

Pravdepodobnosť a štatistika

(poznámky z prednášok zimného semestra)
(predmetu Pravdepodobnosť a štatistika)

prednáša: RNDr. Valéria Skřivánková, CSc.

Obsah

1	Axiomatika v teórii pravdepodobnosti	3
1.1	Náhodné javy a operácie s javmi	3
1.2	Pravdepodobnosť a jej rôzne definície	5
1.3	Vlastnosti pravdepodobnosti	6
1.4	Podmienená pravdepodobnosť	10
1.5	Postupnosť javov a jej limita	11
2	Náhodné veličiny	14
2.1	Indukovaný pravdepodobnostný priestor	14
2.2	Distribučná funkcia a jej vlastnosti	15
2.3	Diskrétna a absolútne spojité rozdelenie	18
2.4	Charakteristika náhodných veličín	19
2.4.1	Momentové charakteristiky	20
2.4.2	Kvantilové charakteristiky	27
2.5	Charakteristická funkcia	30

Literatúra

- [1] Riečan a kol.: Pravdepodobnosť a matematická štatistika, Bratislava 1984
- [2] Potocký a kol.: Zbierka úloh z pravdepodobnosti a matematickej štatistiky, Bratislava 1986
- [3] Skřivánková: Pravdepodobnosť v príkladoch, Košice 1999
- [4] Anděl: Matematika náhody, Praha 2000

Tento materiál pokrýva prvé dve kapitoly látky zo zimného semestra predmetu Pravdepodobnosť a štatistika, ktorý prednáša RNDr. Valéria Skřivánková na Prírodovedeckej fakulte UPJŠ v Košiciach. Jeho obsahom sú definície, vety a dôkazy, ktoré odzneli na prednáškach v akademickom roku 2002/2003. Text nebol autorizovaný a môže obsahovať chyby, či preklepy (budem však rád, keď ich oznámite na adrese novotnyr@skmi.science.upjs.sk). Na tento materiál sa nevzťahuje žiadna záruka.

Dôležité vety a tvrdenia

• Veta:	o monotónnosti pravdepodobnosti	7
• Veta:	o poloaditívnosti pravdepodobnosti	7
• Veta:	o sčítaní pravdepodobnosti	8
• Veta:	o násobení pravdepodobnosti	10
• Veta:	o úplnej pravdepodobnosti	10
• Veta:	Bayesova	11
• Veta:	o spojitosti pravdepodobnosti	12
• Veta:	základné vlastnosti distribučnej funkcie	15
• Lemma:	veta o prenose integrácie	21
• Veta:	vlastnosti $E(\mathbb{X})$	22
• Veta:	o vlastnostiach disperzie	22
• Veta:	Čebyševova	23
• Veta:	vlastnosti kvantilov	27
• Veta:	vlastnosti $\varphi_{\mathbb{X}}$	31
• Veta:	vzťah medzi $\varphi_{\mathbb{X}}(t)$ a m_k	31
• Lemma:	Leviho veta	32

Zoznam definícií

• Definícia: nastatie javu	3
• Definícia: jav istý, jav nemožný	3
• Definícia: relácie medzi javmi	3
• Definícia: operácie s javmi	3
• Definícia: nezlučiteľné a navzájom nezlučiteľné javy	4
• Definícia: rozklad Ω	4
• Definícia: axiomatická definícia javového poľa	4
• Definícia: diskretný a spojitý výberový priestor	5
• Definícia: rovnomerné rozdelenie	5
• Definícia: klasická definícia pravdepodobnosti	5
• Definícia: geometrická definícia pravdepodobnosti	6
• Definícia: axiomatická definícia pravdepodobnosti	6
• Definícia: pravdepodobnostný priestor	6
• Definícia: nezávislé a totálne nezávislé javy	8
• Definícia: podmienená pravdepodobnosť	10
• Definícia: monotónnosť postupnosti javov	12
• Definícia: limita postupnosti javov	12
• Definícia: náhodná veličina	14
• Definícia: zákon rozdelenia	14
• Definícia: indukovaný pravdepodobnostný priestor	14
• Definícia: distribučná funkcia	15
• Definícia: diskkrétne rozdelenie, normovacia podmienka	18
• Definícia: absolútne spojité rozdelenie, hustota rozdelenia	19
• Definícia: trieda L^k	20
• Definícia: počiatkový moment k -teho rádu	20
• Definícia: stredná hodnota	20
• Definícia: centrálny moment k -teho rádu	20
• Definícia: disperzia	21
• Definícia: normovaný moment k -teho rádu	21
• Definícia: koeficient šikmosti	21
• Definícia: špicatosť rozdelenia	21
• Definícia: kvantilová funkcia	27
• Definícia: medián	28
• Definícia: kvartilová odchýlka	28
• Definícia: modus	29
• Definícia: charakteristická funkcia	30

1 Axiomatika v teórii pravdepodobnosti

1.1 Náhodné javy a operácie s javmi

Historický vznik pravdepodobnosti:

- 1654 – Pascal, Fermat – klasická definícia pravdepodobnosti (kombinatorická)
- 1777 – Buffon – geometrická definícia pravdepodobnosti
- 1900 – Hilbertove problémy – nie všetky úlohy sa dajú riešiť pomocou kombinatorickej alebo geometrickej pravdepodobnosti.
- 1933 – Kolmogorov – axiomatická definícia pravdepodobnosti

Náhodný jav – pokus, ktorého výsledky nie sú deterministicky dané; ktorý má viac rôznych, navzájom sa vylučujúcich výsledkov.

Elementárny jav – ω (omega) – každý možný výsledok náhodného pokusu.

Napr. hod kockou: ω_1 znamená, že padla 1, $\omega_2, \dots, \omega_6$.
hod mincou: ω_R ak padol rub, ω_L , ak padlo líce

Výberový priestor – Ω – množina všetkých možných výsledkov pokusu.

Napr. hod kockou: $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_6\}$

Náhodný jav – ozn. A, B , resp. A_1, A_2, \dots – ľubovoľná podmnožina výberového priestoru Ω .

Napr.: označme jav A jav, keď padne pri hode kockou párne číslo. Zrejme $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$.

Definícia 1.1 (nastatie javu)

Hovoríme, že *nastal jav* A , ak vo výsledku náhodného pokusu bol vybratý prvok $\omega \in A$.

Hovoríme, že jav A *nenastal* (resp. nastal jav *opačný* k javu A), ak vybratý prvok $\omega \notin A$. Označujeme A^c .

$$A^c = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$$

Definícia 1.2 (jav istý, jav nemožný)

Množina všetkých elementárnych javov sa nazýva *jav istý*. Označujeme Ω .

Množina, ktorá neobsahuje žiaden elementárny jav sa nazýva *jav nemožný*. Označujeme \emptyset .

Zrejme platí:

$$\emptyset = \Omega^c$$

Definícia 1.3 (relácie medzi javmi)

Hovoríme, že jav A *má za následok* jav B , ak nastanie javu A znamená aj nastanie javu B .

$$A \subset B$$

Hovoríme, že javy A, B sú ekvivalentné (ozn. $A = B$), ak A má za následok B a B má za následok A .

$$A \subset B \wedge B \subset A$$

Definícia 1.4 (operácie s javmi)

Zjednotenie javov A, B je jav $A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \vee \omega \in B\}$.

Prienik javov A, B je jav $A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \wedge \omega \in B\}$.

Rozdiel javov A, B je jav $A - B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \wedge \omega \notin B\} = A \cap B^c$.

Vzhľadom na to, že javy sa definujú ako množiny, platia nasledovné vlastnosti:

1. $A \cup A^c = \Omega$
2. $A \cap A^c = \emptyset$
3. $A \cup \Omega = \Omega$

$$A \cap \Omega = A$$

$$4. A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$5. (A^c)^c = A$$

Ďalej platia nasledovné pravidlá:

- | | |
|--------------------------|--|
| 1. komutatívny zákon | $A \cup B = B \cup A$
$A \cap B = B \cap A$ |
| 2. asociatívny zákon | $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ |
| 3. distributívny zákon | $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ |
| 4. De Morganove pravidlo | $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ |

Definícia 1.5 (nezlučiteľné a navzájom nezlučiteľné javy)

Hovoríme, že javy A, B sú *nezlučiteľné*, ak platí, že $A \cap B = \emptyset$. Hovoríme, že javy A_1, \dots sú *navzájom nezlučiteľné*, ak

$$\forall i, j : i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset.$$

Definícia 1.6 (rozklad Ω)

Hovoríme, že javy $A_i, i = 1, 2, \dots$ tvoria *rozklad výberového priestoru* Ω , ak tvoria úplný systém nezlučiteľných javov:

- $\bigcup_i A_i = \Omega$
- $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$

Definícia 1.7 (axiomatická definícia javového poľa)

Neprázdny systém \mathcal{A} podmnožín výberového priestoru Ω , ktorý obsahuje ako prvok Ω a je uzavretý vzhľadom na komplement a spočítateľné zjednotenie, sa nazýva *javové pole nad výberovým priestorom* Ω .

T.j. \mathcal{A} je javové pole, ak spĺňa nasledovné 3 axiomy:

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$
- $A_i \in \mathcal{A}$ pre $i = 1, 2, \dots \Rightarrow \bigcup_i A_i \in \mathcal{A}$

Dôsledok 1.1

Javové pole \mathcal{A} v zmysle definície 1.7 je uzavreté aj na prienik a rozdiel.

Dôkaz:

- uzavretosť \mathcal{A} na prienik. Overme, či platí $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \cap B \in \mathcal{A}$.
Nech $A, B \in \mathcal{A} \xrightarrow{\text{ax.2}} A^c, B^c \in \mathcal{A} \xrightarrow{\text{ax.3}} A^c \cup B^c \in \mathcal{A} \xrightarrow{\text{de Morg.}} (A \cap B)^c \in \mathcal{A} \xrightarrow{\text{ax.2}} A \cap B \in \mathcal{A}$.
- uzavretosť \mathcal{A} na rozdiel. Overme, či $\forall A, B \in \mathcal{A} : A - B \in \mathcal{A}$.
Nech $A, B \in \mathcal{A} \xrightarrow{\text{ax.2}} A \cap B^c \in \mathcal{A} \Rightarrow A - B \in \mathcal{A}$. □

Nech $f(x) = e^{-x}$, pre $x > 0$. Vypočítajte $\varphi(t)$ a z nej $E(\mathbb{X})$ a $D(\mathbb{X})$ ¹⁵.

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= E(e^{it\mathbb{X}}) \stackrel{\text{spoj}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \cdot f(x) dx = \int_0^{\infty} e^{itx} \cdot e^{-x} dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{x(it-1)} dx \stackrel{(it-1)}{=} \alpha \left[\frac{e^{x(it-1)}}{it-1} \right]_0^{\infty} = \\ &= \frac{1}{it-1} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} e^{itx} \cdot e^{-x} - e^0 \end{aligned}$$

Teraz uvažujme chvilu nad touto limitou. $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{itx}$ neexistuje. Ale v poznámke 2.28 sme si rozpisali e^{itx} pomocou funkcií sínus a kosinus. Tieto funkcie nemajú pre $x \rightarrow \infty$ limitu, ale zato sú ohraničené. Ďalej $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$. Využijeme vetu z matematickej analýzy o limite súčinu ohraničenej funkcie a funkcie, ktorej limita je 0. Teda

$$\frac{1}{it-1} \lim_{x \rightarrow \infty} e^{itx} \cdot e^{-x} = \frac{1}{it-1}$$

Aby sme sa zbavili komplexného čísla v menovateli, rozšírime posledný člen komplexne združeným číslom $-it + 1$, čím získavame

$$\frac{1+it}{1+t^2} = \varphi(t)$$

Vypočítajme teraz derivácie charakteristickej funkcie:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= [(1-it)^{-1}]' = i(1-it)^{-2}, \quad \varphi'(0) = i \cdot 1 = i \cdot m_1 \Rightarrow m_1 = E(\mathbb{X}) = 1 \\ \varphi''(t) &= 2i^2(1-it)^{-3}, \quad \varphi''(0) = i^2 \cdot 2 = i^2 \cdot m_2 \Rightarrow m_2 = E(\mathbb{X}^2) = 2 \end{aligned}$$

Všimnime si, že pri rátaní k -tej derivácie v bode 0 sa značíme z výsledného tvaru derivácie vňať i^k , aby sme v ňom ľahko mohli vidieť m_k .

Z m_1 a m_2 môžeme vyrátať $D(\mathbb{X}) = m_2 - m_1^2 = 2 - 1^2 = 1$.

Príklad 2.33

Majme danú diskretnú náhodnú veličinu \mathbb{X} , kde $p_k = (1/2)^k$ pre $k = 1, 2, \dots$. Vypočítajte $\varphi(t)$ a z nej $E(\mathbb{X})$, $D(\mathbb{X})$.

Riešenie:

Určme najprv charakteristickú funkciu:

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itk} \cdot (1/2)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}e^{it}\right)^k$$

Aby sme mohli využiť vzorec pre výpočet súčtu geometrického radu, musíme overiť, či $|q| < 1$. V našom prípade je $q = (1/2)e^{it}$. To však spĺňa požiadavky, lebo e^{it} je rovné 1 (dá sa to overiť modifikáciou poznámky 2.28). Po vynásobení $1/2$ máme zaručené, že je to menšie ako 1. Preto podľa vzorca máme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}e^{it}\right)^k = \frac{\frac{1}{2}e^{it}}{1 - \frac{1}{2}e^{it}} = \frac{e^{it}}{2 - e^{it}} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Prvá derivácia charakteristickej funkcie bude

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \frac{ie^{it}(2 - e^{it}) + e^{it}(ie^{it})}{(2 - e^{it})^2} = 2i \frac{e^{it}}{(2 - e^{it})^2}, \quad \varphi'(0) = i \cdot 2 = i \cdot m_1 \Rightarrow E(\mathbb{X}) = 2 \\ \varphi''(t) &= \frac{2ie^{it}(2 - e^{it})^2 + e^{it}(2 \cdot ie^{it})}{(2 - e^{it})^3}, \quad \varphi''(0) = i^2 \cdot 2 \cdot (1+3) = i^2 \cdot 6 \Rightarrow m_2 = E(\mathbb{X}^2) = 6 \\ D(\mathbb{X}) &= m_2 - m_1^2 = 6 - 2^2 = 2 \end{aligned}$$

¹⁵teda $E(\mathbb{X})$ a $D(\mathbb{X})$ sa nesmú vyrátať pomocou ich definície...

Dôkaz: Rozvinieme funkciu $e^{it\mathbb{X}}$ do Taylorovho radu¹⁴ v okolí bodu $t = 0$.

$$\begin{aligned} e^{it\mathbb{X}} &= 1 + \frac{it\mathbb{X}}{1!} + \frac{(it\mathbb{X})^2}{2!} + \dots + \frac{(it\mathbb{X})^n}{n!} + R_{n+1}(\mathbb{X}^{n+1}, \dots) \\ \varphi_{\mathbb{X}}(t) = E(e^{it\mathbb{X}}) &= E\left(1 + \frac{it\mathbb{X}}{1!} + \frac{(it\mathbb{X})^2}{2!} + \dots + \frac{(it\mathbb{X})^n}{n!} + R_{n+1}(\mathbb{X}^{n+1}, \dots)\right) \\ &= E(1) + itE(\mathbb{X}) + \frac{i^2 t^2}{2!} E(\mathbb{X}^2) + \dots + \frac{i^n t^n}{n!} E(\mathbb{X}^n) + R_{n+1}^*(t^{n+1}, E(\mathbb{X}^{n+1}), \dots) \end{aligned}$$

Vypočítajme teraz prvú deriváciu funkcie $\varphi_{\mathbb{X}}(t)$:

$$\begin{aligned} \varphi'_{\mathbb{X}}(t) &= iE(\mathbb{X}) + i^2 t E(\mathbb{X}^2) + \dots + \frac{i^n}{(n-1)!} t^{n-1} E(\mathbb{X}^n) + R_{n+1}^{**}((n+1)t^n, E(\mathbb{X}), \dots) \\ \varphi'_{\mathbb{X}}(0) &= iE(\mathbb{X}) = i \cdot m_1 \end{aligned}$$

Podobne vypočítame druhú deriváciu – ako deriváciu prvej derivácie

$$\begin{aligned} \varphi''_{\mathbb{X}}(t) &= i^2 E(\mathbb{X}^2) + i^3 t E(\mathbb{X}^3) + \dots + \frac{i^n}{(n-2)!} t^{n-2} E(\mathbb{X}^n) + R_{n+1}^{***}(t^{n-1}, \dots) \\ \varphi''_{\mathbb{X}}(0) &= i^2 E(\mathbb{X}^2) = i^2 m_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Takto rátame ďalej, kým nenájdeme všeobecný tvar pre n -tú deriváciu.

Predpoklad $\mathbb{X} \in L^{n+1}$ je dôležitý, pretože iba tak máme zaručenú existenciu počiatočných momentov k -teho rádu $E(\mathbb{X}), E(\mathbb{X}^2), \dots, E(\mathbb{X}^{n+1})$ potrebných v deriváciách. \square

Poznámka 2.29

Metóda charakteristických funkcií je založená na tvrdení, že medzi distribučnou funkciou $F_{\mathbb{X}}(x)$ a charakteristickou funkciou $\varphi_{\mathbb{X}}(t)$ existuje jedno-jednoznačný vzťah.

Lemma 2.30 (Leviho veta)

Nech $F(x)$ je distribučnou funkciou náhodnej veličiny \mathbb{X} . Nech body $x \pm h$ sú bodmi nespojitosti funkcie $F(x)$ (pričom $h > 0$ je malé kladné reálne číslo). Nech $\varphi_{\mathbb{X}}(t)$ je charakteristickou funkciou náhodnej veličiny \mathbb{X} . Potom platí:

$$F(x+h) - F(x-h) = \frac{1}{\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{\sinh t}{t} \cdot e^{-itx} \cdot \varphi_{\mathbb{X}}(t) dt$$

Dôkaz: bez dôkazu \square

Dôsledok 2.31

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi(t) dt$$

Príklad 2.32

¹⁴Rozvoj funkcie e^x do Taylorovho radu je

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x^{n+1})$$

kde R_{n+1} je zvyšok – funkcia premennej x^n

1.2 Pravdepodobnosť a jej rôzne definície

Z historického hľadiska – prvé matematické definície pravdepodobnosti:

1. klasická – 17. stor. – Pascal, Fermat
2. geometrická – 18. stor. – Buffon
3. axiomatická – 20. stor. – Kolmogorov

Prvé dva prípady sú v podstate špeciálnym prípadom axiomatickej definície pravdepodobnosti. Zároveň majú klasická a geometrická „definícia“ obmedzenú pravdepodobnosť, dajú sa použiť len za istých podmienok:

1. typ výberového priestoru
 - diskrétny
 - spojité
2. typ rozdelenia možností na výberovom priestore Ω
 - rovnomerné
 - nerovnomerné

Definícia 1.8 (diskrétny a spojité výberový priestor)

Výberový priestor Ω sa nazýva *diskrétny*, ak pozostáva z konečného alebo spočítateľného počtu elementárnych javov. V opačnom prípade hovoríme, že výberový priestor Ω je *spojitý*.

Príklad 1.2

- diskrétny Ω – hod kockou, mincou, výber kariet
- spojité Ω – sledovanie hladiny rieky, výber čísla z intervalu $(0, 1)$.

Definícia 1.9 (rovnomerné rozdelenie)

• *Rovnomerné rozdelenie* možností na diskretnom výberovom priestore Ω s konečným počtom prvkov znamená, že každý elementárny jav má rovnakú šancu nastat' a to

$$1 : |\Omega|, \quad |\Omega| < \infty$$

• *Rovnomerné rozdelenie* možností na spojitom výberovom priestore Ω s konečnou a kladnou mierou $0 < m(\Omega) < \Omega$ znamená, že každá elementárna oblasť v Ω má rovnakú šancu byť volená a to

$$1 : m(\Omega),$$

kde $m(\cdot)$ znamená veľkosť (mieru) množiny javu v zátvorkách.

Definícia 1.10 (klasická definícia pravdepodobnosti)

Nech výberový priestor Ω je diskretný s konečným počtom prvkov $|\Omega| < \infty$, nech rozdelenie možností na Ω je rovnomerné. Potom pravdepodobnosť ľubovoľného javu $A \in \mathcal{A}$ je číslo

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}, \quad (1)$$

kde $|A|, |\Omega|$ znamená počet prvkov množín $|A|, |\Omega|$.

Poznámka 1.3

Klasická definícia sa nazýva aj *kombinatorická*, pretože $|A|, |\Omega|$ sa najčastejšie určujú kombinatoricky.

Definícia 1.11 (geometrická definícia pravdepodobnosti)

Nech výberový priestor Ω je spojitý s konečnou a kladnou mierou $0 < m(\Omega) < \infty$. Nech rozdelenie na Ω je rovnomerné. Potom pravdepodobnosť javu $A \in \mathcal{A}$, $A \subset \Omega$ je číslo

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}, \quad (2)$$

kde $m(\cdot)$ je miera (veľkosť) množiny v zátvorkách.

Poznámka 1.4

Miery $m(A)$, $m(\Omega)$ sa vo všeobecnosti vypočítajú pomocou určitého integrálu, v jednoduchších prípadoch ako dĺžka úsečky, plošný obsah, resp. objem známych geometrických útvarov.

Definícia 1.12 (axiomatická definícia pravdepodobnosti)

Reálna funkcia $P(\cdot)$ definovaná na javovom poli \mathcal{A} (podmnožiny výberového priestoru Ω) pomocou axióm:

1. $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$ (axióma nezápornosti)
2. $P(\Omega) = 1$ (axióma úplnosti)
3. $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$, pričom $A_i \cap A_j = \emptyset$ pre $i \neq j$ (axióma σ -aditivnosti)

sa nazýva *pravdepodobnosť* (pravdepodobnostná miera) javu A .

Cvičenie 1.5

Overte, či klasická a geometrická pravdepodobnosť spĺňajú axiomatickú definíciu.

Definícia 1.13 (pravdepodobnostný priestor)

Trojica (Ω, \mathcal{A}, P) , kde Ω je výberový priestor, \mathcal{A} javové pole nad Ω , $P(\cdot)$ pravdepodobnosť javu v zátvorkách sa nazýva *pravdepodobnostný priestor*.

Poznámka 1.6 (faktorizácia výberového priestoru)

Podmienka konečnosti v klasickej (i geometrickej) definícii pravdepodobnosti) je dosť obmedzujúca. Ak počet prvkov Ω je ∞ , ale existuje taká relácia ekvivalencie R nad prvkami Ω , ktorá zoradí všetky prvky do konečného počtu tzv. „tried ekvivalencie“, potom možno použiť klasickú (resp. geometrickú) definíciu pre nový *faktorizovaný priestor*, ktorý označujeme

$$\Omega/R.$$

1.3 Vlastnosti pravdepodobnosti**Veta 1.1**

Nech je daný pravdepodobnostný priestor (Ω, \mathcal{A}, P) . Nech javy $A, B \in \mathcal{A}$. Potom

1. $P(A^c) = 1 - P(A)$
2. $P(\emptyset) = 0$
3. $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

Dôkaz:

- Vieme, že $A \cup A^c = \Omega$. Potom aj $P(A \cup A^c) = P(\Omega) = 1$. Zároveň však z axiómy σ -aditivnosti máme $P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) = P(\Omega)$. Z toho však vyplýva, že

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

- Funkcia e^{itx} sa dá napísať ako $\cos tx + i \sin tx$. Potom integrál z tejto funkcie

$$\begin{aligned} \int e^{itx} dx &= \int (\cos tx + i \sin tx) dx = \int \cos tx dx + i \int \sin tx dx \\ &= \frac{\sin t}{t} - i \frac{\cos tx}{t} = \frac{i \sin tx - \cos tx}{it} \\ &= \frac{\cos tx + i \sin tx}{it} = \frac{e^{itx}}{it} \end{aligned}$$

resp.

$$\int e^{\alpha x} dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}$$

Derivácia tejto funkcie

$$\frac{de^{itx}}{dx} = it \cdot e^{itx} \quad \text{resp.} \quad \frac{de^{\alpha x}}{dx} = \alpha e^{\alpha x}$$

Veta 2.8 (vlastnosti $\varphi_{\mathbb{X}}$)

Nech $\varphi_{\mathbb{X}}(t)$ je charakteristickou funkciou náhodnej veličiny \mathbb{X} . Nech a, b sú konštanty. Potom platí:

1. $|\varphi_{\mathbb{X}}(t)| \leq 1$
2. $\varphi_{\mathbb{X}}(0) = 1$
3. $\varphi_{a\mathbb{X}+b}(t) = e^{itb} \cdot \varphi_{\mathbb{X}}(a \cdot t)$

Dôkaz:

Ad 1.)

$$|\varphi_{\mathbb{X}}(t)| = |E(e^{it\mathbb{X}})| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \cdot f(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{itx} \cdot f(x)| dx \quad \square$$

Z definície platí, že $f(x) \geq 0$, čiže môžeme odstrániť absolútnu hodnotu a posledný integrál potom bude rovný

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{|e^{itx}|}_{=1} \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \stackrel{\text{norm. podm.}}{=} 1$$

Ad 2.) Z definície

$$\varphi_{\mathbb{X}}(0) = E(e^{i \cdot 0 \mathbb{X}}) = E(e^0) = E(1) = 1$$

Ad 3.)

$$\varphi_{a\mathbb{X}+b}(t) = E(e^{it(a\mathbb{X}+b)}) = E(e^{ita\mathbb{X}+itb}) = E(e^{ita\mathbb{X}} \cdot \underbrace{e^{itb}}_{\text{konšt}}) = e^{itb} \cdot E(e^{i(at)\mathbb{X}}) = e^{itb} \cdot \varphi_{\mathbb{X}}(a \cdot t)$$

Veta 2.9 (vzťah medzi $\varphi_{\mathbb{X}}(t)$ a m_k)

Nech $\varphi_{\mathbb{X}}(t)$ je charakteristickou funkciou náhodnej veličiny \mathbb{X} . Nech $\mathbb{X} \in L^{n+1}$, kde $n \geq 1$. Potom existujú k -te derivácie charakteristickej funkcie a platí:

$$\varphi_{\mathbb{X}}^{(k)}(0) = i^k \cdot m_k$$

kde i je komplexná jednotka, $m_k = E(\mathbb{X}^k)$ a $\varphi_{\mathbb{X}}^{(k)}$ je k -tá derivácia charakteristickej funkcie v bode 0.

Využijeme poznámku (2.25):

$$\begin{aligned} F(\tilde{x}) &= \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \arctg \tilde{x} &= \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\pi} \arctg \tilde{x} &= 0 \\ \arctg \tilde{x} &= 0 \end{aligned}$$

čiže medián \mathbb{X} je $\tilde{x} = 0$

- variabilita (kvartilová odchýlka)

$$Q(\mathbb{X}) = \frac{x_{0,25} - x_{0,75}}{2}$$

Funkcia je spojitá a rastúca, teda môžeme počítať s využitím poznámky (2.26).

$$\begin{aligned} F(x_{0,75}) &= \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \arctg x_{0,75} &= \frac{3}{4} \\ x_{0,75} &= 1 \end{aligned}$$

Analogicky vypočítame

$$x_{0,25} = -1$$

Z toho máme: $Q(\mathbb{X}) = \frac{1 - (-1)}{2} = 1$. Teda existuje 50%-ná pravdepodobnosť, že namerané hodnoty budú z intervalu $(\tilde{x} - 1, \tilde{x} + 1)$.

Príklad na diskretné rozdelenie možno nájsť v skriptách [3].

2.5 Charakteristická funkcia

Dôležitou dôkazovou metódou v teórii pravdepodobnosti a matematickej štatistike je metóda charakteristických funkcií.

Definícia 2.19 (charakteristická funkcia)

Charakteristickou funkciou náhodnej veličiny \mathbb{X} nazývame funkciu¹³

$$\varphi_{\mathbb{X}} : \mathbb{R}_1 \rightarrow \mathbb{C}$$

definovanú ako

$$\varphi_{\mathbb{X}}(t) = E(e^{it\mathbb{X}})$$

pričom $t \in \mathbb{R}_1$ a i je komplexná jednotka.

Poznámka 2.28

- Výpočtový tvar charakteristickej funkcie podľa vety o prenose integrácie/sumácie 2.12 je

$$\varphi_{\mathbb{X}}(t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx & \text{ak } \mathbb{X} \text{ je spojitá} \\ \sum_k e^{itx_k} p_k & \text{ak } \mathbb{X} \text{ je diskretná} \end{cases}$$

(ak označíme e^{itx} ako $g(\mathbb{X})$ z vety).

¹³komplexnú funkciu reálnej premennej

- Ukážme, že $P(\emptyset) = 0$.
 $P(\emptyset) = P(\Omega^c) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$

- Uvážme množiny A, B . Vieme, že

$$A = (A - B) \cup (A \cap B).$$

Potom pre pravdepodobnosť javu A platí:

$$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B).$$

Z tejto rovnosti vyjadríme

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B).$$

Poznámka 1.7

Ak $B \subset A$, potom $P(A - B) = P(A) - P(B)$.

Veta 1.2 (o monotónnosti pravdepodobnosti)

Nech je daný pravdepodobnostný priestor (Ω, \mathcal{A}, P) a nech A, B sú náhodné javy a nech $A \subset B$.

Potom

$$P(A) \leq P(B).$$

Dôkaz: Majme množiny A, B . Vyjadríme B nasledovne:

$$B = A \cup (B - A).$$

Potom

$$P(B) = P(A) + \underbrace{P(B - A)}_{\geq 0} \geq P(A).$$

Dôsledok 1.8

$$\forall A \in \mathcal{A} : 0 \leq P(A) \leq 1$$

Dôkaz: Stačí využiť vetu 1.2 a všimnúť si, že $P(A) \leq P(\Omega) = 1$. □

Veta 1.3 (o poloaditívnosti pravdepodobnosti)

Nech je daný (Ω, \mathcal{A}, P) . Nech $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2, \dots$ sú ľubovoľné javy. Potom

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) \leq \sum_i P(A_i).$$

Dôkaz: Označme postupne

$$B_1 = A_1, B_2 = A_2 - A_1, B_3 = A_3 - (A_1 \cup A_2), \dots, B_k = A_k - \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i.$$

Uvedomme si, že javy B_1, \dots, B_k sú nezlučiteľné a platí

$$\bigcup_k B_k = \bigcup_k A_k.$$

Ďalej tiež platí, že pre každé k je $B_k \subset A_k$, čiže aj $\forall k : P(B_k) \leq P(A_k)$. S využitím týchto vlastností

$$P\left(\bigcup_k A_k\right) = P\left(\bigcup_k B_k\right) \stackrel{3. ax}{=} \sum_k P(B_k) \leq \sum_k P(A_k),$$

čiže

$$P\left(\bigcup_k A_k\right) \leq \sum_k P(A_k).$$

Veta 1.4 (o sčítaní pravdepodobnosti)

Nech je daný (Ω, \mathcal{A}, P) a nech $A_i \in \mathcal{A}, i = 1, \dots, n$ sú ľubovoľné. Potom

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \\ &- \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n P(A_i \cap A_j) + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \\ &+ \dots + \\ &+ (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \end{aligned}$$

Dôkaz: Vykonáme úplnou matematickou indukciou.

1. Nech $n = 2$. Potom vieme, že $A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A_2 - A_1)$ a pre pravdepodobnosť tohto zjednotenia platí:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2 - A_1) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2).$$

2. Teraz nech tvrdenie platí pre $n - 1$. Indukčný predpoklad bude:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i) - \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n-2} P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$$

Počítajme:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \cup A_n\right) \\ &= P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) + P(A_n) - P\left(\underbrace{\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cap A_n}_{\text{použijeme distrib. zákon}}\right) \\ &= P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) + P(A_n) - P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n)\right) \\ &\stackrel{\text{I.P.}}{=} \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i) - \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n-2} P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) + P(A_n) - \\ &- \left[\sum_{i=1}^{n-1} P(A_i \cap A_n) - \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} P(A_i \cap A_j \cap A_n) + \dots + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{n-2} P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n)\right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n P(A_i) + \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \quad \square \end{aligned}$$

Definícia 1.14 (nezávislé a totálne nezávislé javy)**Poznámka 2.26**

- Ak $F(x)$ je spojitá a rastúca, potom

$$F(x_{0,25}) = \frac{1}{4} \quad F(x_{0,75}) = \frac{3}{4}$$

(keďže je rastúca a spojitá, taký bod je len jediný)

- Kvantilová odchýlka je kvantilovou charakteristikou variability

Okrem momentovej a kvantilovej charakteristiky sa používa ešte jedna charakteristika polohy – modus.

Definícia 2.18 (modus)

Modusom rozdelenia váh veličiny \mathbb{X} nazývame najpravdepodobnejšiu hodnotu náhodnej veličiny \mathbb{X} , t. j. číslo \hat{x} , pre ktoré platí

$$\begin{aligned} f(\hat{x}) &\geq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}_1 \quad \text{ak } \mathbb{X} \text{ je spojitá} \\ P(\mathbb{X} = \hat{x}) &\geq P(\mathbb{X} = x) \quad \forall x \in \mathbb{R}_1 \quad \text{ak } \mathbb{X} \text{ je diskretná} \end{aligned}$$

Príklad 2.27

Nech $f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}$, pre $x \in (-\infty, \infty)$. Charakterizujte polohu a variabilitu.

Riešenie:

V niektorom z minulých príkladov sme ukázali, že neexistujú pre túto funkciu $E(\mathbb{X})$, $D(\mathbb{X})$. Preto budeme počítat charakteristiky \hat{x} , \tilde{x} , $Q(\mathbb{X})$.

- Modus \hat{x} (najpravdepodobnejšia hodnota)

Z definície má platiť $f(\hat{x}) \geq f(x)$, čiže hľadáme maximum funkcie $f(x)$. Nájdime najprv stacionárne body, čiže body, kde $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2} \\ f'(x) &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \\ f'(x) = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

čiže stacionárny bod je bod $x = 0$. Teraz potrebujeme overiť, či je v ňom maximum alebo minimum (môže však nastať aj situácia, keď nevieme o bode nič bližšie povedať). To urobíme výpočtom druhej derivácie $f''(x)$.

$$f''(x) = \frac{-2}{\pi} \cdot \frac{1 \cdot (1+x^2) - x \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4}$$

Dosadením nuly dostaneme:

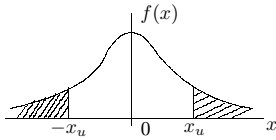
$$f''(0) = \frac{-2}{\pi} < 0 \Rightarrow x = 0$$

čiže x je maximum $f(x)$ a teda modus \mathbb{X} je $\hat{x} = 0$

- Medián \tilde{x}

Ak je funkcia spojitá a rastúca, medián nájdeme s využitím poznámky (2.25). (v opačnom prípade treba využiť definíciu – infimum)

$$\begin{aligned} F(\tilde{x}) &= \frac{1}{2} \\ F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{1}{\pi} \cdot \left[\arctg t \right]_{-\infty}^x = \frac{1}{\pi} \left(\arctg x + \frac{\pi}{2} \right) \\ F(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \arctg x \end{aligned}$$



pod grafom na intervale $(-\infty, -x_u)$ a na intervale (x_u, ∞) by sa mali rovnáť.

Vyjadriť teda

$$F(-x_u) = 1 - F(x_u)$$

Všimnime si, že ak je $F(x)$ spojitá a rastúca, tak $F^{-1}(x)$ je inverzná k $F(x)$, teda ak $F^{-1}(u) = x_u$, potom zrejme $u = F(x_u)$. Spolu máme:

$$F(-x_u) = 1 - F(x_u)$$

$$F(-x_u) = 1 - u$$

$$F(-x_u) = F(x_{1-u}) \quad \square$$

Keďže $F(x)$ je spojitá a rastúca (teda prostá), môžeme napísať rovnosť (a iná situácia nemôže nastať)

$$-x_u = x_{1-u}$$

Definícia 2.16 (medián)

Medián je 50%-ný kvantil rozdelenia náhodnej veličiny \mathbb{X} , t. j.

$$x_{0,5} = \tilde{x} \left(= \inf_x \left\{ x : F(x) \geq \frac{1}{2} \right\} \right)$$

Poznámka 2.25

- V prípade, že $f(x)$ je spojitá a rastúca, medián nájdeme ako riešenie rovnice

$$F(\tilde{x}) = \frac{1}{2}$$

- Medián je kvantilovou charakteristikou hodnoty.

Definícia 2.17 (kvartilová odchýlka)

Kvartilovou odchýlkou rozdelenia náhodnej veličiny \mathbb{X} je číslo

$$Q(\mathbb{X}) = \frac{x_{0,75} - x_{0,25}}{2}$$

kde

$$x_{0,25} = \inf_x \left\{ x : F(x) \geq \frac{1}{4} \right\} \quad (\text{dolný kvartil})$$

$$x_{0,75} = \inf_x \left\{ x : F(x) \geq \frac{3}{4} \right\} \quad (\text{horný kvartil})$$

¹⁰Napriek označeniu vo všeobecnosti nemusí byť kvantilová funkcia inverznou funkciou. Napr. u diskretných veličín je distribučná funkcia $F(x)$ schodkovitá, preto nemôže mať inverznú funkciu.

¹¹Infimum v definícii je dôležité. Hoci pri rastúcej funkcii existuje jediný taký bod, pri diskretných veličinách je tých bodov viac, preto uvažujeme infimum.

¹²Teda napr. v tabuľkách stačí uvádzať polovicu hodnôt, lebo napr. $x_{0,95} = x_{0,05}$.

Hovoríme, že javy $A, B \in \mathcal{A}$ sú nezávislé, ak

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Hovoríme, že javy $A_i \in \mathcal{A}, i = 1, \dots$, sú navzájom (totálne) nezávislé, ak pre ľubovoľnú podmnožinu indexov platí:

$$P\left(\bigcap_{j=1}^k A_j\right) = \prod_{j=1}^k P(A_j)$$

Poznámka 1.9

Aby javy A_1, \dots, A_n boli navzájom nezávislé, nestačí aby boli nezávislé po dvojiciach.

Veta 1.5

Nech $A, B \in \mathcal{A}$ sú nezávislé. Potom sú nezávislé aj javy

$$A, B^c \quad A^c, B \quad A^c, B^c$$

Dôkaz: 1. $P(A \cap B^c) = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot (1 - P(B)) = P(A) \cdot P(B^c)$

2. $P(A^c \cap B)$ ukážeme analogicky.

3. $P(A^c \cap B^c) = P(A^c - B) = P(A^c) - P(A^c \cap B) = P(A^c) - P(B - A) = P(A^c) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B) \quad \square$

Veta 1.6

Nech $A_i \in \mathcal{A}, i = 1, \dots, n$ sú navzájom nezávislé. Potom

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i^c\right) = 1 - \prod_{i=1}^n P(A_i^c)$$

Dôkaz: Pre javy A_i pre $i = 1, 2, \dots, n$ a ich zjednotenia zrejme platí:

$$\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^n A_i^c\right) = \Omega$$

Pre pravdepodobnosť potom máme

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) + P\left(\left(\bigcup_{i=1}^n A_i^c\right)^c\right) = P(\Omega) = 1$$

Ekvivalentným prepísaním druhého sčítanca získame

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) + P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i^c\right) = 1,$$

čo je ekvivalentné

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i^c\right).$$

Na záver využijeme predpoklad vzájomnej nezávislosti javov A_i a definíciu (1.14), čím získame tvrdenie vety. \square

1.4 Podmienená pravdepodobnosť

Definícia 1.15 (podmienená pravdepodobnosť)

Nech $A, H \in \mathcal{A}$. Nech $P(H) > 0$. Podmienenu pravdepodobnosť javu A za podmienky, že nastal jav H , $H \in \mathcal{A}$ definujeme vzťahom:

$$P(A|H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)}, \text{ pričom } P(H) > 0$$

Veta 1.7 (o násobení pravdepodobnosti)

Nech je daný pravdepodobnostný priestor (Ω, \mathcal{A}, P) . Nech javy $A_i \in \mathcal{A}$ pre $i = 1, 2, \dots, n$ a nech $P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) > 0$. Potom platí:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n | \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) \quad (3)$$

Poznámka 1.10

V tejto vete nepredpokladáme nezávislosť javov. Ďalej pravdepodobnosť podmienky nesmie byť 0, ale to je zaručené, pretože ak $P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \neq 0$, tak aj pravdepodobnosti $P(A_1), P(A_1 \cap A_2) \dots$ sú nenulové.

Dôkaz:

- Dokážeme vzťah (3) pre najmenšie n , t.j. pre $n = 2$. Overíme, či platí $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1)$.

Z definície podmienenej pravdepodobnosti máme:

$$P(A_2|A_1) = \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)}, \quad P(A_1) > 0$$

Stačí rovnicu prenásobiť $P(A_1)$ a využiť komutatívny zákon, čím získavame tvrdenie.

- Teraz budeme predpokladať platnosť (3) pre $n-1$. Overíme, či tvrdenie platí pre n . Indukčný predpoklad bude:

$$\text{IP: } P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot \dots \cdot P(A_{n-1} | \bigcap_{i=1}^{n-2} A_i)$$

Vydeme z ľavej strany tvrdenia (3):

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) &= P\left[\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cap A_n\right] \\ &\stackrel{\text{využi 1.)}}{=} P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cdot P(A_n | \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) \\ &\stackrel{\text{IP}}{=} P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot \dots \cdot P(A_{n-1} | \bigcap_{i=1}^{n-2} A_i) \cdot P(A_n | \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) \quad \square \end{aligned}$$

Veta 1.8 (o úplnej pravdepodobnosti)

Nech je daný pravdepodobnostný priestor (Ω, \mathcal{A}, P) . Nech javy $H_i \in \mathcal{A}$ pre $i = 1, 2, \dots, n$ tvoria rozklad Ω . Nech $P(H_i) > 0$ pre každé $i = 1, 2, \dots, n$. Potom pre ľubovoľný jav $A \in \mathcal{A}$ platí:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A|H_i) \quad (4)$$

Tento výraz platí, len ak počítame index k od nuly. Ak index k ide od 1 (tento prípad budeme využívať často), potom platí vzťah

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{a_1}{1-q} = \frac{q}{1-q}$$

Na ľavú stranu rovnosti (\square) sa môžeme dívať ako na polynóm, ktorý môžeme zderivovať. Po derivácii oboch strán rovnosti získame:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \quad (*)$$

Všimnime si, že v sume na ľavej strane ide k už od jednotky (nie od nuly). Tento postup a vzorce budeme často využívať.

2.4.2 Kvantilové charakteristiky

V prípade, že momentové charakteristiky neexistujú (ak $\mathbb{X} \notin L^k$), potom používame kvantilové charakteristiky (často sa však počítajú oboje charakteristiky – momentové aj kvantilové).

Príklad 2.24

Nech hustota náhodnej veličiny je $f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}$, $x \in (-\infty, \infty)$. Charakterizujte polohu a variabilitu rozdelenia náhodnej veličiny \mathbb{X} .

Riešenie:

$$\begin{aligned} E(\mathbb{X}) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x \cdot \frac{1}{1+x^2}}_{\text{nepárna}} dx = \begin{cases} 0, & \text{ak } \mathcal{I} = \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx < \infty \\ \text{neex.}, & \text{ak } \mathcal{I} = \infty \end{cases} \\ \mathcal{I} &= \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} [\ln|1+x^2|]_0^{\infty} = \frac{1}{2} [\ln(1+x^2)]_0^{\infty} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(1+x^2) &= \infty \quad \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x^2) = 0 \end{aligned}$$

Teda $E(\mathbb{X})$ neexistuje, čiže neexistujú ani ostatné momentové charakteristiky.

Definícia 2.15 (kvantilová funkcia)

Nech $F(x)$ je distribučnou funkciou náhodnej veličiny \mathbb{X} . Kvantilovou funkciou náhodnej veličiny \mathbb{X} odpovedajúcou distribučnej funkcii $F(x)$ nazývame funkciu¹⁰

$$F^{-1}(u) = \inf\{x : F(x) > u\} \quad u \in (0, 1)$$

Hodnoty¹¹ kvantilovej funkcie nazývame kvantily, presnejšie

$$F^{-1}(u) = x_u, \quad x_u \in \mathbb{R}_1$$

teda kvantil je reálne číslo. Číslo u nazývame kvantil, resp. 100%-ný kvantil.

Veta 2.7 (vlastnosti kvantilov)

Nech $F^{-1}(u)$ je kvantilovou funkciou náhodnej veličiny \mathbb{X} odpovedajúcou distribučnej funkcii $F(x)$. Nech $F(x)$ je spojitá a rastúca a odpovedajúca hustota $f(x)$ je párna. Potom pre kvantily platí¹²

$$x_{1-u} = -x_u$$

Dôkaz: Nech $F(x)$ je spojitá a rastúca a nech $f(x)$ je párna. Z párnosti $f(x)$ vyplýva, že jej graf je symetrický. Z definície navyše plocha pod grafom je 1. Z týchto vlastností teda máme, že plochy

Príklad 2.22

Majme danú spojitú náhodnú veličinu \mathbb{X} . Nech hustota $f(x) = a \cdot e^{-|x|} \forall x \in \mathbb{R}_1$. Vypočítajte parameter a , aby $f(x)$ bola hustotou, určte $E(\mathbb{X})$, $D(\mathbb{X})$, α_3 , α_4 .

Riešenie

Z normovacej podmienky:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 = a \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} dx$$

Keď si uvedomíme, že funkcia $e^{-|x|}$ je párna funkcia, vyhneme sa rozboru prípadov. Vieme totiž, že graf párnej funkcie je symetrický podľa osi y a teda aj plocha je symetrická – stačí teda počítať dvojnásobný integrál na polovičnom intervale $(0, \infty)$. Teda máme

$$2a \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 2a[-e^{-x}]_0^{\infty}$$

Keďže horná hranica je v nekonečne, mali by sme overiť, či plocha nie je náhodou nekonečná:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2a[-e^{-x}] = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} 2a[-e^{-x}] = 0$$

čo je v poriadku. Teda z normovacej podmienky máme

$$\begin{aligned} 1 &= 2a \cdot 1 = 2a \\ a &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Určme teraz momentové charakteristiky:

$$E(\mathbb{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-|x|} dx$$

Opäť si uvedomíme, že x je nepárna funkcia a $e^{-|x|}$ je párna funkcia. Z matematickej analýzy vieme, že súčin párnej a nepárnej funkcie je funkcia nepárna. Čiže na intervale $(0, \infty)$ je plocha „kladná“, na intervale $(-\infty, 0)$ „záporná“. V prípade, že plocha na jednom z týchto intervalov je konečná (čo hneď overíme), výsledná plocha by mala byť nulová. Čiže mala byť platiť jedna z alternatív:

$$\mathcal{I} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-|x|} dx = \begin{cases} 0, & \text{ak } \mathcal{I} < \infty \\ \text{neexistuje,} & \text{ak } \mathcal{I} = \infty \text{ (máme neurčitý výraz)} \end{cases}$$

Počítajme integrál \mathcal{I} :

$$\mathcal{I} = \int_0^{\infty} x \cdot e^{-x} dx = \Gamma(2) = 1! = 1 < \infty \Rightarrow E(\mathbb{X}) = 0$$

Teraz rátaťme $D(\mathbb{X})$:

$$D(\mathbb{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x^2 \cdot e^{-|x|}}_{\text{párna funkcia}} = \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-x} dx = \Gamma(3) = 2! = 2$$

Pokračovanie riešenia možno nájsť v skriptách [3].

Poznámka 2.23 (geometrické postupnosti)

Majme nekonečný rad $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$, kde q je kvocient. Ak $|q| < 1$, potom je tento rad konvergentný a platí:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad (\square)$$

Poznámka 1.11

Rovnica (4) sa nazýva *formula úplnej pravdepodobnosti*, resp. *úplná formula*.

Dôkaz: Vyjdeme z ľavej strany rovnosti a použijeme vlastnosť prieniku A s Ω .

$$P(A) = P(A \cap \Omega) = P\left(A \cap \bigcup_{i=1}^n H_i\right)$$

Toto môžeme napísať, keďže z predpokladu H_i tvoria rozklad, t.j. $\bigcup_{i=1}^n H_i = \Omega$. Ďalej aplikujeme distributívny zákon:

$$P\left(A \cap \bigcup_{i=1}^n H_i\right) = P\left[\bigcup_{i=1}^n (A \cap H_i)\right] = \sum_{i=1}^n P(A \cap H_i)$$

V poslednom kroku sme využili to, že $A \cap H_i$ pre $i = 1, \dots, n$ sú disjunktné javy. Teraz použijeme definíciu podmienenej pravdepodobnosti a predpoklad, že $P(H_i) > 0$:

$$\sum_{i=1}^n P(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot \frac{P(A \cap H_i)}{P(H_i)} = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A|H_i)$$

Veta 1.9 (Bayesova)

Nech je daný pravdepodobnostný priestor (Ω, \mathcal{A}, P) . Nech javy $H_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2, \dots, n$ tvoria rozklad výberového priestoru Ω . Nech $P(H_i) > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Potom pre ľubovoľný jav $A \in \mathcal{A}$ taký, že $P(A) > 0$ platí:

$$P(H_j|A) = \frac{P(H_j) \cdot P(A|H_j)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A|H_i)}$$

Dôkaz: Z definície podmienenej pravdepodobnosti:

$$P(H_j|A) = \frac{P(H_j \cap A)}{P(A)}$$

Keďže z predpokladu $P(A) > 0$, môžeme rovnicu prenášať $P(A)$.

Definícia podmienenej pravdepodobnosti samozrejme platí, aj keď vzájomne vymeníme javy A a H_j , teda

$$P(A|H_j) = \frac{P(A \cap H_j)}{P(H_j)}$$

Túto rovnicu môžeme tiež prenášať $P(H_j)$, lebo v predpoklade máme zaručenú nenulovosť. Využijeme komutatívnosť prieniku $H_j \cap A$ a porovnáme horeuvedené rovnice, čím máme

$$P(A) \cdot P(H_j|A) = P(H_j) \cdot P(A|H_j) = P(A \cap H_j)$$

Vyjadrieme teraz $P(H_j|A)$:

$$P(H_j|A) = \frac{P(H_j) \cdot P(A|H_j)}{P(A)}$$

Stačí už len použiť formulu úplnosti na člen $P(A)$ v menovateli pravej strany rovnosti (všetky predpoklady sú splnené) a máme požadované tvrdenie. \square

1.5 Postupnosť javov a jej limita

Uvažujme pravdepodobnostný priestor Ω, \mathcal{A}, P a javy $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$. Symbolom $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ budeme označovať postupnosť javov.

Definícia 1.16 (monotónnosť postupnosti javov)

- a) Hovoríme, že postupnosť javov $\{A_n\}_n^\infty$ je *rastúca*, ak $\forall n \in \mathbb{N} : A_n \subset A_{n+1}$ ¹
- b) Hovoríme, že postupnosť javov $\{A_n\}_n^\infty$ je *klesajúca*, ak $\forall n \in \mathbb{N} : A_n \supset A_{n+1}$
- c) Hovoríme, že postupnosť javov $\{A_n\}_n^\infty$ je *monotónna*, ak je rastúca alebo klesajúca.

Definícia 1.17 (limita postupnosti javov)

- a) *Hornou limitou* postupnosti javov $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ nazývame jav

$$A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$$

- b) *Dolnou limitou* postupnosti javov $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ nazývame jav

$$A_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$$

- c) Hovoríme, že postupnosť javov $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ má *limitu*, ak sa jej horná a dolná limita rovnajú.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A = A^* = A_*$$

Poznámka 1.12

Ak postupnosť $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ má limitu, potom

1. ak $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ je rastúca, potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

2. ak $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ je klesajúca, potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

Veta 1.10 (o spojitosti pravdepodobnosti)

Nech je daný pravdepodobnostný priestor (Ω, \mathcal{A}, P) . Nech $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$. Nech existuje limita $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$. Potom platí

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \quad (5)$$

Dôkaz:

1. dokážeme platnosť (5) pre monotónne postupnosti.

Nech $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ je rastúca a má limitu. Postupne označíme

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 \\ B_2 &= A_2 - A_1 \\ B_3 &= A_3 - A_2 \\ &\vdots \\ B_k &= A_k - A_{k-1} \end{aligned}$$

¹ $A_n \subset A_{n+1}$ čítame „ A_n má za následok A_{n+1} “

Príklad 2.19 (stále triviálny)

Spojité náhodná veličina \mathbb{X} má hustotu $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ak } x \in (0, 1) \\ 0 & \text{ak } x \notin (0, 1) \end{cases}$. Vypočítajte $E(\mathbb{X}), D(\mathbb{X})$.

Riešenie:

$$\begin{aligned} m_1 = E(\mathbb{X}) &\stackrel{\text{spojitá}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^1 x^1 dx + \int_1^{\infty} 0 dx = \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \\ m_2 = E(\mathbb{X})^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx = \int_0^1 x^2 \cdot 1 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \\ D(\mathbb{X}) &= m_2 - m_1^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Príklad 2.20 (teraz zložitejšie)

Spojité náhodná veličina \mathbb{X} má hustotu $f(x) = \begin{cases} a \cdot x^m \cdot e^{-x} & \text{ak } x > 0, m > 0 \\ 0 & \text{ak } x \leq 0 \end{cases}$. Vypočítajte parameter a , $E(\mathbb{X}), D(\mathbb{X})$.

Riešenie:

Z normovacej podmienky pre hustotu spojitého rozdelenia má platiť:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} a \cdot x^m \cdot e^{-x} dx = a \int_0^{\infty} x^m \cdot e^{-x} dx = a \cdot \Gamma(m+1), \text{ čiže } a = \frac{1}{\Gamma(m+1)}$$

Vypočítajme charakteristiky:

$$\begin{aligned} E(\mathbb{X}) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = a \int_0^{\infty} x \cdot x^m \cdot e^{-x} dx = a \int_0^{\infty} x^{m+1} \cdot e^{-x} dx = \\ &= \frac{1}{\Gamma(m+1)} \cdot \Gamma(m+2) \\ &= \frac{(m+1) \cdot \Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1)} = m+1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(\mathbb{X}^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx = a \cdot \int_0^{\infty} x^{m+2} \cdot e^{-x} dx = \\ &= \frac{1}{\Gamma(m+1)} \cdot \Gamma(m+3) = \frac{(m+2)\Gamma(m+2)}{\Gamma(m+1)} = (m+2)(m+1) \end{aligned}$$

$$D(\mathbb{X}) = E(\mathbb{X}^2) - (E(\mathbb{X}))^2 = (m+2)(m+1) - (m+1)^2 = (m+1)(m+2-m-1) = m+1$$

Príklad 2.21 (štvrtý...)

Spojité náhodná veličina \mathbb{X} má hustotu $f(x) = \begin{cases} a \cdot x^4 \cdot (1-x)^5 & \text{ak } x \in (0, 1) \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$. Vypočítajte parameter a , $E(\mathbb{X}), D(\mathbb{X})$.

Riešenie:

Vypočítajme parameter a :

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = a \int_0^1 x^4 (1-x)^5 dx = a \cdot \beta(5, 6), \text{ teda } a = \frac{1}{\beta(5, 6)}$$

Teraz určíme charakteristiky:

$$m_1 = E(\mathbb{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = a \int_0^1 x \cdot x^4 (1-x)^5 dx = \frac{1}{\beta(5, 6)} \cdot \beta(6, 6) = \frac{\Gamma(6) \cdot \Gamma(6)}{\Gamma(12)} = \frac{5}{11}$$

$$m_2 = E(\mathbb{X}^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx = \int_0^1 x^6 \cdot (1-x)^5 dx = \frac{\beta(7, 6)}{\beta(5, 6)} = \frac{\Gamma(7) \cdot \Gamma(6)}{\Gamma(13)} = \frac{5}{22}$$

$$D(\mathbb{X}) = m_2 - m_1^2 = \frac{5}{22} - \frac{25}{121} = \frac{5}{242}$$

Ak medzi integračné medze prirátame interval $(-\varepsilon, \varepsilon)$, plocha pod integrálom sa zväčší. Teda

$$\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{x^2}{\varepsilon^2} \cdot f(x) dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\varepsilon^2} f(x) dx = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx = \frac{E(\mathbb{X}^2)}{\varepsilon^2}$$

Dôsledok 2.16

Iný tvar Čebyševovej nerovnosti je:

$$P(|\mathbb{X} - E(\mathbb{X})| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(\mathbb{X})}{\varepsilon^2}$$

Poznámka 2.17

Na výpočet $E(\mathbb{X})^k$, $k \geq 1$ sa niekedy používajú tzv. *Eulerove integrály* 1. a 2. druhu, t.j. gama a beta funkcia.

Gama funkcia:

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} \cdot e^{-x} dx, \quad s \in \mathbb{C}, \Re(s) \geq 0$$

Beta funkcia:

$$\beta(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1} dx, \quad p, q \in \mathbb{C}, \Re(p) > 0, \Re(q) > 0$$

Vlastnosti funkcií beta⁹ a gama.

1. $\Gamma(1) = 1$
2. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$
3. $\Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s)$
4. $\beta(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

Príklad 2.18 (triviálny)

Nech distribučná funkcia náhodnej veličiny \mathbb{X} má rozdelenie:

x_i	1	2	3	4
p_i	0,1	0,6	0,2	0,1

Určte $D(\mathbb{X})$, $E(\mathbb{X})$.

Riešenie:

$$\begin{aligned} E(\mathbb{X}) &= \sum_{i=1}^4 x_i \cdot p_i = 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,6 + 3 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,1 = 2,3 \\ D(\mathbb{X}) &= E(\mathbb{X}^2) - (E(\mathbb{X}))^2 \\ E(\mathbb{X}^2) &= \sum_{i=1}^4 x_i^2 \cdot p_i = \dots = 5,9 \\ D(\mathbb{X}) &= 5,9 - 2,3^2 = 0,61 \\ \sigma_x &= \sqrt{D(\mathbb{X})} = \sqrt{0,61} \doteq 0,78 \end{aligned}$$

⁹Funkcia Γ je v istom zmysle zovšeobecnením funkcie faktoriál. Pre $s \in \mathbb{N}$ je $\Gamma(s+1) = s!$, teda napr. $\Gamma(125) = 124!$.

Zrejme javy B_k sú nezlučiteľné, $\bigcup_k A_k = \bigcup_k B_k$ a $B_k \subset A_k$. Počítajme:

$$\begin{aligned} P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right) &\stackrel{A_n \text{ je rastúca}}{=} P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(B_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n P(B_k) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k=1}^n B_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \end{aligned}$$

Tvrdenie pre klesajúcu postupnosť ukážeme analogicky.

2. zovšeobecníme prvý krok na všetky postupnosti (nie len monotónne).

Nech existuje limita postupnosti javov A_n . Z definície to znamená, že $A_* = A^* = A$. Prepíšme toto tvrdenie podľa definície a označme si javy B_n , C_n nasledovne:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k}_{B_n} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k}_{C_n}$$

Uvedomme si (!), že postupnosť javov B_n je rastúca a postupnosť javov C_n je klesajúca. Ďalej platia inklúzie $B_n \subset A_n \subset C_n$. Počítajme teraz limitu postupností $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} B_n &= \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} C_n &= \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \end{aligned}$$

Podľa vety o monotónnosti pravdepodobnosti (1.2) máme:

$$\begin{aligned} P(B_n) &\leq P(A_n) \leq P(C_n) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P(C_n) \end{aligned}$$

Postupnosť B_n je rastúca a C_n klesajúca, môžeme použiť dokázané tvrdenie z prvého kroku.

$$\begin{aligned} P(\lim_{n \rightarrow \infty} B_n) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \leq P(\lim_{n \rightarrow \infty} C_n) \\ P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \leq P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) \\ &\Downarrow \\ P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \end{aligned}$$

□

2 Náhodné veličiny

2.1 Indukovaný pravdepodobnostný priestor

Uvažujme pravdepodobnostný priestor (Ω, \mathcal{A}, P) . Nech zobrazenie

$$\mathbb{X} = \mathbb{X}(\omega) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_1$$

Teda, každému $\omega \in \Omega$ priradí zobrazenie \mathbb{X} nejaké reálne číslo.

Napr. pri hode kockou máme $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\}$. Potom môžeme mať $\omega_i \rightarrow i$, kde $i = 1, \dots, 6$, čiže $\omega_2 = 2, \omega_6 = 6$. Pri hode mincou zas môžeme písať $\Omega = \{\omega_L, \omega_R\}$ a priradiť $\omega_L \rightarrow 0, \omega_R \rightarrow 1$. Ako si však máme zvoliť priradenie $\mathbb{X} = \mathbb{X}(\omega)$? Tak, aby sa zachovala Kolmogorovova axiomatika a prípadné ďalšie vlastnosti pravdepodobnosti. Zvoľme teda

$$\mathbb{X} : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\mathbb{R}_1, \mathcal{A}_1, P_1)$$

pričom \mathcal{A}_1 má spĺňať Kolmogorovovu axiomatiku a P_1 vlastnosti pravdepodobnosti. To bude zabezpečené, ak

$$\mathcal{A}_1 = \{(-\infty, x) \subset \mathbb{R}_1 : \mathbb{X}^{-1}(-\infty, x) \in \mathcal{A}\} \quad (6)$$

$$\mathbb{X}^{-1}(-\infty, x) = \{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) < x\} \quad (7)$$

$$P_1(-\infty, x) = P(\{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) < x\}) \quad (8)$$

Poznámka 2.1

Posledný riadok budeme zapisovať ekvivalentne ako $P(\mathbb{X} < x)$. Teda

$$P_1(-\infty, x) = P(\{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) < x\}) = P(\mathbb{X} < x)$$

Domáca zábava 2.2

Ukážte, resp. overte, že rovnosti (6) – (8) spĺňajú Kolmogorovovu axiomatiku, resp. už definované vlastnosti pravdepodobnosti.

Definícia 2.1 (náhodná veličina)

Zobrazenie $\mathbb{X} = \mathbb{X}(\omega) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_1$ sa nazýva *náhodná veličina*, ak vzorom (proobrazom) ľubovoľného intervalu v \mathbb{R}_1 typu $(-\infty, x)$, $x \in \mathbb{R}_1$ je jav, teda

$$\left(\mathbb{X}^{-1}(-\infty, x) = \{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) < x\} \right) \in \mathcal{A}$$

Definícia 2.2 (zákon rozdelenia)

Pravdepodobnosť $P_1(\cdot)$ definovaná vzťahom (8) sa nazýva *pravdepodobnosť indukovaná zobrazením \mathbb{X}* alebo *zákon rozdelenia* náhodnej veličiny \mathbb{X} .

Definícia 2.3 (indukovaný pravdepodobnostný priestor)

Trojica $(\mathbb{R}_1, \mathcal{A}_1, P_1)$ kde \mathcal{A}_1, P_1 sú definované vzťahmi (6) – (8) sa nazýva *indukovaný pravdepodobnostný priestor*, resp. pravdepodobnostný priestor indukovaný zobrazením \mathbb{X} .

Poznámka 2.3

Pre označenie náhodných veličín sa používajú veľké tlačené polotučné písmená z konca slovenskej abecedy.

$$\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z} \quad \mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \dots, \mathbb{X}_n, \dots$$

Pre označenie hodnoty, ktorú náhodná veličina môže nadobudnúť používame malé písmená zodpovedajúce náhodnej veličine.

$$x, y, z \quad x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

3. Vyjdúc z ľavej strany nerovnosti máme:

$$D(a \cdot \mathbb{X} \pm b \cdot \mathbb{Y}) \stackrel{\text{z def}}{=} E[(a\mathbb{X} \pm b\mathbb{Y}) - E(a\mathbb{X} \pm b\mathbb{Y})]^2 \stackrel{\text{z predch. vety}}{=} E[a(\mathbb{X} - E(\mathbb{X})) \pm b(\mathbb{Y} - E(\mathbb{Y}))]^2$$

Umocnením tohto výrazu máme:

$$E[a^2(\mathbb{X} - E(\mathbb{X}))^2 + b^2(\mathbb{Y} - E(\mathbb{Y}))^2 + 2ab \cdot (\mathbb{X} - E(\mathbb{X}))(\mathbb{Y} - E(\mathbb{Y}))]$$

čo je po úpravách

$$a^2 E(\mathbb{X} - E(\mathbb{X}))^2 + b^2 E(\mathbb{Y} - E(\mathbb{Y}))^2 + 2ab \cdot E[(\mathbb{X} - E(\mathbb{X}))(\mathbb{Y} - E(\mathbb{Y}))]$$

Poznámka 2.14

Výraz $E[(\mathbb{X} - E(\mathbb{X}))(\mathbb{Y} - E(\mathbb{Y}))]$ sa zvykne označovať ako *kovariancia* náhodných veličín \mathbb{X}, \mathbb{Y} .

Dôsledok 2.15

Výpočtový tvar disperzie je

$$D(\mathbb{X}) = E(\mathbb{X}^2) - (E(\mathbb{X}))^2 = m_2 - m_1^2$$

kde $m_k = E(\mathbb{X}^k)$ pre $k = 1, 2$

Dôkaz:

$$\begin{aligned} D(\mathbb{X}) &\stackrel{\text{def}}{=} E(\mathbb{X} - E(\mathbb{X}))^2 = E[\mathbb{X}^2 - 2 \cdot \mathbb{X} \cdot \underbrace{E(\mathbb{X})}_{\text{konšt.}^8} + (E(\mathbb{X}))^2] \\ &= E(\mathbb{X}^2) - 2 \cdot E(\mathbb{X}) \cdot E(\mathbb{X}) + (E(\mathbb{X}))^2 \\ &= E(\mathbb{X}^2) - (E(\mathbb{X}))^2 \end{aligned}$$

□

Veta 2.6 (Čebyševova)

Nech náhodná veličina $\mathbb{X} \in L^2$. Potom pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ platí:

$$P(|\mathbb{X}| \geq \varepsilon) \leq \frac{E(\mathbb{X}^2)}{\varepsilon^2}$$

(Tento výraz sa nazýva Čebyševova nerovnosť.)

Dôkaz:

$$\begin{aligned} P(|\mathbb{X}| \geq \varepsilon) &= 1 - P(|\mathbb{X}| < \varepsilon) = 1 - P[\mathbb{X} \in (-\varepsilon, \varepsilon)] \\ &\stackrel{\text{spojitá}}{=} 1 - [F(\varepsilon) - F(-\varepsilon)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - \left[\int_{-\infty}^{\varepsilon} f(x) dx - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(x) dx \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x) dx \\ &= \int_{|x| \geq \varepsilon} f(x) dx \end{aligned} \quad \square$$

Keďže $\varepsilon > 0$, môžeme odhadnúť $|x| \geq \varepsilon \equiv x^2 \geq \varepsilon^2 > 0 \equiv \frac{x^2}{\varepsilon^2} \geq 1$. Pomocou tohto môžeme odhadnúť posledný integrál:

$$\int_{|x| \geq \varepsilon} f(x) dx \leq \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{x^2}{\varepsilon^2} \cdot f(x) dx$$

⁸ale prečo vlastne? A vôbec, celý ten dôkaz je mi nejasný...

Veta 2.4 (vlastnosti $E(\mathbb{X})$)

Nech náhodné veličiny $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \in L^1$ a nech $a, b \in \mathbb{R}$. Potom platí

1. $P(\mathbb{X} = a) = 1 \Rightarrow E(\mathbb{X}) = a$
2. $E(a \cdot \mathbb{X}) = a \cdot E(\mathbb{X})$
3. $E(a \cdot \mathbb{X} \pm b \cdot \mathbb{Y}) = a \cdot E(\mathbb{X}) \pm b \cdot E(\mathbb{Y})$

Dôkaz:

1. Nech $P(\mathbb{X} = a) = 1$. Keďže \mathbb{X} je diskrétna, máme

$$E(\mathbb{X}) = \sum_i x_i \cdot p_i = \sum_i a \cdot p_i = a \sum_i p_i \stackrel{\text{z norm. podm.}}{=} a \cdot 1 = a$$

2. Majme $E(a \cdot \mathbb{X})$. Ak označíme $a \cdot \mathbb{X}$ ako $g(\mathbb{X})$, môžeme použiť na ďalší výpočet lemu (2.12).

$$E(a \cdot \mathbb{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax) \cdot f(x) dx = a \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx}_{E(\mathbb{X})} = a \cdot E(\mathbb{X})$$

3. Označme $E(a \cdot \mathbb{X} \pm b \cdot \mathbb{Y})$ ako $E(g(\mathbb{X}, \mathbb{Y}))$. Potom máme:

$$E(a \cdot \mathbb{X} \pm b \cdot \mathbb{Y}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (ax \pm by) \cdot f(x, y) dy dx$$

Dôkaz dokončíme neskôr (pri charakteristikách viacerých náhodných veličín). \square

Veta 2.5 (o vlastnostiach disperzie)

Nech náhodné veličiny $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \in L^2$. Nech $a, b \in \mathbb{R}_1$. Potom platí:

1. $P(\mathbb{X} = a) = 1 \Rightarrow D(\mathbb{X}) = 0$
2. $D(a \cdot \mathbb{X}) = a^2 D(\mathbb{X})$
3. $D(a \cdot \mathbb{X} \pm b \cdot \mathbb{Y}) = a^2 \cdot D(\mathbb{X}) + b^2 \cdot D(\mathbb{Y}) \pm 2ab \cdot E[(\mathbb{X} - E(\mathbb{X}))(\mathbb{Y} - E(\mathbb{Y}))]$

Dôkaz:

1. Nech $P(\mathbb{X} = a) = 1$. Potom máme

$$D(\mathbb{X}) \stackrel{\text{def.}}{=} E(\mathbb{X} - E(\mathbb{X}))^2 \stackrel{\text{diskr.}}{=} \sum_i (x_i - E(\mathbb{X}))^2 \cdot p_i$$

Z predpokladu zrejme pre každé i platí $\mathbb{X}_i = a$. Ďalej z predchádzajúcej vety (bod 1.) máme, že $E(\mathbb{X}) = a$. Teda posledná suma je rovná:

$$\sum_i 0 \cdot p_i = 0$$

2. Počítajme:

$$\begin{aligned} D(a \cdot \mathbb{X}) &\stackrel{\text{def. } D(\cdot)}{=} E[(a \cdot \mathbb{X}) - E(a \cdot \mathbb{X})]^2 = E[(a \cdot \mathbb{X}) - a \cdot E(\mathbb{X})]^2 \\ &= E[a \cdot (\mathbb{X} - E(\mathbb{X}))]^2 = E[a^2 \cdot (\mathbb{X} - E(\mathbb{X}))^2] \\ &= a^2 \cdot E(\mathbb{X} - E(\mathbb{X}))^2 \stackrel{\text{def.}}{=} a^2 \cdot D(\mathbb{X}) \end{aligned} \quad \square$$

2.2 Distribučná funkcia a jej vlastnosti**Definícia 2.4 (distribučná funkcia)**

Nech \mathbb{X} je náhodná veličina. Reálna funkcia $F_{\mathbb{X}} : \mathbb{R}_1 \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ definovaná vzťahom

$$F_{\mathbb{X}}(x) = P(\mathbb{X} < x)$$

sa nazýva *distribučná funkcia náhodnej veličiny \mathbb{X}* .

V súlade s predchádzajúcimi označeniami platí:

$$F_{\mathbb{X}}(x) = P(\mathbb{X} < x) = P(\{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) < x\})$$

Poznámka 2.4

Ak narábame iba s jednou náhodnou veličinou², označujeme ju ako \mathbb{X} . Pri označení distribučnej funkcie vynecháme index \mathbb{X} , teda

$$F_{\mathbb{X}}(x) = F(x)$$

Veta 2.1 (základné vlastnosti distribučnej funkcie)

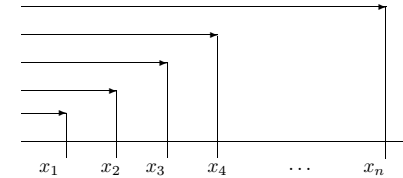
Nech $F_{\mathbb{X}}$ je distribučnou funkciou náhodnej veličiny \mathbb{X} . Potom platí

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ a $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$
2. $F(x)$ je neklesajúca
3. $F(x)$ je zľava spojitá

Dôkaz:

Ad 1. Uvažujme postupnosť reálnych čísel $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \rightarrow \infty$ pre $n \rightarrow \infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x_n \rightarrow \infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) \stackrel{\text{def. DF}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} P(\underbrace{\{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) < x_n\}}_{A_n})$$



Uvedomme si, že postupnosť $\{A_n\}$ je rastúca (premyslite si to³!). To podľa definície znamená,

že $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Počítajme ďalej:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \stackrel{\text{veta o spojitosti}}{=} P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\Omega) = 1,$$

čím sme dostali požadovanú rovnosť.

Tvrdenie pre druhú limitu ukážeme analogicky.

²V tomto semestri budeme zväčša pracovať iba s jednou náhodnou veličinou.

³Intuitívne – z predpokladu sa x_n pre $n \rightarrow \infty$ na osi posúva doprava, čiže možnosti pre platnosť nerovnosti v jave A_n sa zväčšujú, teda A_n je rastúca.

Ad 2. Nech $F(x)$ je neklesajúca funkcia. To je však ekvivalentné tomu, že $\forall x_1 < x_2 : F(x_1) \leq F(x_2)$. Uvažujme interval (x_1, x_2) na reálnej osi. Ak máme interval $(-\infty, x_2)$ potom zrejme platí, že

$$(-\infty, x_2) = (-\infty, x_1) \cup (x_1, x_2),$$

a navyše intervaly na pravej strane rovnosti sú disjunktné. Pre zodpovedajúce javy platí:

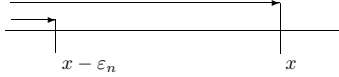
$$\begin{aligned} \{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) < x_2\} &= \{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) < x_1\} \cup \{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) \in (x_1, x_2)\} \\ P(\mathbb{X} < x_2) &= P(\mathbb{X} < x_1) + P(\mathbb{X} \in (x_1, x_2)) \\ F(x_2) &= F(x_1) + P(\mathbb{X} \in (x_1, x_2)) \geq F(x_1) \\ F(x_2) &\geq F(x_1) \end{aligned}$$

Ad 3. To, že $F(x)$ je zľava spojitá (v každom bode $x \in \mathbb{R}$) znamená, že limita zľava je rovná funkčnej hodnote, t.j. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(x - \varepsilon) = F(x)$.

Uvažujme postupnosť kladných čísel $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $\varepsilon_n \rightarrow 0$ pre $n \rightarrow \infty$. Počítajme:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} F(x - \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} F(x - \varepsilon_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x - \varepsilon_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) < x - \varepsilon_n\})$$

Opäť môžeme vyjadriť $(-\infty, x) = (-\infty, x - \varepsilon_n) \cup (x - \varepsilon_n, x)$, pričom na pravej strane sú



disjunktné intervaly. Pre príslušné javy máme:

$$\{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) < x\} = \{\omega \in \Omega : \mathbb{X} < x - \varepsilon_n\} \cup \{\omega \in \Omega : \mathbb{X} \in (x - \varepsilon_n, x)\}$$

Javy na pravej strane sú nezlučiteľné, preto

$$P(\mathbb{X} < x) = P(\mathbb{X} < x - \varepsilon_n) + P(\mathbb{X} \in (x - \varepsilon_n, x))$$

Pokračujme v počítaní limity.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(\{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) < x - \varepsilon_n\}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(\mathbb{X} < x - \varepsilon_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (P(\mathbb{X} < x) - P(\mathbb{X} \in (x - \varepsilon_n, x))) \end{aligned}$$

Keďže $P(\mathbb{X} < x)$ je vzhľadom na $n \rightarrow \infty$ konštantná, máme pokračovanie rovnosti

$$= P(\mathbb{X} < x) - \lim_{n \rightarrow \infty} P(\underbrace{\{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) \in (x - \varepsilon_n, x)\}}_{A_n})$$

Zrejme postupnosť javov $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca (opäť si to premyslite⁴!), platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\emptyset) = 0,$$

teda

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} F(x - \varepsilon) = P(\mathbb{X} < x) - 0 = P(\mathbb{X} < x),$$

čo sme mali dokázať. \square

⁴Vulgariizujúco povedané, pre $n \rightarrow \infty$ máme $\varepsilon_n \rightarrow 0$ a podľa obrázka $x - \varepsilon_n \rightarrow x$, čiže dĺžka intervalu konverguje k 0.

Definícia 2.11 (disperzia)

Nech náhodná veličina $\mathbb{X} \in L^2$. Disperziou (varianciou, rozptylom) náhodnej veličiny \mathbb{X} nazývame jej druhý centrálny moment

$$D(\mathbb{X}) = E(\mathbb{X} - E(\mathbb{X}))^2$$

Odmocninu disperzie, ktorú označíme ako

$$\sigma_x = \sqrt{D(\mathbb{X})}$$

nazveme smerodajná odchýlka.

Definícia 2.12 (normovaný moment k -teho rádu)

Nech náhodná veličina $\mathbb{X} \in L^k$, $k \geq 1$. Normovaným momentom k -teho rádu náhodnej veličiny \mathbb{X} nazveme číslo

$$E\left(\frac{\mathbb{X} - E(\mathbb{X})}{\sqrt{D(\mathbb{X})}}\right)^k = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x - E(\mathbb{X})}{\sqrt{D(\mathbb{X})}}\right)^k \cdot f(x) dx & \text{ak } \mathbb{X} \text{ je spojitá} \\ \sum_i \left(\frac{x_i - E(\mathbb{X})}{\sqrt{D(\mathbb{X})}}\right)^k \cdot p_i & \text{ak } \mathbb{X} \text{ je diskretná} \end{cases}$$

Definícia 2.13 (koeficient šikmosti)

Nech náhodná veličina $\mathbb{X} \in L^3$. Koeficientom šikmosti náhodnej veličiny \mathbb{X} nazývame jej tretí⁶ normovaný moment, t.j. číslo⁷:

$$\alpha_3 = E\left(\frac{\mathbb{X} - E(\mathbb{X})}{\sqrt{D(\mathbb{X})}}\right)^3$$

Definícia 2.14 (špicatosť rozdelenia)

Nech náhodná veličina $\mathbb{X} \in L^4$. Špicatosťou rozdelenia náhodnej veličiny \mathbb{X} nazývame jej štvrtý normovaný moment, t.j. číslo

$$\alpha_4 = E\left(\frac{\mathbb{X} - E(\mathbb{X})}{\sqrt{D(\mathbb{X})}}\right)^4$$

Koeficientom špicatosti je číslo

$$\alpha_4 - 3$$

Poznámka 2.11

- Koeficient α_3 je momentovou charakteristikou šikmosti. Koeficient $\alpha_4 - 3$ je momentovou charakteristikou špicatosti.

- K dôkazu viet o vlastnostiach $E(\mathbb{X}), D(\mathbb{X})$ potrebujeme nasledovné pomocné tvrdenie.

Lemma 2.12 (veta o prenose integrácie)

Nech náhodné veličiny $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \in L^1$. Nech \mathbb{X} je spojitá s hustotou $f(x)$. Nech funkcia $g(x)$ je spojitá a $g(x) \cdot f(x)$ integrovateľná v \mathbb{R}_1 . Potom platí pre $\mathbb{Y} = g(\mathbb{X})$:

$$E(g(\mathbb{X})) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x) dx$$

Poznámka 2.13

V predchádzajúcej vete je \mathbb{Y} funkciou náhodnej veličiny \mathbb{X} . Ak by sme chceli počítať $E(g(\mathbb{X})) = E(\mathbb{Y})$ z definície, museli by sme určiť $E(\mathbb{Y}) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(y) dy$. Tu však prichádzame k problému, ak nepoznáme hustotu $f(y)$. Táto lema nám však umožní tento problém obísť.

⁶Ak existuje k -tý normovaný moment, tak existujú aj všetky momenty nižších rádoov.

⁷Prípád $\alpha_3 = 0$ nastane len pre symetrické rozdelenie.

- charakteristika polohy (stredú)
- charakteristika variability (rozptýlenosti okolo stredú)
- charakteristika šikmosti (asymetrie)
- charakteristika špicatosti

2. podľa spôsobu výpočtu charakteristiky

- momentové charakteristiky
- kvantilové charakteristiky

2.4.1 Momentové charakteristiky

Definícia 2.7 (trieda L^k)

Hovoríme, že náhodná veličina \mathbb{X} patrí do triedy $L^k : k \geq 1$, ak platí:

- buď $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^k \cdot f(x) dx < \infty$ pre \mathbb{X} spojitú
- alebo $\sum_i |x_i|^k \cdot p_i < \infty$ pre \mathbb{X} diskretnú

(suma, resp. integrál je absolútne konvergentná)

Definícia 2.8 (počiatočný moment k -teho rádu)

Nech náhodná veličina $\mathbb{X} \in L^k, k \geq 1$. Počiatočným momentom k -teho rádu (k -tým počiatočným momentom) náhodnej veličiny \mathbb{X} nazývame číslo

$$E(\mathbb{X}^k) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f(x) dx & \text{pre } \mathbb{X} \text{ spojitú} \\ \sum_i x_i^k \cdot p_i & \text{pre } \mathbb{X} \text{ diskretnú} \end{cases}$$

Všimnime si, že existencia sumy, resp. integrálu je zaručená podľa definície (2.7).

Definícia 2.9 (stredná hodnota)

Nech náhodná veličina $\mathbb{X} \in L^1$. Potom *strednou hodnotou* náhodnej veličiny \mathbb{X} nazývame jej prvý počiatočný moment, t.j. číslo

$$E(\mathbb{X}) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx & \text{ak } \mathbb{X} \text{ je spojité} \\ \sum_i x_i \cdot p_i & \text{ak } \mathbb{X} \text{ je diskretné} \end{cases}$$

Poznámka 2.10

Stredná hodnota $E(\mathbb{X})$ je momentovou charakteristikou polohy.

Definícia 2.10 (centrálny moment k -teho rádu)

Nech náhodná veličina $\mathbb{X} \in L^k$. *Centrálnym momentom* k -teho rádu (k -tým *centrálnym momentom*) náhodnej veličiny \mathbb{X} nazývame číslo

$$E(\mathbb{X} - E(\mathbb{X}))^k = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(\mathbb{X}))^k \cdot f(x) dx & \text{ak } \mathbb{X} \text{ je spojitá} \\ \sum_i (x_i - E(\mathbb{X}))^k \cdot p_i & \text{ak } \mathbb{X} \text{ je diskretná} \end{cases}$$

Veta 2.2

Nech $F(x)$ je distribučná funkcia náhodnej veličiny \mathbb{X} . Nech $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Potom platí:

$$P(\mathbb{X} \in \langle a, b \rangle) = F(b) - F(a)$$

Dôkaz: Uvážme interval (a, b) . Vieme, že interval

$$(-\infty, b) = (-\infty, a) \cup \langle a, b \rangle$$

(už sme sa s takýmto trikom stretli!). Zároveň vieme, že tieto intervaly sú disjunktné, potom však aj zodpovedajúce javy sú nezlučiteľné. Teda

$$\begin{aligned} \{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) < b\} &= \{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) < a\} \cup \{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) \in \langle a, b \rangle\} \\ P(\mathbb{X}(\omega) < b) &= P(\mathbb{X} < a) + P(\mathbb{X} \in \langle a, b \rangle) \end{aligned}$$

Vyjadriťme jav $P(\mathbb{X} \in \langle a, b \rangle)$:

$$\begin{aligned} P(\mathbb{X} \in \langle a, b \rangle) &= P(\mathbb{X} < b) - P(\mathbb{X} < a) \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned} \quad \square$$

Poznámka 2.5

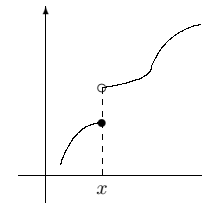
Zo základných vlastností distribučnej funkcie $F(x)$ vyplýva iba spojitost' zľava, nie spojitost' v bode. Teda $F(x)$ môže byť nespojitá sprava. Ak existuje bod $x \in \mathbb{R}$ taký, že

$$\lim_{x \rightarrow 0+} F(x + \varepsilon) \neq F(x)$$

potom pri označení $\lim_{x \rightarrow 0+} F(x + \varepsilon) = F(x + 0)$ máme, že

$$F(x + 0) - F(x) > 0,$$

(lebo F je neklesajúca) a teda graf $F(x)$ v bode x je prerušený (*má skok*) a bod x sa nazýva *bodom nespojitosti* $F(x)$. Veľkosť skoku v tomto bode potom bude $P[\mathbb{X} = x] = F(x + 0) - F(x) > 0$.



Veta 2.3

Množina všetkých bodov nespojitosti distribučnej funkcie $F(x)$ je najvyššou spočítateľná.

Dôkaz: Rozdeľme definičný obor funkcie $F(x)$ na disjunktné intervaly dĺžky 1, teda

$$\mathbb{R}_1 = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} I_n, \text{ kde } I_n = \langle n, n+1 \rangle$$

Budeme hľadať body nespojitosti na I_n . Ak bude ich množina spočítateľná, potom bude spočítateľná aj množina bodov nespojitosti na celom \mathbb{R}_1 .

Označme S_n^k množinu niektorých bodov nespojitosti na I_n , konkrétne

$$S_n^k = \{x \in I_n : P[\mathbb{X} = x] \geq \frac{1}{k}, k \in \mathbb{Z}^+\}$$

Zrejme platí $1 = P(\Omega) = P(\mathbb{R}_1)$. Ďalej máme $P(\mathbb{R}_1) > P(I_n)$, keďže $\mathbb{R}_1 \supset I_n$. Čiže

$$1 = P(\mathbb{R}_1) \geq P(I_n) \geq P(S_n^k)$$

lebo rovnako $S_n^k \subseteq I_n$.
Z toho máme, že

$$P(S_n^k) \geq |S_n^k| \cdot \frac{1}{k}$$

Použitím tejto⁵ a horeuvedenej nerovnosti dostávame

$$\begin{aligned} 1 &\geq |S_n^k| \cdot \frac{1}{k} \\ k &\geq |S_n^k| \end{aligned}$$

čiže S_n^k má len konečný počet bodov. Ak však zoberieme $\lim_{k \rightarrow \infty} S_n^k$ dostávame množinu obsahujúcu všetky body nespojitosti. Táto množina je navyše konečná. Na záver nám stačí zobrať zjednotenie

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} S_n^k \right)$$

čo je vlastne spočítateľné zjednotenie spočítateľných množín. \square

2.3 Diskrétné a absolútne spojité rozdelenie

Definícia 2.5 (diskrétné rozdelenie, normovacia podmienka)

Hovoríme, že náhodná veličina \mathbb{X} má *diskrétné rozdelenie* (je *diskrétna*), ak existuje postupnosť reálnych čísel $\{x_i\}_{i \in I}$ a odpovedajúca postupnosť reálnych čísel $\{p_i\}_{i \in I}$ taká, že

$$p_i = P(\mathbb{X} = x_i)$$

a platí

$$\sum_{i \in I} p_i = 1 \quad \& \quad F_{\mathbb{X}} = \sum_{i: x_i < \mathbb{X}} p_i$$

Prvá suma v tomto výraze je tzv. *normovacia podmienka*.

Lomená čiara spájajúca body $[x_i, p_i]$ sa nazýva *polygón rozdelenia* náhodnej veličiny \mathbb{X} .

Poznámka 2.6

Zrejme body x_i pre ktoré $p_i = P(\mathbb{X} = x_i) > 0$ sú bodmi nespojitosti $F(x)$ a veľkosť skoku na grafe je práve p_i .

Príklad 2.7

Nech náhodná veličina \mathbb{X} nadobúda hodnoty x_i s pravdepodobnosťou p_i podľa tabuľky:

$\frac{x_i}{p_i}$	$\frac{1}{0,1}$	$\frac{2}{0,6}$	$\frac{3}{0,2}$	$\frac{4}{0,1}$
-------------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------

Určte distribučnú funkciu $F(x)$, nakreslite graf, určte pravdepodobnosť, že $P(\mathbb{X} \in (2, 3))$.

Riešenie:

Distribučná funkcia: $F(x) = \sum_{x_i < x} p_i$.

$$\begin{aligned} \text{ak } x \leq 1 &\Rightarrow F(x) = 0 \\ \text{ak } x \in (1, 2) &\Rightarrow F(x) = p_1 = 0,1 \\ \text{ak } x \in (2, 3) &\Rightarrow F(x) = p_1 + p_2 = 0,7 \\ \text{ak } x \in (3, 4) &\Rightarrow F(x) = p_1 + p_2 + p_3 = 0,9 \\ \text{ak } x > 4 &\Rightarrow F(x) = 1 \end{aligned}$$

Teraz určíme $P(\mathbb{X} \in (2, 3))$. Ktoré body nespojitosti obsahuje interval $(2, 3)$? Len jeden, a to bod 3. Teda $P(\mathbb{X} = 3) = 0,2$.

Definícia 2.6 (absolútne spojité rozdelenie, hustota rozdelenia)

Hovoríme, že náhodná veličina \mathbb{X} má *absolútne spojité rozdelenie* (je *spojitá*), ak existuje nezáporná, v \mathbb{R}_1 integrovateľná funkcia $f(x), x \in \mathbb{R}_1$ taká, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad \& \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

Funkcia $f(x)$ sa nazýva *hustota rozdelenia* náhodnej veličiny \mathbb{X} (*hustota* \mathbb{X}).

Poznámka 2.8

Ak má $F(x)$ v bode x deriváciu, tak $f(x) = F'(x)$.

Príklad 2.9

Nech náhodná veličina \mathbb{X} má rozdelenie dané hodnotou:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ak } x \in (0, 1) \\ 0 & \text{ak } x \notin (0, 1) \end{cases}$$

(t.j. v bodoch 0, 1 je $f(x) = 0$).

Určte $F(x)$, nakreslite grafy $f(x), F(x)$, určte pravdepodobnosť, že $P(|\mathbb{X}|) < \frac{1}{2}$.

Riešenie.

Vieme, že $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$. Pre $F(x)$ potom platí:

$$\begin{aligned} \text{ak } x \leq 0 &\Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0 \\ \text{ak } x \in (0, 1) &\Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x 1 dt = 0 + [t]_0^x = x \\ \text{ak } x \geq 1 &\Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^1 1 dt + \int_1^x dt = 0 + [t]_0^1 = 1 \end{aligned}$$

Teda pre $F(x)$ platí:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ak } x \leq 0 \\ x & \text{ak } x \in (0, 1) \\ 1 & \text{ak } x \geq 1 \end{cases}$$

$F(x)$ je v bodoch 0, 1 síce spojité, ale nie je tam diferencovateľná.

Pre pravdepodobnosť platí:

$$\begin{aligned} P\left(|\mathbb{X}| < \frac{1}{2}\right) &= P\left(\mathbb{X} \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) \\ &= P\left(\mathbb{X} \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) - P\left(\mathbb{X} = -\frac{1}{2}\right) \\ &= F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2.4 Charakteristika náhodných veličín

Číselne charakteristiky delíme:

1. podľa toho, čo charakterizujú

⁵Vie mi niekto povedať, prečo toto platí? Ušiel mi výklad. — pozn. sadzača