Niekoľko poznámok k fuzzy logickému programovaniu

(Výňatok z prednášok Prof. RNDr. Petra Vojtáša, DrSc., september–december 2003)

Verzia 25. 1. 2004

Antimotto: *Ale vaša reč nech je „áno – áno“, „nie – nie“. Čo je navyše, pochádza od Zlého. (Mt 5, 37)*

1 Výrokový počet

1.1 Syntax výrokového počtu

Jazyk výrokového počtu $\mathfrak{L}$ je tvorený

- množinou elementárnych výrokov $\mathrm{EV} = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$.
- logickými spojkami (napr. &, ¬)
- pomocnými symbolmi (zátvorky, čiarka)

Vytvárajúca postupnosť výroku je postupnosť slov $A_0, A_1, \ldots, A_n$ nad jazykom výrokového počtu, kde pre každé slovo A_i:

- buď $A_i \in \mathrm{EV}$, teda slovo je elementárny výrok
- alebo existuje $n < i$ a slová $A_i, \ldots, A_n$ a n-árna spojka $s \in \mathfrak{L}$, že $A_i = s(A_1, \ldots, A_n)$.

Výrok. Slovo $A \in \mathfrak{L}$ sa nazýva *výrok*, ak existuje vytvárajúca postupnosť výroku $A_0, A_1, \ldots, A_n = A$.

Množina pravdivostných hodnôt je ľubovoľná množina $V \subseteq [0,1]$, kde $0 \in V$, $1 \in V$.

Príklad 1.1
Klasická logika: $V = \{0,1\}$, množina spojok je $\{\neg, \&\}$.

Pravdivostná funkcia. Každej n-árnej spojke $s \in \mathfrak{L}$ je priradená pravdivostná funkcia $s^\bullet : V^n \to V$.

1.2 Sémantika výrokového počtu

Interpretácia jazyka výrokového počtu je tvorená

- ľubovoľným zobrazením $v : \mathrm{EV} \to V$, v sa nazýva *ohodnotenie elementárnych výrokov*
- priradením, ktoré každej spojke $s \in \mathfrak{L}$ priradí pravdivostnú funkciu $s^\bullet$.

Rozšírenie ohodnotenia v. Každé ohodnotenie $v : \mathrm{EV} \to V$ možno rozšíriť na množinu všetkých výrokov $\mathrm{V{\scriptstyle YR}}$, t. j. $\bar{v} : \mathrm{V{\scriptstyle YR}} \to V$ nasledovne: pre každú spojku $s \in \mathfrak{L}$, ľubovoľné výroky $A_1, \ldots, A_n \in \mathrm{V{\scriptstyle YR}}$

$$\bar{v}(s(A_1, \ldots, A_n) = s^\bullet(\bar{v}(A_1), \ldots, \bar{v}(A_n)).$$

1.3 Pravdivostné funkcie a t-normy.

Príklady výrokových funkcií V klasickej logike bola možné priradiť každej spojke jedinú pravdivostnú funkciu. Vo fuzzy logike možno priradiť spojke ľubovoľnú „vhodnú“ funkciu, ktorá bude plniť úlohu pravdivostnej funkcie.

- Łukasiewicz:
$$\begin{aligned} \&^\bullet_{Ł}(x,y) &= \max(x+y-1, 0) \\ \longrightarrow^\bullet_{Ł}(x,y) &= \min(-x+y+1, 1) \end{aligned}$$
- Gödel
$$\begin{aligned} \&^\bullet_G(x,y) &= \min(x,y) \\ \longrightarrow^\bullet_G(x,y) &= \begin{cases} 1 & \text{ak } x \le y \\ y & \text{ak } x > y \end{cases} \end{aligned}$$
- produktové spojky:
$$\begin{aligned} \&^\bullet_P(x,y) &= a \cdot b \\ \longrightarrow^\bullet_P(x,y) &= \begin{cases} 1 & \text{ak } x \le y \\ \frac{b}{a} & \text{ak } a > b \end{cases} \end{aligned}$$
- negácia
$$\neg^\bullet(x) = 1 - x$$

t-normy. t-normou nazývame funkciu

$$t : [0,1] \times [0,1] \to [0,1],$$

ktorá spĺňa nasledovné podmienky:

- $t(1,1) = 1$, $t(0,1) = t(1,0) = t(0,0) = 0$,
- t je neklesajúca v oboch argumentoch,
- t je symetrická: $t(x,y) = t(y,x)$,
- $t(x,1) = t(1,x) = x$,
- t je asociatívna: $t(x, t(y,z)) = t(t(x,y), z)$.

Pravdivostné funkcie $\&^\bullet_{Ł}$, $\&^\bullet_G$, $\&^\bullet_P$ sú t-normy, platí $\&^\bullet_{Ł} \le \&^\bullet_G \le \&^\bullet_P$ a $\&^\bullet_G$ je najväčšia t-norma (pre každú t-normu T a pre každé $x, y \in [0,1]$ je $T(x,y) \le \&^\bullet_G(x,y)$).

1.4 Teórie a modely.

Teória vo výrokovom počte je ľubovoľné zobrazenie

$$T : \mathrm{V{\scriptstyle YR}} \to V.$$

(v klasickom výrokovom počte je to množina formulí jazyka výrokového počtu).
Čiže

$$T = \{\langle\varphi_0, v_0\rangle, \ldots, \langle\varphi_n, v_n\rangle, \ldots\},$$

kde $\varphi_i \in \mathrm{V{\scriptstyle YR}}$, $v_i \in V \subseteq [0,1]$.

Axiómou teórie T sa nazýva usporiadaná dvojica $\langle\varphi, x\rangle \in Vyr \times V$, ak platí $T(\varphi) = x$.

Model teórie T je ľubovoľné ohodnotenie $v : \mathrm{EV} \to V$, pre ktoré:

$$\text{pre každé } \varphi \in T : \bar{v}(\varphi) \ge T(\varphi)$$

(v klasickom VP: ľubovoľné zobrazenie $v : \mathrm{EV} \to \{0,1\}$, že $\bar{v}(\varphi) = 1$)

1.5 Modus ponens

Nech $I : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ je pravdivostná funkcia spojky $\longrightarrow_I$ a nech $C : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$. Hovoríme, že

$$\frac{(B,b), (B \longrightarrow_I H, r)}{(H, C(b,r))}$$

(pravidlo modus ponens) je korektné odvodzovacie pravidlo, ak pre každý model v teórie $T = \{(B,b), (B \longrightarrow_I, r)\}$ a pre ľubovoľné výroky B, H platí: $\bar{v}(H) \ge C(b,r)$.

Reziduovanosť. Nech $C, I : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, pričom C je konjunktor, I je implikátor, oba rozširujú dvojhodnotovú konjunkciu, resp. implikáciu. Nech $b_1 \le b_2$, $h_1 \le h_2$, $r_1 \le r_2$. Potom

- $C(b_1, r_1) \le C(b_2, r_2)$ (C neklesá v oboch argumentoch)
- $I(b_2, h_1) \le I(b_1, h_2)$ (I nerastie v 1. a neklesá v 2. argumente a prevracia poradie premenných)

Povieme, že funkcie C a I sú *reziduované*, ak

$$r \le I(b,h) \quad \text{akk} \quad C(b,r) \le h$$

(mnemotechnická pomôcka: b je pravdivostná hodnota tela (*body*), h hodnota hlavy pravidla (*head*), r hodnota po aplikácii pravidla (*rule*). $I(b,h)$ je dolný odhad pravdivostnej hodnoty pravidla)

Korektnosť modus ponens. Nech C a I sú reziduované, $\longrightarrow^\bullet_I = I$, $v : \mathrm{EV} \to [0,1]$ je modelom teórie $T = \{(B,b), (B \longrightarrow_I, r)\}$. Potom $v(H) \ge C(b,r)$.
Dôkaz.
Z definície modelu teórie T:

$$\bar{v}(B \to H) \ge r$$

Ľavá strana je ale rovná:

$$\longrightarrow^\bullet_I (v(B), v(H)) = I(v(B), v(H)) \ge r$$

Máme teda $I(v(B), v(h)) \ge r$. Z predpokladu reziduovanosti je to ekvivalentné

$$C(v(B), r) \le v(H)$$

Teraz využijeme monotónnosť konjunktora a predpoklad, že $v(B) \ge b$:

$$C(b,r) \le C(v(B), r) \le v(H),$$

čiže $C(b,r) \le v(H)$. □

2 Fuzzy logické programovanie

2.1 Základné definície

Definícia 2.1
Fuzzy logický program je zobrazenie

$$P : \mathrm{V{\scriptstyle YR}} \to [0,1]$$

také, že $P^{-1}((0,1])$ je klasický logický program vo výrokovom počte

Poznámka 2.2
„Klasický“ logický program v dvojhodnotovom výrokovom počte je teória výrokového počtu obsahujúca

- atomárne formuly
- pravidlá tvaru $H \leftarrow B_1 \,\&\, B_2 \,\&\, \ldots \,\&\, B_n$

Tu sme vo výrokovom počte, čiže v pravidlá vôbec nie sú funkčné ani predikátové symboly!

Príklad 2.3
Ak $p \in \mathrm{EV}$, potom $\langle p, x\rangle \in P$, kde x je stupeň pravdivosti. Inak povedané máme usporiadanú dvojicu $\langle p, P(p)\rangle$,
Napr. $\langle$skúška(JankoHraško, DZS, A), 0, 1$\rangle$.

Definícia 2.4 (správna odpoveď)
Nech P je fuzzy logický program a $q \in \mathrm{EV}$ (query) je otázka. Potom $x \in [0,1]$ sa nazýva *správna odpoveď*, ak pre každé $I : \mathrm{EV} \to [0,1]$ platí:

$$\text{ak } I \models P, \text{ potom } I(q) \ge x.$$

Poznámka 2.5

- Inak povedané, číslo $x \in [0,1]$ (pravdivostná hodnota) je správna odpoveď, ak pre každý model (interpretáciu) I fuzzy logického programu P je stupeň pravdivosti otázky v tomto modeli aspoň x.

  Pripomeňme, že $v \models T$ (v je modelom teórie T (tu fuzzy logického programu P)) podľa definície, ak

  $$v \models T \text{ akk pre každú } \varphi \in T : \bar{v}(\varphi) \ge T(\varphi)$$

- všimnime si, že ak x je správna odpoveď a $y < x$, potom aj y je správna odpoveď. Nulová odpoveď je vždy správna, ale v skutočnosti „nič nehovorí“. Radi by sme chceli nájsť najlepšiu možnú správnu odpoveď a nájsť

  $$\sup\{I(q) : I \models P\}$$

Definícia 2.6 (výpočtový krok)
Nech $? - q_0, q_1, \ldots, q_n$ je množina otázok ($q_i \in \mathrm{EV}$) a q_j je vybraný atóm a $q_j \leftarrow B$ je pravidlo také, že $P(q_j \leftarrow B) > 0$. Potom výpočtový krok z otázky $? - q_0, \ldots, q_n$ s použitím pravidla $q_j \leftarrow \mathbb{B}$ dáva novú otázku

$$? - q_0, \ldots, q_{j-1}, C_{\to}(\mathbb{B}, P(q_j \leftarrow B)), q_j + 1, \ldots, q_n,$$

pričom $\mathbb{B}$ (telo – *body*) je výrok tvaru $@(r_1, \ldots, r_k)$, kde $@$ je monotónny agregačný operátor.

Definícia 2.7 (vypočítaná odpoveď)
Číslo $y \in [0,1]$ sa nazýva *vypočítaná odpoveď* na otázku q vzhľadom k fuzzy logickému programu P, ak existuje postupnosť $q_0, q_1, \dots, q_n$ (nazývaná *výpočet*) taká, že

- $q_0 = q$ (pripomeňme, že $q \in EV$),
- $q_i \rightarrow q_{i+1}$ je výpočtový krok,
- q_n neobsahuje žiadne elementárne výroky a
- y je hodnota výrazu q_n

2.2 Korektnosť fuzzy logického programovania

Veta 2.8 (korektnosť fuzzy logického programovania)
Nech P je fuzzy logický program a q je otázka a x je vypočítaná odpoveď. Potom x je správna odpoveď.

Dôkaz.
Indukciou stačí ukázať, že tvrdenie platí pre výpočtový krok $\langle q \leftarrow @(r_1, \dots, r_k), r\rangle$. Majme v niektorom kroku pravidlo $H \leftarrow @(B_1, \dots, B_n)$. Nová otázka podľa výpočtového kroku bude:

$$C_{\longrightarrow}(@(B_1, \dots, B_n), P(q \leftarrow B_1, \dots, B_n)).$$

Z indukčného predpokladu, ak $\mathfrak{I} \models P$, potom $\mathfrak{I}(B_i) \geq b_i$ a budeme mať

$$C_{\longrightarrow}(@^{\bullet}(b_1, \dots, b_n), x) \leq C_{\longrightarrow}(@^{\bullet}(\mathfrak{I}(B_1), \dots, \mathfrak{I}(B_n)), x) \leq h$$

čo vyplýva z korektnosti modus ponens. □
Spejeme k dôkazu úplnosti fuzzy logického programovania.

2.3 Zväzy

Definícia 2.9 (zväz)
Algebraický *zväz* (*lattice*) je množina $\langle$ s operáciami $\wedge$ (priesek), $\vee$ (zjednotenie), nulovým prvkom 0, jednotkovým prvkom 1 a reláciu čiastočného usporiadania $\leq$, kde:

- operácie $\wedge$, $\vee$ sú asociatívne a komutatívne
- pre prvok $a \in L$ platí:
  - $a \wedge 0 = 0, \quad a \vee 0 = a$
  - $a \wedge 1 = a, \quad a \vee 1 = 1$
- $x \leq y$ akk $x \wedge y = x$

Definícia 2.10

- Čiastočné usporiadaná množina L sa nazýva *úplný zväz*, ak každá neprázdna podmnožina množiny L má supremum (a infimum).
- Najväčší prvok takéhoto zväzu je 1, najmenším prvok je 0.
- Nech $T : L \rightarrow L$ je operátor nad zväzom L. Hovoríme, že operátor T je monotónny, ak pre $x, y \in L$ platí:

$$x \leq y \text{ potom } T(x) \leq T(y)$$

- množina $X \subseteq L$ sa nazýva *nahor usmernená*, ak pre každý $x, y \in X$ existuje $z \in X$ také, že $x \leq z$ a súčasne $y \leq z$.

$$(\forall x, y \in X \subseteq L)(\exists\, z \in L) x \leq z \wedge y \leq z.$$

- Povieme, že operátor T je *spojitý*, ak pre každú nahor usmernenú neprázdnu podmnožinu zväzu $\emptyset \neq X \subseteq L$ platí:

$$T(\sup X) = \sup\{T(x) : x \in X\}$$

- prvok $x \in L$ sa nazýva *pevný bod zobrazenia* T, ak $T(x) = x$.
- najmenší pevný bod zobrazenia $T : L \rightarrow L$ budeme označovať $\mathrm{mfp}(T)$.

Veta 2.11 (Tarski, o fixpointe)
Nech L je nahor usmernená množina, $T : L \rightarrow L$ je monotónny operátor. Potom existuje $x \in L$ také, že

$$T(x) = x.$$

Naviac, x je $\mathrm{mfp}(T)$.

Dôkaz.
Nech $A = \{x \in X : T(x) \leq x\}$.

- Zrejme $1 \in A$, pretože $T(1) \leq 1$ (1 je totiž podľa definície najväčší prvok zväzu L). Teda $A \neq \emptyset$.
- Vezmime $a = \inf A$, teda a je najväčšie dolné ohraničenie množiny A. Platí teda, že $(\forall x \in A) a \leq x$. Operátor T je z predpokladu monotónny, teda $(\forall x \in A) T(a) \leq T(x)$. Ďalej bolo povedané, že $x \in A$, to znamená, že $T(x) \leq x$. Spolu zatiaľ máme, že

$$(\forall x \in A) T(a) \leq T(x) \leq x.$$

Táto nerovnosť nám vlastne hovorí, že $T(a)$ je tiež dolným ohraničením množiny A. Máme teda už dve dolné ohraničenia: $a = \inf A$ a $T(a)$. Lenže z definície infima platí, že a je najväčšie dolné ohraničenie, a teda

$$a \geq T(a). \tag{1}$$

Aplikujme operátor T na poslednú nerovnosť a máme

$$T(a) \leq T(T(a)).$$

Podľa toho však vidno, že $T(a)$ spĺňa požiadavky množiny A a teda $T(a) \in A$.
Vezmime zase $a = \inf A$. To je dolným ohraničením všetkých prvkov množiny A a teda je menšie aj ako prvok $T(a)$, čiže

$$a \leq T(a). \tag{2}$$

Z nerovností 1 a 2 sme získali rovnosť $a = T(a)$, a teda $T(a) = a \in A$ a teda $a = \inf A = \min A$ a a je fixpoint operátora T.
Máme teda $a = \inf x \in X : T(x) \leq x = \inf A = \min A = T(a)$

□

2.4 Úplnosť fuzzy logického programovania

Definícia 2.12
Majme zväz $\mathbb{I}$ všetkých interpretácií jazyka $\mathfrak{J}$ s nasledovným čiastočným usporiadaním $\leq$:

- $\mathbb{I} = \{v : \mathrm{EV} \rightarrow [0,1]\} = {}^{\mathrm{EV}}[0,1]$, teda množina zobrazení z $[0,1]$ do EV.
- majme dve interpretácie $I, I' \in \mathbb{I}$. Potom

$$I \leq I' \text{ akk pre každé } p \in \mathrm{EV} : I(p) \leq I'(p).$$

Definícia 2.13
Majme daný fuzzy logický program $P : \textsc{Vyr} \rightarrow [0,1]$. Definujeme produkčný (DB) operátor $T_P : {}^{\mathrm{EV}}[0,1] \rightarrow {}^{\mathrm{EV}}[0,1]$ nasledovne:

$$\begin{aligned} T_p(I)(q) \;=\; & \max\big\{\sup\{C_{\rightarrow}(@^{\bullet}(I(B_1), \dots, I(B_n)), r) : \\ & \text{ex. } P(q \leftarrow @(B_1, \dots, B_n)) = r\}, P(q)\big\} \end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned} T_p(I)(q) \;=\; & \max\big\{\sup\{C_{\rightarrow}(\bar{I}(\mathbf{B}), P(q \leftarrow \mathbf{B})) \\ & \text{pre } (A \leftarrow \mathbf{B}) \in \mathrm{dom}(P)\}, P(q)\big\}, \end{aligned}$$

kde $\mathbf{B} = (B_1, \dots, B_n)$.

Tvrdenie 2.14
Predpokladajme, že všetky spojky v telách pravidiel majú spojité pravdivostné funkcie. Potom

- *T_P je monotónny*
- *T_P je spojitý*
- *$\mathfrak{I} \models P$ akk $T_P(\mathfrak{I}) \leq \mathfrak{I}$, t. j. $\mathfrak{I} = \mathrm{mfp}(T)$.*

Dôkaz.

- monotónnosť sa dokáže podľa definície T_P a využitím monotónnosti pravdivostných funkcií a agregačných operátorov
- spojitosť T_P znamená, že

$$T_P(\sup \mathbb{I}) = \sup\{T(\mathfrak{I}) : \mathfrak{I} \in \mathbb{I}\} -$$

Dokážeme ale, že

$$(\forall \varepsilon > 0)\, (\exists I \in \mathbb{I})\, T_P(\sup \mathbb{I}) - T_P(I) < \varepsilon,$$

resp.

$$(\forall \varepsilon > 0)\, (\exists I \in \mathbb{I})\, T_P(\sup \mathbb{I}) - \varepsilon < T_P(I).$$

Využije sa opäť spojitosť zľava pravdivostných funkcií a agregačných operátorov.

- pri dôkaze sa využije definícia T_P, monotónnosť $C_{\longrightarrow}$, reziduovanosť a korektnosť modus ponens.

□

Definícia 2.15
Pre $T_P : L \rightarrow L$ definujeme

- $T_P^0(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$
- $T_P^{n+1}(\mathbf{0}) = T_P(T_P^n(\mathbf{0}))$
  a
- $T_P^{\omega}(\mathbf{0}) = \sup\{T_P^n(\mathbf{0}) : n \in \omega\}$,

kde $\mathbf{0}$ je najmenší prvok zväzu interpretácií $\mathbb{I}$.

Tvrdenie 2.16
Majme spojitý T_P operátor. Potom

$$\mathrm{mfp}(T_P) = T_P^{\omega} = \sup\{T_P^n(\mathbf{0}) : n \in \omega\}.$$

Dôkaz.
Z monotónnosti T_P vyplýva, že $T_P(\mathbf{0}) \geq \mathbf{0}$, a indukciou sa ľahko dokáže, že

$$T_P^n(\mathbf{0}) \leq T_P(T_P^n(\mathbf{0})) = T_P^{n+1}(\mathbf{0})$$

pre každé $n \geq 0$.
Množina $X = \{T_P^n(\mathbf{0}) : n \geq 0\}$ je nahor usmernená a zo spojitosti zobrazenia T_P máme rovnosť $T_P(\sup X) = \sup \underbrace{\{T_P^{n+1}(\mathbf{0}) : n \in \omega\}}_{X} = \sup X$. To znamená, že $\sup X$ je pevný bod.
Ukážeme, že je to najmenší pevný bod zobrazenia T_P. Nech x je ľubovoľný pevný bod zobrazenia T_P. Keďže $0 \leq x$, indukciou sa ľahko dokáže, že $T_P^n(\mathbf{0}) \leq x$, t.j. x je horné ohraničenie množiny X. Preto $\sup X \leq x$. □
Máme teda, že T_P^{ω} je najmenším (v zmysle usporiadania na zväze) fuzzy modelom programu P.

Veta 2.17 (aproximatívna úplnosť fuzzy LP)
Nech P je fuzzy logický program, q otázka a y správna odpoveď na otázku q vzhľadom k programu P. Potom pre každé $\varepsilon > 0$ existuje vypočítaná odpoveď x na otázku q vzhľadom k programu P, že $x > y - \varepsilon$.

Literatúra

- *Deduktívne a znalostné systémy* – poznámky z prednášok Prof. RNDr. Petra Vojtáša, DrSc., sept.–dec. 2003
- *Deduktívne a znalostné systémy* – poznámky z prednášok Prof. RNDr. Petra Vojtáša, DrSc., sept.–dec. 2002
- Peter Vojtáš – *Fuzzy logické programovanie*, KMI PF UPJŠ, 1998
- Peter Vojtáš – *Fuzzy Logic Programming* In: Fuzzy Sets and Systems, 1998