) \geq P(\varphi) = P'(\varphi)$. □

Lema 3.4.12. *Ak f je najmenší model programu P', tak $f{\restriction}B_\mathcal{L}$ je najmenší model programu P.*

Dôkaz. $f{\restriction}B_\mathcal{L} \models P$ podľa Lemy 3.4.10. Nech g je ľubovoľný model programu P. Zrejme $\tilde{g} \models P'$ podľa Lemy 3.4.11 a preto $f \leq \tilde{g}$. Preto $f{\restriction}B_\mathcal{L} \leq g$, čo znamená, že $f{\restriction}B_\mathcal{L}$ je najmenší model P. □

Príklad 3.4.13. (a) *Ak g je najmenší model programu P, tak $\tilde{g}$ nemusí byť najmenší model programu P'. Napríklad, nech $\mathcal{L} = \{p, a\}$, $U_\mathcal{L} = \{a\}$, $B_\mathcal{L} = \{p(a)\}$, $P(p(a)) = 1$. Funkcia g definovaná rovnosťou $g(p(a)) = 1$ je najmenší model programu P. Naproti tomu $U_{\mathcal{L}'} = \{a, c_0, c_1, \dots\}$, $B_{\mathcal{L}'} = \{p(a), p(c_0), p(c_1), \dots\}$, $\tilde{g}(p(a)) = 1$, $\tilde{g}(p(c_i)) = 1$ pre $i \in \mathbb{N}$, ale funkcia $f : B_{\mathcal{L}'} \to [0,1]$ definovaná rovnosťou $f(p(a)) = 1$, $f(p(c_i)) = 0$ je tiež model P' a $\tilde{g} \not\leq f$.*

(b) *Ak jazyk $\mathcal{L}$ obsahuje aspoň toľko konštánt nevyskytujúcich sa v axiómach programu P koľko je najvyššia árnosť niektorého z predikátových symbolov, tak $\tilde{g}$ je najmenší model programu P'.*

Lema 3.4.14. *Predpokladajme, že jazyk $\mathcal{L}$ obsahuje nekonečne veľa konštantných symbolov. Nech $e_0 : \mathsf{Var} \to \mathcal{C}$ je ohodnotenie premenných navzájom rôznymi konštantami nevyskytujúcimi sa v axiómach programu P. Potom ak f je najmenší model programu P, tak $\mathrm{PH}(f \models \varphi) = \mathrm{PH}(f \models \varphi[e_0])$ pre každú $\varphi \in \Sigma_0$ bez konštantných symbolov z $\mathrm{rng}(e_0)$.*

Dôkaz. Definujme $f^* \in \mathcal{F}_\mathcal{L}$ rovnosťou $f^*(\varphi[e_0]) = \mathrm{PH}(f \models \varphi)$. Najskôr ukážeme, že $f^* \models P$. Nech φ je atomická formula bez konštánt z $\mathrm{rng}(e_0)$.

$$\mathrm{PH}(f^* \models \varphi) = \inf_e \mathrm{PH}(f \models \varphi[e][e_0^{-1}]) = \cdots = \mathrm{PH}(f \models \varphi) \geq P(\varphi).$$

Indukciou cez zložitosť formuly φ bez kvantifikátorov a bez konštánt z $\mathrm{rng}(e_0)$ sa ľahko ukáže rovnosť $\mathrm{PH}(f^* \models \varphi) = \mathrm{PH}(f \models \varphi)$. Špeciálne pre pravidlo $\varphi \leftarrow_i \psi$ programu P dostaneme $\mathrm{PH}(f^* \models \varphi \leftarrow_i \psi) = \mathrm{PH}(f \models \varphi \leftarrow_i \psi) \geq P(\varphi \leftarrow_i \psi)$. Teda

$f^* \models P$ a z minimality modelu f vyplýva rovnosť $f = f^*$. Nakoniec, nech φ je ľubovoľná formula bez kvantifikátorov a bez konštánt z $\mathrm{rng}(e_0)$. Potom

$$\begin{aligned}\mathrm{PH}(f \models \varphi[e_0]) &= f_\varphi(f^*(\eta_1^\varphi[e_0]), \dots, f^*(\eta_{n_\varphi}^\varphi[e_0])) \\ &= f_\varphi(\mathrm{PH}(f \models \eta_1^\varphi), \dots, \mathrm{PH}(f \models \eta_{n_\varphi}^\varphi)) = \mathrm{PH}(f \models \varphi). \qquad \Lambda\end{aligned}$$

Veta 3.4.15 (Aproximatívna úplnosť fuzzy logického programovania)**.** *Predpokladajme, že pravdivostné funkcie spojok $s \in \mathcal{S}$ sú neklesajúce a zľava spojité, všetky odvodzovacie pravidlá modus ponens* (3.1) *sú regulárne a funkcie C_i sú zľava spojité v oboch argumentoch. Potom pre každú správnu odpoveď (θ, x) na otázku $?\varphi$ v programe P a pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $y > x - \varepsilon$, pre ktoré (θ, y) je vypočítaná odpoveď pre otázku $?\varphi$.*

K dôkazu tejto vety budeme potrebovať nasledujúcu Lemu 3.4.16.

Lema 3.4.16. *Predpokladajme, že $f : [0,1]^m \to [0,1]$ je zľava spojitá a neklesajúca, $e_1, \dots, e_m : \mathsf{Var} \to U_{\mathcal{L}}$ a $\psi_1, \dots, \psi_m \in \Sigma_0$. Ak $n \geq 1$ a*

$$f(\overline{T_P^n(\mathbf{0})}(\psi_1[e_1]), \dots, \overline{T_P^n(\mathbf{0})}(\psi_m[e_m])) > x,$$

tak existujú vypočítané odpovede (θ_1, a_1), ... , (θ_m, a_m) v poradí pre otázky $?\psi_1[e_1]$, ... , $?\psi_m[e_m]$ programu P také, že $f(a_1, \dots, a_m) > x$.

Dôkaz. Indukciou cez $n \geq 1$. Nech $n = 1$. Pre zjednodušenie, dôkaz urobíme len pre $m = 1$, $\psi_1 = \psi$, $e_1 = e$. $T_P(\mathbf{0}) = b_P$ podľa Lemy 3.4.5, a preto $f(\overline{T_P(\mathbf{0})}(\psi[e])) = f(f_\psi(b_P(\eta_1^\psi[e]), \dots, \eta_{n_\psi}^\psi[e])) > x$. Označme $u = (b_P(\eta_1^\psi[e]), \dots, \eta_{n_\psi}^\psi[e])$. Z polospojitosti a monotónnosti funkcií f, f_ψ vyplýva, že existuje také $v \in \mathbb{R}^{n_\psi}$, že $v < u$ a $f(f_\psi(y_1, \dots, y_{n_\psi})) > x$ kedykoľvek $y = (y_1, \dots, y_{n_\psi}) > v$ a $y \in [0,1]^{n_\psi}$. Keďže $v_j < b_P(\eta_j^\psi[e])$, $j \leq n_\psi$, existujú fakty φ'_1, ... , φ'_{n_ψ} programu P také, že $P(\varphi') > v_j$ a $\eta_j^\psi[e] = \varphi'[e^j]$ pre nejaké substitúcie e^j, $j \leq n_\psi$. Potom postupnosť

$G_0 = f_\psi(\eta_1^\psi[e], \dots, \eta_{n_\psi}^\psi[e])$, $\theta_0 = \mathrm{id}$,
$G_j = f_\psi(P(\varphi'_1), \dots, P(\varphi'_j), \eta_{j+1}^\psi[e], \dots, \eta_{n_\psi}^\psi[e])$, $\theta_j = \mathrm{id}$, pre $1 \leq j \leq n_\psi$,
$G_{n_\psi+1} = a$, $\theta_{n_\psi+1} = \mathrm{id}$,

kde $a = f_\psi(P(\varphi'_1), \dots, P(\varphi'_{n_\psi}))$, je výpočet odpovede (e, a) pre otázku $?\psi[e]$ programu P (v skutočnosti na $f_\psi(\dots)$ treba pozerať ako na slovo ψ, do ktorého sa postupne za podformuly dosadzujú iné slová abecedy Γ, a medzi G_n a G_{n+1} treba vsunúť ešte výpočet výrazu $f_\psi(P(\varphi'_1), \dots, P(\varphi'_{n_\psi}))$ ako kompozíciu pravdivostných funkcií logických spojok).

Keďže $(P(\varphi'_1), \dots, P(\varphi'_{n_\psi})) > v$, $f(a) = f(f_\psi(P(\varphi'_1), \dots, P(\varphi'_{n_\psi}))) > x$.

Predpokladajme, že lema platí pre prirodzené číslo $n \geq 1$. Dokážeme lemu pre prirodzené číslo $n + 1$. Opäť kvôli zjednodušeniu, dôkaz urobíme len pre $m = 1$, $\psi_1 = \psi$, $e_1 = e$. V tomto prípade máme

$$f(\overline{T_P^{n+1}(\mathbf{0})}(\psi[e])) = f(f_\psi(T_P^{n+1}(\mathbf{0})(\eta_1^\psi[e]), \dots, T_P^{n+1}(\mathbf{0})(\eta_{n_\psi}^\psi[e])).$$

Z polospojitosti a monotónnosti funkcií f, f_ψ vyplýva, že existuje také $v \in \mathbb{R}^{n_\psi}$, že $v < u$ a $f(f_\psi(y_1, \dots, y_{n_\psi})) > x$ kedykoľvek $y = (y_1, \dots, y_{n_\psi}) > v$ a $y \in [0,1]^{n_\psi}$. Keďže $v_j < T_P^{n+1}(\mathbf{0})(\eta_j^\psi[e])$, pre $j \leq n_\psi$, existujú atomické formuly φ'_1, ... , φ'_{n_ψ}, formuly ψ_1, ... , ψ_{n_ψ} bez kvantifikátorov, substitúcie e^1, ... , e^{n_ψ} také, že $\eta_j^\psi[e] =$

$\varphi'_j[e^j]$ a

$$v_j < \max\{P(\varphi'_j), C_i(\overline{T^n_P(\mathbf{0})}(\psi_j[e^j]), P(\varphi'_j \leftarrow_i \psi_j))\}, \quad \text{pre nejaké } i \in J$$

pre $j \leq n_\psi$. Označme $b_j = P(\varphi'_j \leftarrow_i \psi_j)$ pre $j \leq n_\psi$. Ak $C_i(\overline{T^n_P(\mathbf{0})}(\psi_j[e^j]), b_j) > v_j$, potom podľa indukčného predpokladu existuje výpočet (G^j_0, θ^j_0), ... , $(G^j_{m_j}, \theta^j_{m_j})$ takej odpovede (θ^j, a'_j) pre otázku $?\psi_j[e^j]$ programu P, že $a_j = C_i(a'_j, b_j) > v_j$. Ak $C_i(\overline{T^n_P(\mathbf{0})}(\psi_j[e^j]), b_j) \leq v_j$, potom $P(\varphi'_j) > j$ a nech $a_j = P(\varphi'_j)$.

Indukciou zostrojíme rastúcu postupnosť k_j, $j \leq n_\psi$, $k_0 = 0$, $k_1 = 1$ a postupnosť (G_k, θ_k) pre $k_j \leq k < k_{j+1}$, $j < n_\psi$, ktorá je výpočtom odpovede (θ, a) pre otázku $?\psi[e]$ programu P pre nejakú substitúciu θ, kde $a = f_\psi(a_1, \ldots, a_{n_\psi})$. Nech

$$G_0 = f_\psi(\eta^\psi_1[e], \ldots, \eta^\psi_{n_\psi}[e]),\ \theta_0 = \mathrm{id}.$$

Nech $1 \leq j \leq n_\psi$. Ak $C_i(\overline{T^n_P(\mathbf{0})}(\psi_j[e^j]), b_j) > v_j$, tak definujeme $k_{j+1} = k_j + m_j + 2$ a

$G_{k_j+k} = f_\psi(a_1, \ldots, a_{j-1}, C_i(G^j_k, b_j), \eta^\psi_{j+1}[e], \ldots, \eta^\psi_{n_\psi}[e])$, $\theta_{k_j+k} = \theta^j_k$, pre $0 \leq k \leq m_j$,
$G_{k_{j+1}-1} = f_\psi(a_1, \ldots, a_j, \eta^\psi_{j+1}[e], \ldots, \eta^\psi_{n_\psi}[e])$, $\theta_{k_{j+1}-1} = \mathrm{id}$.

Ak $C_i(\overline{T^n_P(\mathbf{0})}(\psi_j[e^j]), b_j) \leq v_j$, tak definujeme $k_{j+1} = k_j + 1$ a

$$G_{k_j} = f_\psi(a_1, \ldots, a_j, \eta^\psi_{j+1}[e], \ldots, \eta^\psi_{n_\psi}[e]),\ \theta_{k_j} = \mathrm{id}.$$

Nakoniec definujme

$$G_{k_{n_\psi+1}} = a,\ \theta_{k_{n_\psi+1}} = \mathrm{id}.$$

Keďže $(a_1, \ldots, a_{n_\psi}) > v$, $f(a) = f(f_\psi(a_1, \ldots, a_{n_\psi})) > x$. □

Dôkaz Vety 3.4.15. Nech (θ, x) je správna odpoveď na otázku $?\varphi$ programu P a nech $\varepsilon > 0$. Potom $\mathrm{PH}(T^\omega_P(\mathbf{0}) \models \varphi[\theta]) \geq x$ lebo podľa Dôsledku 3.4.9 $T^\omega_P(\mathbf{0})$ je (najmenší) model programu P. Na základe Lemy 3.4.11 a Lemy 3.4.12 môžeme predpokladať, že jazyk $\mathcal{L}$ má nekonečne veľa konštánt a nech $e_0 : \mathsf{Var} \to \mathcal{C}$ je ohodnotenie premenných navzájom rôznymi konštantami nevyskytujúcimi sa v axiómach programu P a vo formule $\varphi[\theta]$. Potom $\mathrm{PH}(T^\omega_P(\mathbf{0}) \models \varphi[\theta][e_0]) = \mathrm{PH}(T^\omega_P(\mathbf{0}) \models \varphi[\theta])$ podľa Lemy 3.4.14. Preto $f_\varphi(T^\omega_P(\mathbf{0})(\eta^\varphi_1[\theta \circ e_0]), \ldots T^\omega_P(\mathbf{0})(\eta^\varphi_{n_\varphi}[\theta \circ e_0])) \geq x$. Funkcia f_φ je zľava spojitá, lebo je kompozíciou pravdivostných funkcií spojok $s \in \mathcal{S}$. Preto existuje n také, že $f_\varphi(T^n_P(\mathbf{0})(\eta^\varphi_1[\theta \circ e_0]), \ldots, T^n_P(\mathbf{0})(\eta^\varphi_{n_\varphi}[\theta \circ e_0])) > x - \varepsilon$. Podľa Lemy 3.4.16 existujú výpočty (G^j_0, θ^j_0), ... , $(G^j_0, \theta^j_{m_j})$ takých odpovedí (θ^j, a_j) pre otázky $?\eta^\varphi_j[\theta \circ e_0]$, $j \leq n_\varphi$, že $y = f_\varphi(a_1, \ldots, a_{n_\varphi}) > x - \varepsilon$. Podobne ako v Leme 3.4.16 pomocou týchto výpočtov sa ľahko dá popísať výpočet odpovede (θ', y) pre otázku $?\varphi[\theta \circ e_0]$ programu P pre nejakú substitúciu θ'. Zrejme odpoveď $(\theta \circ e_0 \circ \theta', y)$ je vypočítaná odpoveď pre otázku $?\varphi$. a keďže $\theta \circ e_0 \circ \theta' = \theta \circ e_0$, odpoveď $(\theta \circ e_0, y)$ je vypočítaná odpoveď pre otázku $?\varphi$. Nech (G_0, θ_0), ... , (G_m, θ_m) je výpočet odpovede $(\theta \circ e_0, y)$ a nech $e : \mathrm{rng}(e_0) \to \mathsf{Var}$ je prosté zobrazenie, ktoré konštantám z $\mathrm{rng}(e_0)$ priradí navzájom rôzne premenné nevyskytujúce sa v žiadnom zo slov G_0, ... , G_m. Keďže žiadna z týchto konštánt sa nevyskytuje v axiómach programu P, ľahko sa overí, že postupnosť $(G_0 \circ e, \theta_0 \circ e)$, ... , $(G_m \circ e, \theta_m \circ e)$ je výpočet odpovede (θ, y) pre otázku $?\varphi$. □

3.5. **Logické programovanie s konečnou množinou pravdivostných hodnôt.** Predpokladajme, že množina pravdivostných hodnôt $V \subseteq [0,1]$ je konečná, $0,1 \in V$. V tomto prípade pre korektnosť odvodzovacieho pravidla modus ponens (1.1) platí ekvivalencia

$$\mathrm{MP}(C,I) \equiv (\forall a,b \in V)(\forall x,y \in [0,1])\,(a \geq x \wedge I(a,b) \geq y) \to b \geq C(x,y),$$

pričom $I : V \times V \to V$ a $C : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$. Definujme hornú redukciu $(\cdot)^V$ a dolnú redukciu $(\cdot)_V$ intervalu $[0,1]$ na V rovnosťami $(x)^V = \inf\{a \in V : x \leq a\}$, $(x)_V = \sup\{a \in V : x \geq a\}$. Tieto redukcie umožňujú preložiť V-výrokový počet do $[0,1]$-výrokového počtu. Ak $\dot{s}$ je pravdivostná funkcia n-árnej logickej spojky, definujeme $\overline{\dot{s}}(x_1,\ldots,x_n) = \dot{s}((x_1)^V,\ldots,(x_n)^V)$. Funkcia $\overline{\dot{s}}$ je zľava spojitá. Ak I je pravdivostná funkcia implikácie definujeme $\overline{I}(x,y) = I((x)^V,(y)_V)$, t.j. $\overline{I}$ je zľava spojitá v prvom argumente a sprava spojitá v druhom argumente. Ľahko sa overí, že $\mathrm{MP}(C,I) \equiv \mathrm{MP}(C,\overline{I})$ a takto rozšírený modus ponens je podľa Tvrdenia 1.7.5 regulárny práve vtedy, keď funkcia I je nerastúca v prvom argumente a $C = C_{\overline{I}}$. Priamo z definície vyplýva, že funkcia $C_{\overline{I}}$ je zľava spojitá v oboch argumentoch a $C_{\overline{I}} : [0,1] \times [0,1] \to V$. Toto predĺženie pravdivostných funkcií spojok $s \in \mathcal{S}$ a implikácií $\leftarrow_i$ pre $i \in J$ dovoľuje preniesť všetky výsledky častí 3.2 a 3.4 na prípad konečnej množiny V.

Veta 3.5.1. *Predpokladajme, že množina pravdivostných hodnôt V je konečná, pravdivostné funkcie spojok $s \in \mathcal{S}$ sú neklesajúce, funkcie $\dot{\to}_i$ pre $i \in J$ sú nerastúce v prvom argumente a neklesajúce v druhom argumente a $C_i = C_{\overline{I}_i}$ pre $I_i = \dot{\to}_i$. Potom platia nasledujúce podmienky.*

(1) *Každá vypočítaná odpoveď pre otázku programu P je správna.*
(2) *$T_P^\omega(\mathbf{0})$ je najmenší model programu P.*
(3) *Každá správna odpoveď na otázku programu P je vypočítaná odpoveď pre tú istú otázku.* □

Na rozdiel od aproximatívnej úplnosti v $[0,1]$-logickom programovaní, v konečne hodnotovej logike platí silnejšia úplnosť vďaka tomu, že množina všetkých vypočítaných pravdivostných hodnôt je konečná.

4. Dodatok

4.1. **Definície spojitosti.** Nech $x,y \in \mathbb{R}^n$, $x = \langle x_1,\ldots,x_n\rangle$, $y = \langle y_1,\ldots,y_n\rangle$, $\varepsilon > 0$. Definujeme

(1) $\langle x_1,\ldots,x_n\rangle \leq \langle y_1,\ldots,y_n\rangle$, ak $x_1 \leq y_1, \ldots, x_n \leq y_n$.
(2) $\langle x_1,\ldots,x_n\rangle < \langle y_1,\ldots,y_n\rangle$, ak $x_1 < y_1, \ldots, x_n < y_n$.
(3) $\langle x_1,\ldots,x_n\rangle - \varepsilon = \langle x_1-\varepsilon,\ldots,x_n-\varepsilon\rangle$.
(4) $(x,y) = \{z \in [0,1]^n : x < z < y\}$ je otvorený interval v usporiadaní $\leq$ na $[0,1]^n$.
(5) $(x,y] = \{z \in [0,1]^n : x < z \leq y\}$ je zľava (zdola) otvorený interval v usporiadaní $\leq$ na $[0,1]^n$.
(6) $\|x\| = |x_1| + \cdots + |x_n|$ je norma na $[0,1]^n$, t.j.
    (a) $\|x\| = 0 \leftrightarrow (x_1 = 0 \wedge \cdots \wedge x_n = 0)$,
    (b) $\|x\| > 0$ pre $x \neq (0,\ldots,0)$,
    (c) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
(7) Množina $U \subseteq [0,1]^n$ je otvorená v $[0,1]^n$, ak U je zjednotenie otvorených intervalov v $[0,1]^n$.

(8) Množina $U \subseteq [0,1]^n$ je zľava (zdola) otvorená v $[0,1]^n$, ak U je zjednotenie zľava otvorených intervalov v $[0,1]^n$.
(9) Funkcia $f : [0,1] \to [0,1]$ je neklesajúca, ak $x \leq y \to f(x) \leq f(y)$.
(10) Postupnosť prvkov $x^{(k)} \in [0,1]^n$, $k \in \mathbb{N}$ konverguje k $y \in [0,1]^n$, ak $\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = y_i$ pre $i = 1, \ldots, n$.
(11) Funkcia $f : [0,1]^n \to [0,1]$ je spojitá, ak je splnená podmienka (1) Tvrdenia 4.1.1.
(12) Funkcia $f : [0,1]^n \to [0,1]$ *je zľava spojitá*, ak je splnená podmienka (1) Tvrdenia 4.1.2. Ak f je neklesajúca zľava spojitá, potom niekedy hovoríme tiež, že f *je zdola spojitá*.

Tvrdenie 4.1.1. *Nech $f : [0,1]^n \to [0,1]$. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*
(1) $(\forall a \in [0,1]^n)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in [0,1]^n)\, \|x-a\| < \delta \to |f(x)-f(a)| < \varepsilon$.
(2) $\lim_{k\to\infty} f(x^{(k)}) = f(\lim_{k\to\infty} x^{(k)})$ *pre každú konvergentnú postupnosť prvkov $x^{(k)} \in [0,1]^n$, $k \in \mathbb{N}$.*
(3) *Pre každú množinu $U \subseteq [0,1]^n$ otvorenú v $[0,1]^n$, $f^{-1}(U)$ je otvorená množina v $[0,1]$.*
(4) *Množiny $\{x \in [0,1]^n : f(x) < a\}$, $\{x \in [0,1]^n : f(x) > a\}$ sú otvorené v $[0,1]^n$ pre každé $a \in [0,1]$.* □

Tvrdenie 4.1.2. *Nech $f : [0,1]^n \to [0,1]$. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*
(1) $(\forall a \in [0,1]^n)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (a-\varepsilon, a] \cap [0,1]^n)\, |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
(2) $\lim_{k\to\infty} f(x^{(k)}) = f(\lim_{k\to\infty} x^{(k)})$ *pre každú neklesajúcu postupnosť prvkov $x^{(k)} \in [0,1]^n$, $k \in \mathbb{N}$.*
(3) *Pre každú množinu $U \subseteq [0,1]^n$ otvorenú v $[0,1]^n$, $f^{-1}(U)$ je zľava otvorená množina v $[0,1]$.* □

Tvrdenie 4.1.3. *Ak $f : [0,1]^n \to [0,1]$ je neklesajúca, potom f je zľava spojitá práve vtedy, keď*
(4) *množina $\{x \in [0,1]^n : f(x) > a\}$ je otvorená v $[0,1]^n$ pre každé $a \in [0,1]$.*
□

4.2. **Zväzová algebra.** Hovoríme, že neprázdna množina L s dvojicou operácií $\vee$, $\wedge$ určuje *zväz*, ak pre každé $x, y, z \in L$ platia podmienky

1. idempotentnosť	$x \vee x = x$,	$x \wedge x = x$
2. komutatívnosť	$x \vee y = y \vee x$,	$x \wedge y = y \wedge x$,
3. asociatívnosť	$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$,	$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$,
4. absorpcia	$(x \wedge y) \vee x = x$,	$x \wedge (y \vee x) = x$.

Pripomeňme základné pojmy teórie čiastočných usporiadaní. Nech L je neprázdna množina a $\leq$ binárna relácia na L. Hovoríme, že $L, \leq$ je *čiastočne usporiadaná množina*, ak relácia $\leq$ je (1) reflexívna, t.j. $x \leq x$, (2) antisymetrická, t.j. $x \leq y \,\&\, y \leq x \to x = y$ a (3) tranzitívna, t.j. $x \leq y \,\&\, y \leq z \to x \leq z$. Nech X je neprázdna podmnožina čiastočne usporiadanej množiny L. Prvok $a \in L$ sa nazýva *supremum množiny* X, píšeme $a = \sup X$, ak a je *najmenšie horné ohraničenie* množiny X, t.j. $(\forall x \in X)\, x \leq a$ a ak $(\forall x \in X)\, x \leq b$, potom $a \leq b$. Podobne a je *infimum množiny* X, píšeme $a = \inf X$, ak a je *najväčšie dolné ohraničenie*.

Tvrdenie 4.2.1.

(1) *Ak* $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ *je zväz, potom* $x \vee y = y \equiv x \wedge y = x$ *a binárna relácia* $\leq$ *na* L *definovaná vzťahom* $x \leq y \equiv x \vee y = y$ *je čiastočné usporiadanie na* L *a platí* $x \vee y = \sup\{x, y\}$, $x \wedge y = \inf\{x, y\}$.

(2) *Nech* $L, \leq$ *je čiastočne usporiadaná množina, v ktorej každá dvojprvková množina má supremum a infimum. Definujme* $x \vee y = \sup\{x, y\}$ *a* $x \wedge y = \inf\{x, y\}$. *Potom algebra* $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ *je zväz a* $x \leq y \equiv x \vee y = y \equiv x \wedge y = x$.

□

Literatúra

[1] P. Vojtáš, Fuzzy logické programovanie, Prednáška pre 3. ročník štúdia matematickej informatiky na PF UPJŠ v Košiciach, zimný semester 1998/99.

Register