Modus ponens. Predpokladajme, že funkcia $I : [0,1]\times[0,1] \to [0,1]$ je pravdivostná funkcia implikácie $\to_I$. Modus ponens pre $\to_I$ je odvodzovacie pravidlo tvaru

$$(MP) \qquad \frac{(B, b)\ ,\ (B \to_I H, r)}{(H,\ C(b, r))}$$

B, b - body
H, h - head
$I(b, h) = r$ - rule.

kde $C : [0,1]\times[0,1] \to [0,1]$ je nejaká funkcia.

Odvodzovacie pravidlo (MP) je korektné OP, ak $\bar{v}(H) \geq C(b,r)$ pre každé $b, r \in [0,1]$ a každý model v teórie $T = \{(B, b), (B \to_I H, r)\}$, t.j. ak pre každé ~~po~~ ohodnotenie $v : EV \to [0,1]$,

$$\bar{v}(H) \geq C(b,r) \text{ akonáhle } \bar{v}(B) \geq b \text{ a } \underbrace{\bar{v}(B \to_I H) \geq r}_{I(\bar{v}(B),\, \bar{v}(H)) \geq r}$$

$MP(C, I)$ označuje tvrdenie:
Odvodzovacie pravidlo (MP) je korektné.

Kedy ~~je~~ platí $MP(C,I)$?
Nech $B, H \in EV$. Potom $v : EV \to [0,1]$ je modelom teórie $T = \{(B, b), (B \to_I H, r)\}$ práve vtedy, keď $v(B) \geq b$ a $I(v(B), v(H)) \geq r$. Preto platí:

$$MP(C,I) \equiv (\forall b, r \in [0,1])(\forall v \in {}^{EV}[0,1])\ v(B) \geq b \wedge I(v(B), v(H)) \geq r \Rightarrow v(H) \geq C(b,r)$$

$$\equiv (\forall b, r, b', h' \in [0,1])\ b' \geq b \wedge I(b', h') \geq r \Rightarrow h' \geq C(b,r)$$

$$\equiv (\forall b, r, b', h' \in [0,1])\ b' \geq b \wedge C(b,r) > h' \Rightarrow r > I(b', h')$$

($(p \wedge q) \to r \equiv (p \wedge \neg r) \to \neg q$ je tautológia VP) je zrejmé, že ak $C \geq C'$ a $I \geq I'$, tak $MP(C, I) \Rightarrow MP(C', I')$.

V snahe získať čo najsilnejší modus ponens definujme pre $I, C : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$

$$\mathcal{C}_I = \{C : MP(C, I)\} = MP^I \qquad \mathcal{I}_C = \{I : MP(C, I)\} = MP_C$$

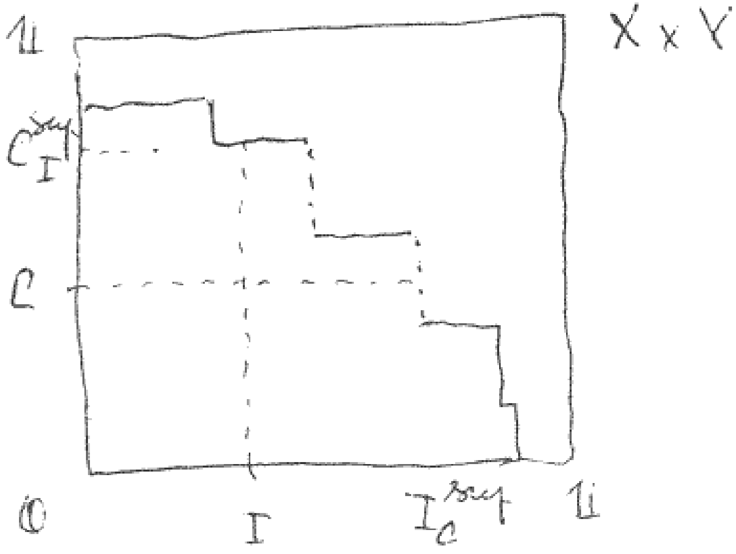
$$C_I^{sup} = \sup \mathcal{C}_I \qquad I_C^{sup} = \sup \mathcal{I}_C$$

$$C_I(b, r) = \inf \{h \in [0,1] : I(b, h) \geq r\}$$

$$I_C(b, h) = \sup \{r \in [0,1] : C(b, r) \leq h\}$$

(pričom $\inf \emptyset = 1$, $\sup \emptyset = 0$)

$X = [0,1] \times [0,1]_{[0,1]}$ je zväz s $\mathbb{0}$, $\mathbb{1}$ (nie je lineárny)



? $MP(C_I^{sup}, I)$?

? $MP(C_I, I)$?

Bezprostredne z definícií vyplýva toto tvrdenie:

<u>Tvrdenie 1</u> I_C a C_I sú neklesajúce v 2. argumente.
Navyše platí:
(1) ak I je nerastúca v 1. argumente, tak C_I je neklesajúca v oboch argumentoch.
(2) ak C je neklesajúca v 1. argumente, tak I_C je nerastúca v 1. argumente a neklesajúca v 2. argumente. □

<u>Dodatočné predpoklady</u>: V nasledujúcom, keď budeme hovoriť o funkciách C_I^{sup}, C_I, I_C^{sup}, I_C atď. budeme mlčky predpokladať, že
a) C je neklesajúca v oboch argumentoch
b) I je nerastúca v 1. argumente a neklesajúca v 1. argumente.

Tieto predpoklady sa nekladú na všetky prvky množín $\mathcal{C}_I$ a $\mathcal{I}_C$.

Pre C, I spĺňajúce tieto predpoklady platí:

$MP(C, I) \equiv (\forall b, r, h)(I(b, h) \geq r \rightarrow C(b, r) \leq h)$.

Definícia $\Phi_2(C,I) \equiv (\forall b,h \in [0,1])\ C(b, I(b,h)) \le h$

$\Phi_3(C,I) \equiv (\forall b,r \in [0,1])\ I(b, C(b,r)) \ge r$

Tvrdenie 4. (1) $C \le C_I \rightarrow \Phi_2(C,I) \rightarrow I \le I_C$

(2) $I_C \le I \rightarrow \Phi_3(C,I) \rightarrow C_I \le C$

Dôkaz. (1) ak $C \le C_I$, tak

$C(b, I(b,h)) \le C_I(b, I(b,h)) = \inf\{h' : I(b,h') \ge I(b,h)\} \le h.$

ak $C(b, I(b,h)) \le h$, tak

$I_C(b,h) = \sup\{r : C(b,r) \le h\} \ge I(b,h).$

(2) ak $I_C \le I$, tak

$I(b, C(b,r)) \ge I_C(b, C(b,r)) = \sup\{r' : C(b,r') \le C(b,r)\} \ge r.$

ak $I(b, C(b,r)) \ge r$, tak

$C_I(b,r) = \inf\{h : I(b,h) \ge r\} \le C(b,r).$ □

Tvrdenie 5. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

$[\equiv (\forall b,h,r)\ C(b,r) \le h \equiv r \le I(b,h)]$

(1) $C \le C_I$ & $I_C \le I$

(2) $\Phi_2(C,I)$ & $\Phi_3(C,I)$

(3) $C = C_I$ & $I = I_C$

Dôkaz. Podľa Tvrdenia 4 máme (1) → (2) a (1) ≡ (3)

Dokážeme (2) → (1). Predpokladajme $\Phi_2(C,I)$ & $\Phi_3(C,I)$.

a) Ukážeme, že $C \le C_I$. Nech $b, r \in [0,1]$ sú ľubovoľné.
$W = \{h : I(b,h) \ge r\}$. Pre každé $h \in W$ podľa Φ_2,
$C(b,r) \le C(b, I(b,h)) \le h$. Teda $C(b,r)$ je dolné ohraničenie
množiny W. Preto $C(b,r) \le \inf W = C_I(b,r)$.

b) Ukážeme, že $I_C \le I$. Nech b, h sú ľubovoľné,
$W = \{r : C(b,r) \le h\}$. Pre každé $r \in W$ podľa Φ_3,
$I(b,h) \ge I(b, C(b,r)) \ge r$ a teda $I(b,h) \ge \sup W = I_C(b,h)$.
□

L*

Tvrdenie 5 b

(1) $C \le C_I \equiv (\forall b,h,r)\big(I(b,h) \ge r \to C(b,r) \le h\big)$

(2) $I_C \le I \equiv (\forall b,h,r)\big(C(b,r) \le h \to I(b,h) \ge r\big)$

(3) $C \le C_I \;\&\; I_C \le I \equiv (\forall b,h,r)\big(I(b,h) \ge r \equiv C(b,r) \le h\big)$

(4) $C \le C_I \vee I_C \le I \equiv C = C_I \;\&\; I = I_C$.

Dôkaz. (1) (⇒): Ak $C \le C_I$ a $I(b,h) \ge r$, tak

$C(b,r) \le C_I(b,r) = \inf\{h' : I(b,h') \ge r\} \le h$.

(⇐): Predpokladajme, že implikácia na pravej strane ekvivalencie platí. Potom

$C_I(b,r) = \inf\{h : I(b,h) \ge r\} \ge \inf\{h : C(b,r) \le h\} = C(b,r)$.

(2) (⇒): Ak $I_C \le I$ a $C(b,r) \le h$, tak

$I(b,h) \ge I_C(b,h) = \sup\{r' : C(b,r') \le h\} \ge r$.

(⇐): Predpokladajme že implikácia na pravej strane platí.

Potom

$I_C(b,h) = \sup\{r : C(b,r) \le h\} \le \sup\{r : I(b,h) \ge r\} = I(b,h)$ □

(3) je dôsledok (1) a (2). ~~a Tvrdenia 4.~~ □

(4) je dôsledok Tvrdenia 4.

Tvrdenie 7.

(1) $C = C_{I_C} \equiv C$ je spojitá zľava v 2. argumente.

(2) $I = I_{C_I} \equiv I$ je spojitá sprava v 2. argumente.

Dôkaz (1) ($\Rightarrow$) Nech $C = C_{I_C}$ a $b, r \in [0,1]$. Ukážeme, že $\sup_{r'<r} C(b,r') = C(b,r)$. Nerovnosť $\le$ je dôsledkom monotónnosti. Ukážeme nerovnosť $\ge$. Označme $h_0 = \sup_{r'<r} C(b,r')$. Zrejme $I_C(b,h_0) = \sup\{r' : C(b,r') \le h_0\} \ge r$. Teda

$C(b,r) = C_{I_C}(b,r) = \inf\{h : I_C(b,h) \ge r\} \le h_0 = \sup_{r'<r} C(b,r')$.

($\Leftarrow$) Z monotónnosti a spojitosti funkcie C vyplýva, že

$\sup\{r' : C(b,r') \le h\} \ge r \equiv C(b,r) \le h$.

To znamená, že $I_C(b,h) \ge r \equiv C(b,r) \le h$. Preto

$C_{I_C}(b,r) = \inf\{h : I_C(b,h) \ge r\} = \inf\{h : C(b,r) \le h\} = C(b,r)$.

(2) ($\Rightarrow$) Nech $I = I_{C_I}$ a $b, h \in [0,1]$. Ukážeme, že $\inf_{h'>h} I(b,h') = I(b,h)$. Nerovnosť $\ge$ vyplýva z monotónnosti. Ukážeme $\le$. Označme $r_0 = \inf_{h' \ge h} I(b,h')$. Zrejme $C_I(b,r_0) = \inf\{h' : I(b,h') \le r_0\} \le h$. Teda

$I(b,h) = I_{C_I}(b,h) = \sup\{r : C_I(b,r) \le h\} \ge r_0 = \inf_{h' \ge h} I(b,h')$.

($\Leftarrow$) Z monotónnosti a spojitosti funkcie I vyplýva, že

$\inf\{h' : I(b,h') \ge r\} \le h \equiv I(b,h) \ge r$.

To znamená, že $C_I(b,r) \le h \equiv I(b,h) \ge r$.

Preto $I_{C_I}(b,h) = \sup\{r : C_I(b,r) \le h\} =$

$= \sup\{r : I(b,h) \ge r\} = I(b,h)$. □