Prírodovedecká fakulta UPJŠ Košice

Pravdepodobnosť a štatistika

(poznámky z prednášok zimného semestra predmetu Pravdepodobnosť a štatistika)

prednáša: RNDr. Valéria Skřivánková, CSc.

Verzia 10. júna 2003
Zostavil Róbert Novotný
`http://skmi.science.upjs.sk/~novotnyr`
Typeset by LaTeX. Illustrations by jPicEdt.

Obsah

1 Axiomatika v teórii pravdepodobnosti **3**
1.1 Náhodné javy a operácie s javmi . . . 3
1.2 Pravdepodobnosť a jej rôzne definície . . . 5
1.3 Vlastnosti pravdepodobnosti . . . 6
1.4 Podmienená pravdepodobnosť . . . 10
1.5 Postupnosť javov a jej limita . . . 11

2 Náhodné veličiny **14**
2.1 Indukovaný pravdepodobnostný priestor . . . 14
2.2 Distribučná funkcia a jej vlastnosti . . . 15
2.3 Diskrétne a absolútne spojité rozdelenie . . . 18
2.4 Charakteristika náhodných veličín . . . 19
2.4.1 Momentové charakteristiky . . . 20
2.4.2 Kvantilové charakteristiky . . . 27
2.5 Charakteristická funkcia . . . 30

Literatúra

[1] Riečan a kol.: Pravdepodobnosť a matematická štatistika, Bratislava 1984

[2] Potocký a kol.: Zbierka úloh z pravdepodobnosti a matematickej štatistiky, Bratislava 1986

[3] Skřivánková: Pravdepodobnosť v príkladoch, Košice 1999

[4] Anděl: Matematika náhody, Praha 2000

Tento materiál pokrýva prvé dve kapitoly látky zo zimného semestra predmetu Pravdepodobnosť a štatistika, ktorý prednáša RNDr. Valéria Skřivánková na Prírodovedeckej fakulte UPJŠ v Košiciach. Jeho obsahom sú definície, vety a dôkazy, ktoré odzneli na prednáškach v akademickom roku 2002/2003. Text nebol autorizovaný a môže obsahovať chyby, či preklepy (budem však rád, keď ich oznámite na adrese `novotnyr@skmi.science.upjs.sk`). Na tento materiál sa nevzťahuje žiadna záruka.

1 Axiomatika v teórii pravdepodobnosti

1.1 Náhodné javy a operácie s javmi

Historický vznik pravdepodobnosti:

- 1654 – Pascal, Fermat – klasická definícia pravdepodobnosti (kombinatorická)
- 1777 – Buffon – geometrická definícia pravdepodobnosti
- 1900 – Hilbertove problémy – nie všetky úlohy sa dajú riešiť pomocou kombinatorickej alebo geometrickej pravdepodobnosti.
- 1933 – Kolmogorov – axiomatická definícia pravdepodobnosti

Náhodný jav – pokus, ktorého výsledky nie sú deterministicky dané; ktorý má viac rôznych, navzájom sa vylučujúcich výsledkov.
Elementárny jav – ω (omega) – každý možný výsledok náhodného pokusu.

Napr. hod kockou: ω_1 znamená, že padla 1, $\omega_2, \ldots, \omega_6$.
hod mincou: ω_R ak padol rub, ω_L, ak padlo líce

Výberový priestor – Ω – množina všetkých možných výsledkov pokusu.
Napr. hod kockou: $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_6\}$
Náhodný jav – ozn. A, B, resp. $A_1, A_2, \ldots$ – ľubovoľná podmnožina výberového priestoru Ω.
Napr.: označme jav A jav, keď padne pri hode kockou párne číslo. Zrejme $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$.

Definícia 1.1 (nastatie javu)
Hovoríme, že *nastal jav* A, ak vo výsledku náhodného pokusu bol vybratý prvok $\omega \in A$.
Hovoríme, že jav A *nenastal* (resp. nastal jav *opačný* k javu A), ak vybratý prvok $\omega \notin A$. Označujeme $A^{\complement}$.

$$A^{\complement} = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$$

Definícia 1.2 (jav istý, jav nemožný)
Množina všetkých elementárnych javov sa nazýva *jav istý*. Označujeme Ω.
Množina, ktorá neobsahuje žiaden elementárny jav sa nazýva *jav nemožný*. Označujeme $\emptyset$.
Zrejme platí:

$$\emptyset = \Omega^{\complement}$$

Definícia 1.3 (relácie medzi javmi)
Hovoríme, že jav A *má za následok* jav B, ak nastanie javu A znamená aj nastanie javu B.

$$A \subset B$$

Hovoríme, že javy A, B sú ekvivalentné (ozn. $A = B$), ak A má za následok B a B má za následok A.

$$A \subset B \wedge B \subset A$$

Definícia 1.4 (operácie s javmi)
Zjednotenie javov A, B je jav $A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \vee \omega \in B\}$.
Prienik javov A, B je jav $A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \wedge \omega \in B\}$.
Rozdiel javov A, B je jav $A - B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \wedge \omega \notin B\} = A \cap B^{\complement}$.

Vzhľadom na to, že javy sa definujú ako množiny, platia nasledovné vlastnosti:

1. $A \cup A^{\complement} = \Omega$
2. $A \cap A^{\complement} = \emptyset$
3. $A \cup \Omega = \Omega$

$A \cap \Omega = A$

4. $A \cup \emptyset = A$

   $A \cap \emptyset = \emptyset$

5. $(A^{\complement})^{\complement} = A$

Ďalej platia nasledovné pravidlá:

1.	komutatívny zákon	$A \cup B = B \cup A$
		$A \cap B = B \cap A$
2.	asociatívny zákon	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C)$
		$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C)$
3.	distributívny zákon	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
		$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4.	De Morganove pravidlo	$(A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement}$
		$(A \cap B)^{\complement} = A^{\complement} \cup B^{\complement}$

Definícia 1.5 (nezlučiteľné a navzájom nezlučiteľné javy)
Hovoríme, že javy A, B sú *nezlučiteľné*, ak platí, že $A \cap B = \emptyset$. Hovoríme, že javy $A_1, \ldots$ sú navzájom nezlučiteľné, ak

$$\forall i, j : i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset.$$

Definícia 1.6 (rozklad Ω)
Hovoríme, že javy $A_i, i = 1, 2, \ldots$ tvoria *rozklad výberového priestoru* Ω, ak tvoria úplný systém nezlučiteľných javov:

1. $\bigcup_i A_i = \Omega$

2. $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$

Definícia 1.7 (axiomatická definícia javového poľa)
Neprázdny systém $\mathcal{A}$ podmnožín výberového priestoru Ω, ktorý obsahuje ako prvok Ω a je uzavretý vzhľadom na komplement a spočítateľné zjednotenie, sa nazýva *javové pole nad výberovým priestorom* Ω.
T.j. $\mathcal{A}$ je javové pole, ak spĺňa nasledovné 3 axiómy:

1. $\Omega \in A$

2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^{\complement} \in \mathcal{A}$

3. $A_i \in \mathcal{A}$ pre $i = 1, 2, \ldots \Rightarrow \bigcup_i A_i \in \mathcal{A}$

Dôsledok 1.1
Javové pole $\mathcal{A}$ v zmysle definície 1.7 je uzavreté aj na prienik a rozdiel.

Dôkaz:

- uzavretosť $\mathcal{A}$ na prienik. Overme, či platí $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \cap B \in \mathcal{A}$.
  Nech $A, B \in \mathcal{A} \overset{\text{ax. 2}}{\Longrightarrow} A^{\complement}, B^{\complement} \in \mathcal{A} \overset{\text{ax.3}}{\Longrightarrow} A^{\complement} \cup B^{\complement} \in \mathcal{A} \overset{\text{de Morg.}}{\Longrightarrow} (A \cap B)^{\complement} \in \mathcal{A} \overset{\text{ax.2}}{\Longrightarrow} A \cap B \in \mathcal{A}$.

- uzavretosť $\mathcal{A}$ na rozdiel. Overme, či $\forall A, B \in \mathcal{A} : A - B \in \mathcal{A}$.
  Nech $A, B \in \mathcal{A} \overset{\text{ax.2}}{\Longrightarrow} A \cap B^{\complement} \in \mathcal{A} \Rightarrow A - B \in \mathcal{A}$. □

1.2 Pravdepodobnosť a jej rôzne definície

Z historického hľadiska - prvé matematické definície pravdepodobnosti:

1. klasická – 17. stor. – Pascal, Fermat
2. geometrická – 18. stor. – Buffon
3. axiomatická – 20. stor. – Kolmogorov

Prvé dva prípady sú v podstate špeciálnym prípadom axiomatickej definície pravdepodobnosti. Zároveň majú klasická a geometrická „definícia" obmedzenú pravdepodobnosť, dajú sa použiť len za istých podmienok:

1. typ výberového priestoru
   - diskrétny
   - spojitý
2. typ rozdelenia možností na výberovom priestore Ω
   - rovnomerné
   - nerovnomerné

Definícia 1.8 (diskrétny a spojitý výberový priestor)
Výberový priestor Ω sa nazýva *diskrétny*, ak pozostáva z konečného alebo spočítateľného počtu elementárnych javov. V opačnom prípade hovoríme, že výberový priestor Ω je spojitý.

Príklad 1.2
- diskrétny Ω – hod kockou, mincou, výber kariet
- spojitý Ω – sledovanie hladiny rieky, výber čísla z intervalu $(0, 1)$.

Definícia 1.9 (rovnomerné rozdelenie)
- *Rovnomerné rozdelenie* možností na diskrétnom výberovom priestore Ω s konečným počtom prvkov znamená, že každý elementárny jav má rovnakú šancu nastať a to
$$1 : |\Omega|, \quad |\Omega| < \infty$$
- *Rovnomerné rozdelenie* možností na spojitom výberovom priestore Ω s konečnou a kladnou mierou $0 < \mathrm{m}(\Omega) < \Omega$ znamená, že každá elementárna oblasť v Ω má rovnakú šancu byť volená a to
$$1 : \mathrm{m}(\Omega),$$
kde $\mathrm{m}(\cdot)$ znamená veľkosť (mieru) množiny javu v zátvorkách.

Definícia 1.10 (klasická definícia pravdepodobnosti)
Nech výberový priestor Ω je diskrétny s konečným počtom prvkov $|\Omega| < \infty$, nech rozdelenie možností na Ω je rovnomerné. Potom pravdepodobnosť ľubovoľného javu $A \in \mathcal{A}$ je číslo
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}, \tag{1}$$
kde $|A|, |\Omega|$ znamená počet prvkov množín $|A|, |\Omega|$.

Poznámka 1.3
Klasická definícia sa nazýva aj *kombinatorická*, pretože $|A|, |\Omega|$ sa najčastejšie určujú kombinatoricky.

Definícia 1.11 (geometrická definícia pravdepodobnosti)
Nech výberový priestor Ω je spojitý s konečnou a kladnou mierou $0 < \mathrm{m}(\Omega) < \infty$. Nech rozdelenie na Ω je rovnomerné. Potom pravdepodobnosť javu $A \in \mathcal{A}$, $A \subset \Omega$ je číslo

$$P(A) = \frac{\mathrm{m}(A)}{\mathrm{m}(\Omega)}, \tag{2}$$

kde $\mathrm{m}(\cdot)$ je miera (veľkosť) množiny v zátvorkách.

Poznámka 1.4
Miery $\mathrm{m}(A)$, $\mathrm{m}(\Omega)$ sa vo všeobecnosti vypočítajú pomocou určitého integrálu, v jednoduchších prípadoch ako dĺžka úsečky, plošný obsah, resp. objem známych geometrických útvarov.

Definícia 1.12 (axiomatická definícia pravdepodobnosti)
Reálna funkcia $P(\cdot)$ definovaná na javovom poli $\mathcal{A}$ (podmnožiny výberového priestoru Ω) pomocou axióm:

1. $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$ (axióma nezápornosti)
2. $P(\Omega) = 1$ (axióma úplnosti)
3. $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$, pričom $A_i \cap A_j = \emptyset$ pre $i \neq j$ (axióma σ-aditívnosti)

sa nazýva *pravdepodobnosť* (pravdepodobnostná miera) javu A.

Cvičenie 1.5
Overte, či klasická a geometrická pravdepodobnosť spĺňajú axiomatickú definíciu.

Definícia 1.13 (pravdepodobnostný priestor)
Trojica $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, kde Ω je výberový priestor, $\mathcal{A}$ javové pole nad Ω, $P(\cdot)$ pravdepodobnosť javu v zátvorkách sa nazýva *pravdepodobnostný priestor*.

Poznámka 1.6 (faktorizácia výberového priestoru)
Podmienka konečnosti v klasickej (i geometrickej) definícii pravdepodobnosti) je dosť obmedzujúca. Ak počet prvkov Ω je ∞, ale existuje taká relácia ekvivalencie R nad prvkami Ω, ktorá zoradí všetky prvky do konečného počtu tzv. „tried ekvivalencie“, potom možno použiť klasickú (resp. geometrickú) definíciu pre nový *faktorizovaný priestor*, ktorý označujeme

$$\Omega|R.$$

1.3 Vlastnosti pravdepodobnosti

Veta 1.1
Nech je daný pravdepodobnostný priestor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Nech javy $A, B \in \mathcal{A}$. Potom

1. $P(A^{\complement}) = 1 - P(A)$
2. $P(\emptyset) = 0$
3. $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

Dôkaz:

- Vieme, že $A \cup A^{\complement} = \Omega$. Potom aj $P(A \cup A^{\complement}) = P(\Omega) = 1$. Zároveň však z axiómy σ-aditívnosti máme $P(A \cup A^{\complement}) = P(A) + P(A^{\complement}) = P(\Omega)$. Z toho však vyplýva, že

$$P(A^{\complement}) = 1 - P(A).$$

- Ukážme, že $P(\emptyset) = 0$.
  $P(\emptyset) = P(\Omega^{\complement}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$
- Uvážme množiny A, B. Vieme, že
  $$A = (A - B) \cup (A \cap B).$$
  Potom pre pravdepodobnosť javu A platí:
  $$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B).$$
  Z tejto rovnosti vyjadríme
  $$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B).$$

Poznámka 1.7
Ak $B \subset A$, potom $P(A - B) = P(A) - P(B)$.

Veta 1.2 (o monotónnosti pravdepodobnosti)
Nech je daný pravdepodobnostný priestor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a nech A, B sú náhodné javy a nech $A \subset B$. Potom
$$P(A) \leq P(B).$$

Dôkaz: Majme množiny A, B. Vyjadrime B nasledovne:
$$B = A \cup (B - A).$$
Potom
$$P(B) = P(A) + \underbrace{P(B - A)}_{\geq 0} \geq P(A).$$

Dôsledok 1.8
$$\forall A \in \mathcal{A} : 0 \leq P(A) \leq 1$$

Dôkaz: Stačí využiť vetu 1.2 a všimnúť si, že $P(A) \leq P(\Omega) = 1$. □

Veta 1.3 (o poloaditívnosti pravdepodobnosti)
Nech je daný $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Nech $A_i \in \mathcal{A}, i = 1, 2, \ldots$ sú ľubovoľné javy. Potom
$$P\left(\bigcup_i A_i\right) \leq \sum_i P(A_i).$$

Dôkaz: Označme postupne
$$B_1 = A_1, B_2 = A_2 - A_1, B_3 = A_3 - (A_1 \cup A_2), \ldots, B_k = A_k - \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i.$$
Uvedomme si, že javy $B_1, \ldots, B_k$ sú nezlučiteľné a platí
$$\bigcup_k B_k = \bigcup_k A_k.$$
Ďalej tiež platí, že pre každé k je $B_k \subset A_k$, čiže aj $\forall k : P(B_k) \leq P(A_k)$. S využitím týchto vlastností
$$P\left(\bigcup_k A_k\right) = P\left(\bigcup_k B_k\right) \stackrel{3.\ ax}{=} \sum_k P(B_k) \leq \sum_k P(A_k),$$
čiže
$$P\left(\bigcup_k A_k\right) \leq \sum_k P(A_k).$$

Veta 1.4 (o sčítaní pravdepodobnosti)
Nech je daný $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *a nech* $A_i \in \mathcal{A}, i = 1, \ldots, n$ *sú ľubovoľné. Potom*

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \\ &- \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} P(A_i \cap A_j) + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \\ &+ \ldots + \\ &+ (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \end{aligned}$$

Dôkaz: Vykonáme úplnou matematickou indukciou.

1. Nech $n = 2$. Potom vieme, že $A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A_2 - A_1)$ a pre pravdepodobnosť tohto zjednotenia platí:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2 - A_1) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2).$$

2. Teraz nech tvrdenie platí pre $n - 1$. Indukčný predpoklad bude:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i) - \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n-2} P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$$

Počítajme:

$$\begin{aligned} P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) &= P(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \cup A_n) \\ &= P(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i) + P(A_n) - P(\underbrace{(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i)) \cap A_n}_{\text{použijeme distrib. zákon}}) \\ &= P(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i) + P(A_n) - P(\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n)) \\ &\overset{\text{I.P.}}{=} \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i) - \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n-2} P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) + P(A_n) - \\ &\quad -\left[\sum_{i=1}^{n-1} P(A_i \cap A_n) - \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} P(A_i \cap A_j \cap A_n) + \ldots + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{n-2} P(\bigcap_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n))\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n-1} P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) \end{aligned}$$

□

Definícia 1.14 (nezávislé a totálne nezávislé javy)

Hovoríme, že javy $A, B \in \mathcal{A}$ sú *nezávislé*, ak

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Hovoríme, že javy $A_i \in \mathcal{A}, i = 1, \ldots,$ sú navzájom *(totálne) nezávislé*, ak pre ľubovoľnú podmnožinu indexov platí:

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_j\right) = \prod_{j=1}^{k} P(A_j)$$

Poznámka 1.9
Aby javy $A_1, \ldots, A_n$ boli navzájom nezávislé, nestačí aby boli nezávislé po dvojiciach.

Veta 1.5
Nech $A, B \in \mathcal{A}$ sú nezávislé. Potom sú nezávislé aj javy

$$A, B^{\complement} \qquad A^{\complement}, B \qquad A^{\complement}, B^{\complement}$$

Dôkaz:

1. $P(A \cap B^{\complement}) = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot (1 - P(B)) = P(A) \cdot P(B^{\complement})$
2. $P(A^{\complement} \cap B)$ ukážeme analogicky.
3. $P(A^{\complement} \cap B^{\complement}) = P(A^{\complement} - B) = P(A^{\complement}) - P(A^{\complement} \cap B) = P(A^{\complement}) - P(B - A) = P(A^{\complement}) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B)$ □

Veta 1.6
Nech $A_i \in \mathcal{A}, i = 1, \ldots, n$ sú navzájom nezávislé. Potom

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = 1 - P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^{\complement}) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(A_i^{\complement})$$

Dôkaz: Pre javy A_i pre $i = 1, 2, \ldots, n$ a ich zjednotenia zrejme platí:

$$(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \cup (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^{\complement} = \Omega$$

Pre pravdepodobnosť potom máme

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^{\complement}\right) = P(\Omega) = 1$$

Ekvivalentným prepísaním druhého sčítanca získame

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^{\complement}\right) = 1,$$

čo je ekvivalentné

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^{\complement}\right).$$

Na záver využijeme predpoklad vzájomnej nezávislosti javov A_i a definíciu (1.14), čím získame tvrdenie vety. □

1.4 Podmienená pravdepodobnosť

Definícia 1.15 (podmienená pravdepodobnosť)
Nech $A, H \in \mathcal{A}$. Nech $P(H) > 0$. *Podmienenú pravdepodobnosť* javu A za podmienky, že nastal jav $H, H \in \mathcal{A}$ definujeme vzťahom:

$$P(A|H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)}, \text{ pričom } P(H) > 0$$

Veta 1.7 (o násobení pravdepodobnosti)
Nech je daný pravdepodobnostný priestor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Nech javy $A_i \in \mathcal{A}$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$ a nech $P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) > 0$. Potom platí:

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n| \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) \tag{3}$$

Poznámka 1.10
V tejto vete nepredpokladáme nezávislosť javov. Ďalej pravdepodobnosť podmienky nesmie byť 0, ale to je zaručené, pretože ak $P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \neq 0$, tak aj pravdepodobnosti $P(A_1), P(A_1 \cap A_2) \ldots$ sú nenulové.

Dôkaz:

1. Dokážeme vzťah (3) pre najmenšie n, t.j. pre $n = 2$. Overíme, či platí $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1)$.
   Z definície podmienenej pravdepodobnosti máme:
   $$P(A_2|A_1) = \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)}, \quad P(A_1) > 0$$
   Stačí rovnicu prenásobiť $P(A_1)$ a využiť komutatívny zákon, čím získavame tvrdenie.
2. Teraz budeme predpokladať platnosť (3) pre $n-1$. Overíme, či tvrdenie platí pre n. Indukčný predpoklad bude:
   $$\text{IP:} \quad P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_{n-1}| \bigcap_{i=1}^{n-2} A_i)$$
   Vyjdeme z ľavej strany tvrdenia (3):
   $$\begin{aligned} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) &= P[(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) \cap A_n] \\ &\overset{\text{využi 1.)}}{=\!=} P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) \cdot P(A_n| \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) \\ &\overset{\text{IP}}{=\!=} P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_{n-1}| \bigcap_{i=1}^{n-2} A_i) \cdot P(A_n| \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) \end{aligned}$$ □

Veta 1.8 (o úplnej pravdepodobnosti)
Nech je daný pravdepodobnostný priestor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Nech javy $H_i \in \mathcal{A}$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$ tvoria rozklad Ω. Nech $P(H_i) > 0$ pre každé $i = 1, 2, \ldots, n$. Potom pre ľubovoľný jav $A \in \mathcal{A}$ platí:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i) \tag{4}$$

Poznámka 1.11
Rovnica (4) sa nazýva *formula úplnej pravdepodobnosti*, resp. *úplná formula.*

Dôkaz: Vyjdeme z ľavej strany rovnosti a použijeme vlastnosť prieniku A s Ω.

$$P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} H_i)$$

Toto môžeme napísať, keďže z predpokladu H_i tvoria rozklad, t.j. $\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$. Ďalej aplikujeme distributívny zákon:

$$P(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} H_i) = P\left[\bigcup_{i=1}^{n}(A \cap H_i)\right] = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap H_i)$$

V poslednom kroku sme využili to, že $A \cap H_i$ pre $i = 1, \ldots, n$ sú disjunktné javy. Teraz použijeme definíciu podmienenej pravdepodobnosti a predpoklad, že $P(H_i) > 0$:

$$\sum_{i=1}^{n} P(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot \frac{P(A \cap H_i)}{P(H_i)} = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i)$$

Veta 1.9 (Bayesova)
Nech je daný pravdepodobnostný priestor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. *Nech javy* $H_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ *tvoria rozklad výberového priestoru* Ω. *Nech* $P(H_i) > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. *Potom pre ľubovoľný jav* $A \in \mathcal{A}$ *taký, že* $P(A) > 0$ *platí:*

$$P(H_j|A) = \frac{P(H_j) \cdot P(A|H_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i)}$$

Dôkaz: Z definície podmienenej pravdepodobnosti:

$$P(H_j|A) = \frac{P(H_j \cap A)}{P(A)}$$

Keďže z predpokladu $P(A) > 0$, môžeme rovnicu prenásobiť $P(A)$.
Definícia podmienenej pravdepodobnosti samozrejme platí, aj keď vzájomne vymeníme javy A a H_j, teda

$$P(A|H_j) = \frac{P(A \cap H_j)}{P(H_j)}$$

Túto rovnicu môžeme tiež prenásobiť $P(H_j)$, lebo v predpoklade máme zaručenú nenulovosť. Využijeme komutatívnosť prieniku $H_j \cap A$ a porovnáme horeuvedené rovnice, čím máme

$$P(A) \cdot P(H_j|A) = P(H_j) \cdot P(A|H_j) = P(A \cap H_j)$$

Vyjadrime teraz $P(H_j|A)$:

$$P(H_j|A) = \frac{P(H_j) \cdot P(A|H_j)}{P(A)}$$

Stačí už len použiť formulu úplnosti na člen $P(A)$ v menovateli pravej strany rovnosti (všetky predpoklady sú splnené) a máme požadované tvrdenie. □

1.5 Postupnosť javov a jej limita

Uvažujme pravdepodobnostný priestor $\Omega, \mathcal{A}, P$ a javy $A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$. Symbolom $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ budeme označovať postupnosť javov.

Definícia 1.16 (monotónnosť postupnosti javov)

a) Hovoríme, že postupnosť javov $\{A_n\}_n^\infty$ je *rastúca*, ak $\forall n \in \mathbb{N} : A_n \subset A_{n+1}$[1]

b) Hovoríme, že postupnosť javov $\{A_n\}_n^\infty$ je *klesajúca*, ak $\forall n \in \mathbb{N} : A_n \supset A_{n+1}$

c) Hovoríme, že postupnosť javov $\{A_n\}_n^\infty$ je *monotónna*, ak je rastúca alebo klesajúca.

Definícia 1.17 (limita postupnosti javov)

a) *Hornou limitou* postupnosti javov $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ nazývame jav

$$A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \limsup_{n\to\infty} A_n$$

b) *Dolnou limitou* postupnosti javov $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ nazývame jav

$$A_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \liminf_{n\to\infty} A_n$$

c) Hovoríme, že postupnosť javov $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ *má limitu*, ak sa jej horná a dolná limita rovnajú.

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A = A^* = A_*$$

Poznámka 1.12

Ak postupnosť $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ má limitu, potom

1. ak $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ je rastúca, potom
$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

2. ak $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ je je klesajúca, potom
$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

Veta 1.10 (o spojitosti pravdepodobnosti)

Nech je daný pravdepodobnostný priestor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Nech $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$. Nech existuje limita $\lim_{n\to\infty} A_n$. Potom platí

$$P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) \tag{5}$$

Dôkaz:

1. dokážeme platnosť (5) pre monotónne postupnosti.
Nech $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ je rastúca a má limitu. Postupne označíme

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 \\ B_2 &= A_2 - A_1 \\ B_3 &= A_3 - A_2 \\ &\vdots \\ B_k &= A_k - A_{k-1} \end{aligned}$$

[1] $A_n \subset A_{n+1}$ čítame „A_n má za následok A_{n+1}“

Zrejme javy B_k sú nezlučiteľné, $\bigcup_k A_k = \bigcup_k B_k$ a $B_k \subset A_k$. Počítajme:

$$\begin{aligned}
P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) &\overset{A_n \text{ je rastúca}}{=} P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = P(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(B_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(B_k) \\
&= \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{k=1}^{n} B_k) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \\
&= \lim_{n\to\infty} P(A_n)
\end{aligned}$$

Tvrdenie pre klesajúcu postupnosť ukážeme analogicky.

2. zovšeobecnime prvý krok na všetky postupnosti (nie len monotónne).
Nech existuje limita postupnosti javov A_n. Z definície to znamená, že $A_* = A^* = A$. Prepíšme toto tvrdenie podľa definície a označme si javy B_n, C_n nasledovne:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k}_{B_n} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k}_{C_n}$$

Uvedomme si (!), že postupnosť javov B_n je rastúca a postupnosť javov C_n je klesajúca. Ďalej platia inklúzie $B_n \subset A_n \subset C_n$. Počítajme teraz limitu postupností $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} B_n &= \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \lim_{n\to\infty} A_n \\
\lim_{n\to\infty} C_n &= \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \lim_{n\to\infty} A_n
\end{aligned}$$

Podľa vety o monotónnosti pravdepodobnosti (1.2) máme:

$$\begin{array}{rcccc}
P(B_n) & \leq & P(A_n) & \leq & P(C_n) \\
\lim_{n\to\infty} P(B_n) & \leq & \lim_{n\to\infty} P(A_n) & \leq & \lim_{n\to\infty} P(C_n)
\end{array}$$

Postupnosť B_n je rastúca a C_n klesajúca, môžme použiť dokázané tvrdenie z prvého kroku.

$$\begin{array}{rcccc}
P(\lim_{n\to\infty} B_n) & \leq & \lim_{n\to\infty} P(A_n) & \leq & P(\lim_{n\to\infty} C_n) \\
P(\lim_{n\to\infty} A_n) & \leq & \lim_{n\to\infty} P(A_n) & \leq & P(\lim_{n\to\infty} A_n)
\end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$P(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

$\square$

2 Náhodné veličiny

2.1 Indukovaný pravdepodobnostný priestor

Uvažujme pravdepodobnostný priestor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Nech zobrazenie

$$\mathbb{X} = \mathbb{X}(\omega) : \Omega \to \mathbb{R}_1$$

Teda, každému $\omega \in \Omega$ priradí zobrazenie $\mathbb{X}$ nejaké reálne číslo.
Napr. pri hode kockou máme $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\}$. Potom môžeme mať $\omega_i \to i$, kde $i = 1, \ldots, 6$, čiže $\omega_2 = 2, \omega_6 = 6$. Pri hode mincou zas môžeme písať $\Omega = \{\omega_L, \omega_R\}$ a priradiť $\omega_L \to 0, \omega_R \to 1$. Ako si však máme zvoliť priradenie $\mathbb{X} = \mathbb{X}(\omega)$? Tak, aby sa zachovala Kolmogorovova axiomatika a prípadné ďalšie vlastnosti pravdepodobnosti. Zvoľme teda

$$\mathbb{X} : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}_1, \mathcal{A}_1, P_1)$$

pričom $\mathcal{A}_1$ má spĺňať Kolmogorovovu axiomatiku a P_1 vlastnosti pravdepodobnosti. To bude zabezpečené, ak

$$\mathcal{A}_1 = \{(-\infty, x) \subset \mathbb{R}_1 : \mathbb{X}^{-1}(-\infty, x) \in \mathcal{A}\} \tag{6}$$
$$\mathbb{X}^{-1}(-\infty, x) = \{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) < x\} \tag{7}$$
$$P_1(-\infty, x) = P(\{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) < x\}) \tag{8}$$

Poznámka 2.1
Posledný riadok budeme zapisovať ekvivalentne ako $P(\mathbb{X} < x)$. Teda

$$P_1(-\infty, x) = P(\{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) < x\}) = P(\mathbb{X} < x)$$

Domáca zábava 2.2
Ukážte, resp. overte, že rovnosti (6) – (8) spĺňajú Kolmogorovou axiomatiku, resp. už definované vlastnosti pravdepodobnosti.

Definícia 2.1 (náhodná veličina)
Zobrazenie $\mathbb{X} = \mathbb{X}(\omega) : \Omega \to \mathbb{R}_1$ sa nazýva *náhodná veličina*, ak vzorom (proobrazom) ľubovoľného intervalu v $\mathbb{R}_1$ typu $(-\infty, x)$, $x \in \mathbb{R}_1$ je jav, teda

$$\Big(\mathbb{X}^{-1}(-\infty, x) = \{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) < x\}\Big) \in \mathcal{A}$$

Definícia 2.2 (zákon rozdelenia)
Pravdepodobnosť $P_1(\cdot)$ definovaná vzťahom (8) sa nazýva *pravdepodobnosť indukovaná zobrazením* $\mathbb{X}$ alebo *zákon rozdelenia* náhodnej veličiny $\mathbb{X}$.

Definícia 2.3 (indukovaný pravdepodobnostný priestor)
Trojica $(\mathbb{R}_1, \mathcal{A}_1, P_1)$ kde A_1, P_1 sú definované vzťahmi (6) – (8) sa nazýva *indukovaný pravdepodobnostný priestor*, resp. pravdepodobnostný priestor indukovaný zobrazením $\mathbb{X}$.

Poznámka 2.3
Pre označenie náhodných veličín sa používajú veľké tlačené polotučné písmená z konca slovenskej abecedy.

$$\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z} \qquad \mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \ldots, \mathbb{X}_n, \ldots$$

Pre označenie hodnoty, ktorú náhodná veličina môže nadobudnúť používame malé písmená zodpovedajúce náhodnej veličine.

$$x, y, z \qquad x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

2.2 Distribučná funkcia a jej vlastnosti

Definícia 2.4 (distribučná funkcia)
Nech $\mathbb{X}$ je náhodná veličina. Reálna funkcia $F_{\mathbb{X}} : \mathbb{R}_1 \to \langle 0, 1\rangle$ definovaná vzťahom

$$F_{\mathbb{X}}(x) = P(\mathbb{X} < x)$$

sa nazýva *distribučná funkcia náhodnej veličiny* $\mathbb{X}$.
V súlade s predchádzajúcimi označeniami platí:

$$F_{\mathbb{X}}(x) = P(\mathbb{X} < x) = P(\{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) < x\})$$

Poznámka 2.4
Ak narábame iba s jednou náhodnou veličinou[2], označujeme ju ako $\mathbb{X}$. Pri označení distribučnej funkcie vynecháme index $\mathbb{X}$, teda

$$F_{\mathbb{X}}(x) = F(x)$$

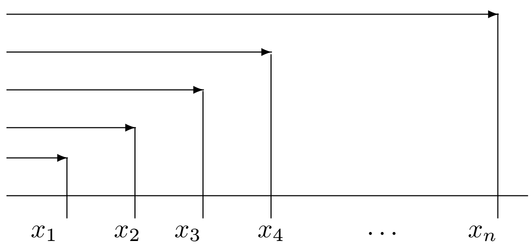
Veta 2.1 (základné vlastnosti distribučnej funkcie)
Nech $F_{\mathbb{X}}$ je distribučnou funkciou náhodnej veličiny $\mathbb{X}$. Potom platí

1. $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$ a $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$
2. $F(x)$ *je neklesajúca*
3. $F(x)$ *je zľava spojitá*

Dôkaz:

Ad 1. Uvažujme postupnosť reálnych čísel $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \to \infty$ pre $n \to \infty$.

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x_n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) \overset{\text{def. DF}}{=\!=} \lim_{n\to\infty} P(\underbrace{\{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) < x_n\}}_{A_n})$$



Uvedomme si, že postupnosť $\{A_n\}$ je rastúca (premyslite si to[3]!). To podľa definície znamená, že $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Počítajme ďalej:

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) \overset{\text{veta o spojitosti}}{=\!=} P(\lim_{n\to\infty} A_n) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\Omega) = 1,$$

čím sme dostali požadovanú rovnosť.
Tvrdenie pre druhú limitu ukážeme analogicky.

[2] V tomto semestri budeme zväčša pracovať iba s jednou náhodnou veličinou.
[3] Intuitívne – z predpokladu sa x_n pre $n \to \infty$ na osi posúva doprava, čiže možnosti pre platnosť nerovnosti v jave A_n sa zväčšujú, teda A_n je rastúca.

Ad 2. Nech $F(x)$ je neklesajúca funkcia. To je však ekvivalentné tomu, že $\forall x_1 < x_2 : F(x_1) \leq F(x_2)$. Uvažujme interval (x_1, x_2) na reálnej osi. Ak máme interval $(-\infty, x_2)$ potom zrejme platí, že

$$(-\infty, x_2) = (-\infty, x_1) \cup \langle x_1, x_2),$$

a navyše intervaly na pravej strane rovnosti sú disjunktné. Pre zodpovedajúce javy platí:

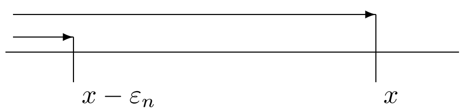
$$\begin{aligned}
\{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) < x_2\} &= \{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) < x_1\} \cup \{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) \in \langle x_1, x_2)\} \\
P(\mathbb{X} < x_2) &= P(\mathbb{X} < x_1) + P(\mathbb{X} \in \langle x_1, x_2)) \\
F(x_2) &= F(x_1) + P(\mathbb{X} \in \langle x_1, x_2)) \geq F(x_1) \\
F(x_2) &\geq F(x_1)
\end{aligned}$$

Ad 3. To, že $F(x)$ je zľava spojitá (v každom bode $x \in \mathbb{R}$) znamená, že limita zľava je rovná funkčnej hodnote, t.j. $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} F(x - \varepsilon) = F(x)$.

Uvažujme postupnosť kladných čísel $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $\varepsilon_n \to 0$ pre $n \to \infty$. Počítajme:

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} F(x - \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0+} F(x - \varepsilon_n) = \lim_{n \to \infty} F(x - \varepsilon_n) = \lim_{n \to \infty} P\Big(\{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) < x - \varepsilon_n\}\Big)$$

Opäť môžeme vyjadriť $(-\infty, x) = (-\infty, x - \varepsilon_n) \cup \langle x - \varepsilon_n)$, pričom na pravej strane sú



disjunktné intervaly. Pre príslušné javy máme:

$$\{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) < x\} = \{\omega \in \Omega : \mathbb{X} < x - \varepsilon_n\} \cup \{\omega \in \Omega : \mathbb{X} \in \langle x - \varepsilon_n, x)\}$$

Javy na pravej strane sú nezlučiteľné, preto

$$P(\mathbb{X} < x) = P(\mathbb{X} < x - \varepsilon_n) + P(\mathbb{X} \in \langle x - \varepsilon_n, x))$$

Pokračujme v počítaní limity.

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to \infty} P\Big(\{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) < x - \varepsilon_n\}\Big) &= \lim_{n \to \infty} P(\mathbb{X} < x - \varepsilon_n) \\
&= \lim_{n \to \infty} \Big(P(\mathbb{X} < x) - P(\mathbb{X} \in \langle x - \varepsilon_n, x))\Big)
\end{aligned}$$

Keďže $P(\mathbb{X} < x)$ je vzhľadom na $n \to \infty$ konštantná, máme pokračovanie rovnosti

$$= P(\mathbb{X} < x) - \lim_{n \to \infty} P\Big(\underbrace{\{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) \in \langle x - \varepsilon_n, x)\}}_{A_n}\Big)$$

Zrejme postupnosť javov $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca (opäť si to premyslite[4]!), platí

$$\lim_{n \to \infty} P(A_n) = P(\lim_{n \to \infty} A_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\emptyset) = 0,$$

teda

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} F(x - \varepsilon) = P(\mathbb{X} < x) - 0 = P(\mathbb{X} < x),$$

čo sme mali dokázať. □

[4]Vulgarizujúco povedané, pre $n \to \infty$ máme $\varepsilon_n \to 0$ a podľa obrázka $x - \varepsilon_n \to x$, čiže dĺžka intervalu konverguje k 0.

Veta 2.2
Nech $F(x)$ je distribučná funkcia náhodnej veličiny $\mathbb{X}$. Nech $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Potom platí:

$$P(\mathbb{X} \in \langle a, b)) = F(b) - F(a)$$

Dôkaz: Uvážme interval (a, b). Vieme, že interval

$$(-\infty, b) \quad = \quad (-\infty, a) \cup \langle a, b)$$

(už sme sa s takýmto trikom stretli!). Zároveň vieme, že tieto intervaly sú disjunktné, potom však aj zodpovedajúce javy sú nezlučiteľné. Teda

$$\begin{aligned} \{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) < b\} &= \{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) < a\} \cup \{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) \in \langle a, b)\} \\ P(\mathbb{X}(\omega) < b) &= P(\mathbb{X} < a) + P(\mathbb{X} \in \langle a, b)) \end{aligned}$$

Vyjadríme jav $P(\mathbb{X} \in \langle a, b))$:

$$\begin{aligned} P(\mathbb{X} \in \langle a, b)) &= P(\mathbb{X} < b) - P(\mathbb{X} < a) \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

□

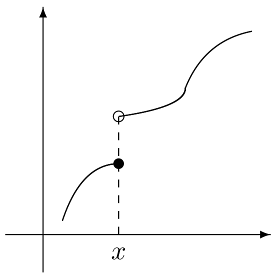
Poznámka 2.5
Zo základných vlastností distribučnej funkcie $F(x)$ vyplýva iba spojitosť zľava, nie spojitosť v bode. Teda $F(x)$ môže byť nespojitá sprava. Ak existuje bod $x \in \mathbb{R}$ taký, že

$$\lim_{x \to 0+} F(x + \varepsilon) \neq F(x)$$

potom pri označení $\lim\limits_{x \to 0+} F(x + \varepsilon) = F(x + 0)$ máme, že

$$F(x + 0) - F(x) > 0,$$

(lebo F je neklesajúca) a teda graf $F(x)$ v bode x je prerušený (*má skok*) a bod x sa nazýva *bodom nespojitosti* $F(x)$. Veľkosť skoku v tomto bode potom bude $P[\mathbb{X} = x] = F(x + 0) - F(x) > 0$.



Veta 2.3
Množina všetkých bodov nespojitosti distribučnej funkcie $F(x)$ je nanajvýš spočítateľná.

Dôkaz: Rozdeľme definičný obor funkcie $F(x)$ na disjunktné intervaly dĺžky 1, teda

$$\mathbb{R}_1 = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} I_n, \text{ kde } I_n = \langle n, n + 1)$$

Budeme hľadať body nespojitosti na I_n. Ak bude ich množina spočítateľná, potom bude spočítateľná aj množina bodov nespojitosti na celom $\mathbb{R}_1$.
Označme S_n^k množinu niektorých bodov nespojitosti na I_n, konkrétne

$$S_n^k = \{x \in I_n : P[\mathbb{X} = x] \geq \frac{1}{k}, k \in \mathbb{Z}^+\}$$

Zrejme platí $1 = P(\Omega) = P(\mathbb{R}_1)$. Ďalej máme $P(\mathbb{R}_1) > P(I_n)$, keďže $\mathbb{R}_1 \supset I_n$. Čiže

$$1 = P(\mathbb{R}_1) \geq P(I_n) \geq P(S_n^k)$$

lebo rovnako $S_n^k \subseteq I_n$.
Z toho máme, že

$$P(S_n^k) \geq |S_n^k| \cdot \frac{1}{k}$$

Použitím tejto[5] a horeuvedenej nerovnosti dostávame

$$\begin{aligned} 1 &\geq |S_n^k| \cdot \frac{1}{k} \\ k &\geq |S_n^k| \end{aligned}$$

čiže S_n^k má len konečný počet bodov. Ak však zoberieme $\lim\limits_{k\to\infty} S_n^k$ dostávame množinu obsahujúcu všetky body nespojitosti. Táto množina je navyše konečná. Na záver nám stačí zobrať zjednotenie

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\lim_{k\to\infty} S_n^k \right)$$

čo je vlastne spočítateľné zjednotenie spočítateľných množín. □

2.3 Diskrétne a absolútne spojité rozdelenie

Definícia 2.5 (diskrétne rozdelenie, normovacia podmienka)
Hovoríme, že náhodná veličina $\mathbb{X}$ má *diskrétne rozdelenie* (*je diskrétna*), ak existuje postupnosť reálnych čísel $\{x_i\}_{i\in I}$ a odpovedajúca postupnosť reálnych čísel $\{p_i\}_{i\in I}$ taká, že

$$p_i = P(\mathbb{X} = x_i)$$

a platí

$$\sum_{i\in I} p_i = 1 \qquad \& \qquad F_{\mathbb{X}} = \sum_{i: x_i < \mathbb{X}} p_i$$

Prvá suma v tomto výraze je tzv. *normovacia podmienka.*
Lomená čiara spájajúca body $[x_i, p_i]$ sa nazýva *polygón rozdelenia* náhodnej veličiny $\mathbb{X}$.

Poznámka 2.6
Zrejme body x_i pre ktoré $p_i = P(\mathbb{X} = x_i) > 0$ sú bodmi nespojitosti $F(x)$ a veľkosť skoku na grafe je práve p_i.

Príklad 2.7
Nech náhodná veličina $\mathbb{X}$ nadobúda hodnoty x_i s pravdepodobnosťou p_i podľa tabuľky:

x_i	1	2	3	4
p_i	0,1	0,6	0,2	0,1

Určte distribučnú funkciu $F(x)$, nakreslite graf, určte pravdepodobnosť, že $P(\mathbb{X} \in (2, 3\rangle)$.
Riešenie:
Distribučná funkcia: $F(x) = \sum\limits_{x_i < x} p_i$.

$$\begin{aligned} \text{ak } x \leq 1 &\quad\Rightarrow\quad F(x) = 0 \\ \text{ak } x \in (1, 2\rangle &\quad\Rightarrow\quad F(x) = p_1 = 0{,}1 \\ \text{ak } x \in (2, 3\rangle &\quad\Rightarrow\quad F(x) = p_1 + p_2 = 0{,}7 \\ \text{ak } x \in (3, 4\rangle &\quad\Rightarrow\quad F(x) = p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}9 \\ \text{ak } x > 4 &\quad\Rightarrow\quad F(x) = 1 \end{aligned}$$

[5] Vie mi niekto povedať, prečo toto platí? Ušiel mi výklad. — pozn. sadzača

Teraz určíme $P[\mathbb{X} \in (2,3\rangle]$. Ktoré body nespojitosti obsahuje interval $(2,3\rangle$? Len jeden, a to bod 3. Teda $P[\mathbb{X} = 3] = 0{,}2$.

Definícia 2.6 (absolútne spojité rozdelenie, hustota rozdelenia)
Hovoríme, že náhodná veličina $\mathbb{X}$ má *absolútne spojité rozdelenie* (*je spojitá*), ak existuje nezáporná, v $\mathbb{R}_1$ integrovateľná funkcia $f(x), x \in \mathbb{R}_1$ taká, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1 \qquad \& \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Funkcia $f(x)$ sa nazýva *hustota rozdelenia* náhodnej veličiny $\mathbb{X}$ (*hustota* $\mathbb{X}$).

Poznámka 2.8
Ak má $F(x)$ v bode x deriváciu, tak $f(x) = F'(x)$.

Príklad 2.9
Nech náhodná veličina $\mathbb{X}$ má rozdelenie dané hodnotou:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ak } x \in (0,1) \\ 0 & \text{ak } x \notin (0,1) \end{cases}$$

(t.j. v bodoch 0, 1 je $f(x) = 0$).
Určte $F(x)$, nakreslite grafy $f(x), F(x)$, určte pravdepodobnosť, že $P(|\mathbb{X}|) < \frac{1}{2}$.
Riešenie.
Vieme, že $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$. Pre $F(x)$ potom platí:

$$\begin{aligned}
\text{ak } x \le 0 \quad &\Rightarrow \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0 \\
\text{ak } x \in (0,1) \quad &\Rightarrow \quad F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} 1\,\mathrm{d}t = 0 + [t]_0^x = x \\
\text{ak } x \ge 1 \quad &\Rightarrow \quad F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{1} 1\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{x} \mathrm{d}t = 0 + [t]_0^1 = 1
\end{aligned}$$

Teda pre $F(x)$ platí:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ak } x \le 0 \\ x & \text{ak } x \in (0,1) \\ 1 & \text{ak } x \ge 1 \end{cases}$$

$F(x)$ je v bodoch 0, 1 síce spojitá, ale nie je tam diferencovateľná.
Pre pravdepodobnosť platí:

$$\begin{aligned}
P\left(|\mathbb{X}| < \frac{1}{2}\right) &= P\left(\mathbb{X} \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) \\
&= P\left(\mathbb{X} \in \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) - P\left(\mathbb{X} = -\frac{1}{2}\right) \\
&= F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(-\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

2.4 Charakteristika náhodných veličín

Číselne charakteristiky delíme:

1. podľa toho, čo charakterizujú

- charakteristika polohy (stredu)
- charakteristika variability (rozptýlenosti okolo stredu)
- charakteristika šikmosti (asymetrie)
- charakteristika špicatosti

2. podľa spôsobu výpočtu charakteristiky
   - momentové charakteristiky
   - kvantilové charakteristiky

2.4.1 Momentové charakteristiky

Definícia 2.7 (trieda L^k)
Hovoríme, že náhodná veličina $\mathbb{X}$ patrí do triedy $L^k : k \geq 1$, ak platí:

- buď $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$ pre $\mathbb{X}$ spojitú
- alebo $\sum_i |x_i|^k \cdot p_i < \infty$ pre $\mathbb{X}$ diskrétnu

(suma, resp. integrál je absolútne konvergentná)

Definícia 2.8 (počiatočný moment k-teho rádu)
Nech náhodná veličina $\mathbb{X} \in L^k, k \geq 1$. *Počiatočným momentom k-teho rádu* (k-tým počiatočným momentom) náhodnej veličiny $\mathbb{X}$ nazývame číslo

$$E(\mathbb{X}^k) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x & \text{pre } \mathbb{X} \text{ spojitú} \\ \displaystyle\sum_i x_i^k \cdot p_i & \text{pre } \mathbb{X} \text{ diskrétnu} \end{cases}$$

Všimnime si, že existencia sumy, resp. integrálu je zaručená podľa definície (2.7).

Definícia 2.9 (stredná hodnota)
Nech náhodná veličina $\mathbb{X} \in L^1$. Potom *strednou hodnotou* náhodnej veličiny $\mathbb{X}$ nazývame jej prvý počiatočný moment, t.j. číslo

$$E(\mathbb{X}) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x & \text{ak } \mathbb{X} \text{ je spojité} \\ \displaystyle\sum_i x_i \cdot p_i & \text{ak } \mathbb{X} \text{ je diskrétne} \end{cases}$$

Poznámka 2.10
Stredná hodnota $E(\mathbb{X})$ je momentovou charakteristikou polohy.

Definícia 2.10 (centrálny moment k-teho rádu)
Nech náhodná veličina $\mathbb{X} \in L^k$. *Centrálnym momentom* k-tého rádu (*k-tým centrálnym momentom*) náhodnej veličiny $\mathbb{X}$ nazývame číslo

$$E(\mathbb{X} - E(\mathbb{X}))^k = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (x - E(\mathbb{X}))^k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x & \text{ak } \mathbb{X} \text{ je spojitá} \\ \displaystyle\sum_i (x_i - E(\mathbb{X}))^k \cdot p_i & \text{ak } \mathbb{X} \text{ je diskrétna} \end{cases}$$

Definícia 2.11 (disperzia)
Nech náhodná veličina $\mathbb{X} \in L^2$. *Disperziou* (varianciou, rozptylom) náhodnej veličiny $\mathbb{X}$ nazývame jej druhý centrálny moment

$$D(\mathbb{X}) = E(\mathbb{X} - E(\mathbb{X}))^2$$

Odmocninu disperzie, ktorú označíme ako

$$\sigma_x = \sqrt{D(\mathbb{X})}$$

nazveme *smerodajná odchýlka*.

Definícia 2.12 (normovaný moment k-teho rádu)
Nech náhodná veličina $\mathbb{X} \in L^k$, $k \geq 1$. *Normovaným momentom k-teho rádu* náhodnej veličiny $\mathbb{X}$ nazveme číslo

$$E\left(\frac{\mathbb{X} - E(\mathbb{X})}{\sqrt{D(\mathbb{X})}}\right)^k = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x - E(\mathbb{X})}{\sqrt{D(\mathbb{X})}}\right)^k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x & \text{ak } \mathbb{X} \text{ je spojitá} \\ \displaystyle\sum_i \left(\frac{x_i - E(\mathbb{X})}{\sqrt{D(\mathbb{X})}}\right)^k \cdot p_i & \text{ak } \mathbb{X} \text{ je diskrétna} \end{cases}$$

Definícia 2.13 (koeficient šikmosti)
Nech náhodná veličina $\mathbb{X} \in L^3$. *Koeficientom šikmosti* náhodnej veličiny $\mathbb{X}$ nazývame jej tretí[6] normovaný moment, t.j. číslo[7]:

$$\alpha_3 = E\left(\frac{\mathbb{X} - E(\mathbb{X})}{\sqrt{D(\mathbb{X})}}\right)^3$$

Definícia 2.14 (špicatosť rozdelenia)
Nech náhodná veličina $\mathbb{X} \in L^4$. *Špicatosťou rozdelenia* náhodnej veličiny $\mathbb{X}$ nazývame jej štvrtý normovaný moment, t.j. číslo

$$\alpha_4 = E\left(\frac{\mathbb{X} - E(\mathbb{X})}{\sqrt{D(\mathbb{X})}}\right)^4$$

Koeficientom špicatosti je číslo

$$\alpha_4 - 3$$

Poznámka 2.11

1. Koeficient α_3 je momentovou charakteristikou šikmosti.
   Koeficient $\alpha_4 - 3$ je momentovou charakteristikou špicatosti.
2. K dôkazu viet o vlastnostiach $E(\mathbb{X}), D(\mathbb{X})$ potrebujeme nasledovné pomocné tvrdenie.

Lemma 2.12 (veta o prenose integrácie)
Nech náhodné veličiny $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \in L^1$. Nech $\mathbb{X}$ je spojitá s hustotou $f(x)$. Nech funkcia $g(x)$ je spojitá a $g(x) \cdot f(x)$ integrovateľná v $\mathbb{R}_1$. Potom platí pre $\mathbb{Y} = g(\mathbb{X})$:

$$E(g(\mathbb{X})) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$$

Poznámka 2.13
V predchádzajúcej vete je $\mathbb{Y}$ funkciou náhodnej veličiny $\mathbb{X}$. Ak by sme chceli počítať $E(g(\mathbb{X})) = E(\mathbb{Y})$ z definície, museli by sme určiť $E(\mathbb{Y}) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(y)\,\mathrm{d}y$. Tu však prichádzame k problému, ak nepoznáme hustotu $f(y)$. Táto lema nám však umožní tento problém obísť.

[6] Ak existuje k-tý normovaný moment, tak existujú aj všetky momenty nižších rádov.
[7] Prípad $\alpha_3 = 0$ nastane len pre symetrické rozdelenie.

Veta 2.4 (vlastnosti $\boldsymbol{E}(\mathbb{X})$)
Nech náhodné veličiny $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \in L^1$ *a nech* $a, b \in \mathbb{R}$. *Potom platí*

1. $P(\mathbb{X} = a) = 1 \Rightarrow E(\mathbb{X}) = a$
2. $E(a \cdot \mathbb{X}) = a \cdot E(\mathbb{X})$
3. $E(a \cdot \mathbb{X} \pm b \cdot \mathbb{Y}) = a \cdot E(\mathbb{X}) \pm b \cdot E(\mathbb{Y})$

Dôkaz:

1. Nech $P(\mathbb{X} = a) = 1$. Keďže $\mathbb{X}$ je diskrétna, máme
$$E(\mathbb{X}) = \sum_i x_i \cdot p_i = \sum_i a \cdot p_i = a \sum_i p_i \overset{\text{z norm. podm.}}{=\!=} a \cdot 1 = a$$
2. Majme $E(a \cdot \mathbb{X})$. Ak označíme $a \cdot \mathbb{X}$ ako $g(\mathbb{X})$, môžeme použiť na ďalší výpočet lemu (2.12).
$$E(a \cdot \mathbb{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax) \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = a \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x}_{E(\mathbb{X})} = a \cdot E(\mathbb{X})$$
3. Označme $E(a \cdot \mathbb{X} \pm b \cdot \mathbb{Y})$ ako $E(g(\mathbb{X}, \mathbb{Y}))$. Potom máme:
$$E(a \cdot \mathbb{X} \pm b \cdot \mathbb{Y}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (ax \pm by) \cdot f(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$
Dôkaz dokončíme neskôr (pri charakteristikách viacerých náhodných veličín). □

Veta 2.5 (o vlastnostiach disperzie)
Nech náhodné veličiny $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \in L^2$. *Nech* $a, b \in \mathbb{R}_1$. *Potom platí:*

1. $P(\mathbb{X} = a) = 1 \Rightarrow D(\mathbb{X}) = 0$
2. $D(a \cdot \mathbb{X}) = a^2 D(\mathbb{X})$
3. $D(a \cdot \mathbb{X} \pm b \cdot \mathbb{Y}) = a^2 \cdot D(\mathbb{X}) + b^2 \cdot D(\mathbb{Y}) \pm 2ab \cdot E[(\mathbb{X} - E(\mathbb{X}))(\mathbb{Y} - E(\mathbb{Y}))]$

Dôkaz:

1. Nech $P(\mathbb{X} = a) = 1$. Potom máme
$$D(\mathbb{X}) \overset{\text{z def.}}{=\!=} E(\mathbb{X} - E(\mathbb{X}))^2 \overset{\text{diskr.}}{=\!=} \sum_i (x_i - E(\mathbb{X}))^2 \cdot p_i$$
Z predpokladu zrejme pre každé i platí $\mathbb{X}_i = a$. Ďalej z predchádzajúcej vety (bod 1.) máme, že $E(\mathbb{X}) = a$. Teda posledná suma je rovná:
$$\sum_i 0 \cdot p_i = 0$$
2. Počítajme:
$$\begin{aligned} D(a \cdot \mathbb{X}) &\overset{\text{def. } D(\cdot)}{=\!=} E[(a \cdot \mathbb{X}) - E(a \cdot \mathbb{X})]^2 = E[(a \cdot \mathbb{X}) - a \cdot E(\mathbb{X})]^2 \\ &= E[a \cdot (\mathbb{X} - E(\mathbb{X}))]^2 = E[a^2 \cdot (\mathbb{X} - E(\mathbb{X}))^2] \\ &= a^2 \cdot E(\mathbb{X} - E(\mathbb{X}))^2 \overset{\text{z def.}}{=\!=} a^2 \cdot D(\mathbb{X}) \end{aligned}$$
□

3. Vyjdúc z ľavej strany nerovnosti máme:

$$D(a\cdot\mathbb{X}\pm b\cdot\mathbb{Y}) \overset{\text{z def}}{=\!=} E[(a\mathbb{X}\pm b\mathbb{Y})-E(a\mathbb{X}\pm b\mathbb{Y})]^2 \overset{\text{z predch. vety}}{=\!=} E[a(\mathbb{X}-E(\mathbb{X}))\pm b(\mathbb{Y}-E(\mathbb{Y}))]^2$$

Umocnením tohto výrazu máme:

$$E[a^2(\mathbb{X}-E(\mathbb{X}))^2+b^2(\mathbb{Y}-E(\mathbb{Y}))^2\pm 2ab\cdot(\mathbb{X}-E(\mathbb{X}))(\mathbb{Y}-E(\mathbb{Y}))]$$

čo je po úpravách

$$a^2E(\mathbb{X}-(E\mathbb{X}))^2+b^2E(\mathbb{Y}-E(\mathbb{Y}))^2\pm 2ab\cdot E[(\mathbb{X}-E(\mathbb{X}))(\mathbb{Y}-E(\mathbb{Y}))]$$

Poznámka 2.14
Výraz $E[(\mathbb{X}-E(\mathbb{X}))(\mathbb{Y}-E(\mathbb{Y}))]$ sa zvykne označovať ako *kovariancia* náhodných veličín $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$.

Dôsledok 2.15
Výpočtový tvar disperzie je

$$D(\mathbb{X})=E(\mathbb{X}^2)-(E(\mathbb{X}))^2=m_2-m_1^2$$

kde $m_k=E(\mathbb{X}^k)$ *pre* $k=1,2$

Dôkaz:

$$\begin{aligned} D(\mathbb{X}) \overset{\text{def}}{=\!=} E(\mathbb{X}-E(\mathbb{X}))^2 &= E[\mathbb{X}^2-2\cdot\mathbb{X}\cdot\underbrace{E(\mathbb{X})}_{\text{konšt.}^{8}}+(E(\mathbb{X}))^2] \\ &= E(\mathbb{X}^2)-2\cdot E(\mathbb{X})\cdot E(\mathbb{X})+(E(\mathbb{X}))^2 \\ &= E(\mathbb{X}^2)-(E(\mathbb{X}))^2 \end{aligned}$$

□

Veta 2.6 (Čebyševova)
Nech náhodná veličina $\mathbb{X}\in L^2$. *Potom pre ľubovoľné* $\varepsilon>0$ *platí:*

$$P(|\mathbb{X}|\geq\varepsilon)\leq\frac{E(\mathbb{X}^2)}{\varepsilon^2}$$

(Tento výraz sa nazýva Čebyševova nerovnosť.)

Dôkaz:

$$\begin{aligned} P(|\mathbb{X}|\geq\varepsilon) &= 1-P(|\mathbb{X}|<\varepsilon)=1-P[\mathbb{X}\in(-\varepsilon,\varepsilon)] \\ &\overset{\text{spojitá}}{=\!=} 1-[F(\varepsilon)-F(-\varepsilon)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x-\left[\int_{-\infty}^{\varepsilon}f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{-\varepsilon}f(x)\,\mathrm{d}x\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{|x|\geq\varepsilon}f(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

□

Keďže $\varepsilon>0$, môžeme odhadnúť $|x|\geq\varepsilon\equiv x^2\geq\varepsilon^2>0\equiv\frac{x^2}{\varepsilon^2}\geq 1$. Pomocou tohto môžeme odhadnúť posledný integrál:

$$\int_{|x|\geq\varepsilon}f(x)\,\mathrm{d}x\leq\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{x^2}{\varepsilon^2}\cdot f(x)\,\mathrm{d}x$$

[8] ale prečo vlastne? A vôbec, celý ten dôkaz je mi nejasný...

Ak medzi integračné medze prirátame interval $(-\varepsilon, \varepsilon)$, plocha pod integrálom sa zväčší. Teda

$$\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{x^2}{\varepsilon^2} \cdot f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\varepsilon^2} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{E(\mathbb{X}^2)}{\varepsilon^2}$$

Dôsledok 2.16
Iný tvar Čebyševovej nerovnosti je:

$$P(|\mathbb{X} - E(\mathbb{X})| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(\mathbb{X})}{\varepsilon^2}$$

Poznámka 2.17
Na výpočet $E(\mathbb{X})^k, k \geq 1$ sa niekedy používajú tzv. *Eulerove integrály* 1. a 2. druhu, t.j. gama a beta funkcia.
Gama funkcia:

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} \cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x, \qquad s \in \mathbb{C}, \Re(s) \geq 0$$

Beta funkcia:

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x, \qquad p,q \in \mathbb{C}, \Re(p) > 0, \Re(q) > 0$$

Vlastnosti funkcií beta[9] a gama.

1. $\Gamma(1) = 1$
2. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$
3. $\Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s)$
4. $\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

Príklad 2.18 (triviálny)
Nech distribučná funkcia náhodnej veličiny $\mathbb{X}$ má rozdelenie:

x_i	1	2	3	4
p_i	0,1	0,6	0,2	0,1

Určte $D(\mathbb{X}), E(\mathbb{X})$.
Riešenie:

$$\begin{aligned}
E(\mathbb{X}) &= \sum_{i=1}^{4} x_i \cdot p_i = 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}6 + 3 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}1 = 2{,}3 \\
D(\mathbb{X}) &= E(\mathbb{X}^2) - (E(\mathbb{X}))^2 \\
E(\mathbb{X}^2) &= \sum_{i=1}^{4} x_i^2 \cdot p_i = \ldots = 5{,}9 \\
D(\mathbb{X}) &= 5{,}9 \cdot 2{,}3^2 = 0,61 \\
\sigma_x &= \sqrt{D(\mathbb{X})} = \sqrt{0{,}61} \doteq 0{,}78
\end{aligned}$$

[9]Funkcia Γ je v istom zmysle zovšeobecnením funkcie faktoriál. Pre $s \in \mathbb{N}$ je $\Gamma(s+1) = s!$, teda napr. $\Gamma(125) = 124!$.

Príklad 2.19 (stále triviálny)

Spojitá náhodná veličina $\mathbb{X}$ má hustotu $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ak } x \in (0,1) \\ 0 & \text{ak } x \notin (0,1) \end{cases}$. Vypočítajte $E(\mathbb{X}), D(\mathbb{X})$.

Riešenie:

$$\begin{aligned} m_1 = E(\mathbb{X}) &\overset{\text{spojitá}}{=\!=} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^1\,\mathrm{d}x + \int_1^{\infty} 0\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \\ m_2 = E(\mathbb{X})^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 \cdot 1\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \\ D(\mathbb{X}) &= m_2 - m_1^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Príklad 2.20 (teraz zložitejšie)

Spojitá náhodná veličina $\mathbb{X}$ má hustotu $f(x) = \begin{cases} a \cdot x^m \cdot e^{-x} & \text{ak } x > 0, m > 0 \\ 0 & \text{ak } x \leq 0 \end{cases}$. Vypočítajte parameter a, $E(\mathbb{X})$, $D(\mathbb{X})$.

Riešenie:

Z normovacej podmienky pre hustotu spojitého rozdelenia má platiť:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} a \cdot x^m \cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x = a \int_0^{\infty} x^m \cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x = a \cdot \Gamma(m+1), \text{ čiže } a = \frac{1}{\Gamma(m+1)}$$

Vypočítajme charakteristiky:

$$\begin{aligned} E(\mathbb{X}) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = a \int_0^{\infty} x \cdot x^m \cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x = a \int_0^{\infty} x^{m+1} \cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{\Gamma(m+1)} \cdot \Gamma(m+2) \\ &= \frac{(m+1) \cdot \Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1)} = m+1 \\ E(\mathbb{X}^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = a \cdot \int_0^{\infty} x^{m+2} \cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{\Gamma(m+1)} \cdot \Gamma(m+3) = \frac{(m+2)\Gamma(m+2)}{\Gamma(m+1)} = (m+2)(m+1) \\ D(\mathbb{X}) &= E(\mathbb{X}^2) - (E(\mathbb{X}))^2 = (m+2)(m+1) - (m+1)^2 = (m+1)(m+2-m-1) = m+1 \end{aligned}$$

Príklad 2.21 (štvrtý...)

Spojitá náhodná veličina $\mathbb{X}$ má hustotu $f(x) = \begin{cases} a \cdot x^4 \cdot (1-x)^5 & \text{ak } x \in (0,1) \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$. Vypočítajte parameter a, $E(\mathbb{X})$, $D(\mathbb{X})$.

Riešenie:

Vypočítajme parameter a:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = a \int_0^1 x^4(1-x)^5\,\mathrm{d}x = a \cdot \beta(5,6), \text{ teda } a = \frac{1}{\beta(5,6)}$$

Teraz určme charakteristiky:

$$\begin{aligned} m_1 = E(\mathbb{X}) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = a \int_0^1 x \cdot x^4(1-x)^5\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\beta(5,6)} \cdot \beta(6,6) = \frac{\frac{\Gamma(6)\cdot\Gamma(6)}{\Gamma(12)}}{\frac{\Gamma(5)\cdot\Gamma(6)}{\Gamma(11)}} = \frac{5}{11} \\ m_2 = E(\mathbb{X}^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^6 \cdot (1-x)^5\,\mathrm{d}x = \frac{\beta(7,6)}{\beta(5,6)} = \frac{\frac{\Gamma(7)\cdot\Gamma(6)}{\Gamma(13)}}{\frac{\Gamma(5)\cdot\Gamma(6)}{\Gamma(11)}} == \frac{5}{22} \\ D(\mathbb{X}) &= m^2 - m_1^2 = \frac{5}{22} - \frac{25}{121} = \frac{5}{242} \end{aligned}$$

Príklad 2.22
Majme danú spojitú náhodnú veličinu $\mathbb{X}$. Nech hustota $f(x) = a \cdot e^{-|x|}$ $\forall x \in \mathbb{R}_1$. Vypočítajte parameter a, aby $f(x)$ bola hustotou, určte $E(\mathbb{X})$, $D(\mathbb{X})$, α_3, α_4.
Riešenie
Z normovacej podmienky:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1 = a \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,\mathrm{d}x$$

Keď si uvedomíme, že funkcia $e^{-|x|}$ je párna funkcia, vyhneme sa rozboru prípadov. Vieme totiž, že graf párnej funkcie je symetrický podľa osi y a teda aj plocha je symetrická – stačí teda počítať dvojnásobný integrál na polovičnom intervale $(0, \infty)$ Teda máme

$$2a \int_{0}^{\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = 2a[-e^{-x}]_0^{\infty}$$

Keďže horná hranica je v nekonečne, mali by sme overiť, či plocha nie je náhodou nekonečná:

$$\lim_{x\to\infty} 2a[-e^{-x}] = 1 \qquad \lim_{x\to 0} 2a[-e^{-x}] = 0$$

čo je v poriadku. Teda z normovacej podmienky máme

$$\begin{aligned} 1 &= 2a \cdot 1 = 2a \\ a &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Určme teraz momentové charakteristiky:

$$E(\mathbb{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-|x|}\,\mathrm{d}x$$

Opäť si uvedomíme, že x je nepárna funkcia a $e^{-|x|}$ je párna funkcia. Z matematickej analýzy vieme, že súčin párnej a nepárnej funkcie je funkcia nepárna. Čiže na intervale $(0, \infty)$ je plocha „kladná“, na intervale $(-\infty, 0)$ „záporná“. V prípade, že plocha na jednom z týchto intervalov je konečná (čo hneď overíme), výsledná plocha by mala byť nulová. Čiže mala byť platiť jedna z alternatív:

$$\mathcal{I} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-|x|}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{ak } \mathcal{I} < \infty \\ \text{neexistuje}, & \text{ak } \mathcal{I} = \infty \text{ (máme neurčitý výraz)} \end{cases}$$

Počítajme integrál $\mathcal{I}$:

$$\mathcal{I} = \int_{0}^{\infty} x \cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x = \Gamma(2) = 1! = 1 < \infty \Rightarrow E(\mathbb{X}) = 0$$

Teraz rátajme $D(\mathbb{X})$:

$$D(\mathbb{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x^2 \cdot e^{-|x|}}_{\text{párna funkcia}} = \frac{1}{2} \cdot 2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-x} = \Gamma(3) = 2! = 2$$

Pokračovanie riešenia možno nájsť v skriptách [3].

Poznámka 2.23 (geometrické postupnosti)
Majme nekonečný rad $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$, kde q je kvocient. Ak $|q| < 1$, potom je tento rad konvergentný a platí:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \qquad (\square)$$

Tento výraz platí, len ak počítame index k od nuly. Ak index k ide od 1 (tento prípad budeme využívať často), potom platí vzťah

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{a_1}{1-q} = \frac{q}{1-q}$$

Na ľavú stranu rovnosti (□) sa môžeme dívať ako na polynóm, ktorý môžeme zderivovať. Po derivácii oboch strán rovnosti získame:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \tag{$\star$}$$

Všimnime si, že v sume na ľavej strane ide k už od jednotky (nie od nuly). Tento postup a vzorce budeme často využívať.

2.4.2 Kvantilové charakteristiky

V prípade, že momentové charakteristiky neexistujú (ak $\mathbb{X} \notin L^k$), potom používame kvantilové charakteristiky (často sa však počítajú oboje charakteristiky – momentové aj kvantilové).

Príklad 2.24
Nech hustota náhodnej veličiny je $f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}$, $x \in (-\infty, \infty)$. Charakterizujte polohu a variabilitu rozdelenia náhodnej veličiny $\mathbb{X}$.
Riešenie:

$$\begin{aligned} E(\mathbb{X}) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{\infty}^{\infty} \underbrace{x \cdot \frac{1}{1+x^2}}_{\text{nepárna}}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{ak } \mathcal{I} = \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x < \infty \\ \text{neex.}, & \text{ak } \mathcal{I} = \infty \end{cases} \\ \mathcal{I} &= \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\Big[\ln|1+x^2|\Big]_0^{\infty} = \frac{1}{2}\Big[\ln(1+x^2)\Big]_0^{\infty} \\ & \lim_{x\to\infty} \ln(1+x^2) = \infty \qquad \lim_{x\to 0} \ln(1+x^2) = -0 \end{aligned}$$

Teda $E(\mathbb{X})$ neexistuje, čiže neexistujú ani ostatné momentové charakteristiky.

Definícia 2.15 (kvantilová funkcia)
Nech $F(x)$ je distribučnou funkciou náhodnej veličiny $\mathbb{X}$. *Kvantilovou funkciou* náhodnej veličiny $\mathbb{X}$ odpovedajúcou distribučnej funkcii $F(x)$ nazývame funkciu[10]

$$F^{-1}(u) = \inf_x \{x : F(x) > u\} \quad u \in (0,1)$$

Hodnoty[11] kvantilovej funkcie nazývame *kvantily*, presnejšie

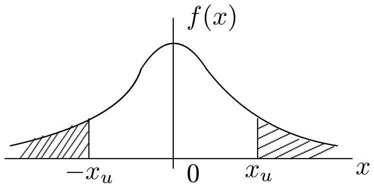
$$F^{-1}(u) = x_u,\ x_u \in \mathbb{R}_1$$

teda kvantil je reálne číslo. Číslo u nazývame *kvantil*, resp. 100%-ný kvantil.

Veta 2.7 (vlastnosti kvantilov)
Nech $F^{-1}(u)$ je kvantilovou funkciou náhodnej veličiny $\mathbb{X}$ odpovedajúcou distribučnej funkcii $F(x)$. Nech $F(x)$ je spojitá a rastúca a odpovedajúca hustota $f(x)$ je párna. Potom pre kvantily platí[12]

$$x_{1-u} = -x_u$$

Dôkaz: Nech $F(x)$ je spojitá a rastúca a nech $f(x)$ je párna. Z párnosti $f(x)$ vyplýva, že jej graf je symetrický. Z definície navyše plocha pod grafom je 1. Z týchto vlastností teda máme, že plochy



pod grafom na intervale $(-\infty, -x_u)$ a na intervale (x_u, ∞) by sa mali rovnať.
Vyjadrime teda

$$F(-x_u) = 1 - F(x_u)$$

Všimnime si, že ak je $F(x)$ spojitá a rastúca, tak $F^{-1}(x)$ je inverzná k $F(x)$, teda ak $F^{-1}(u) = x_u$, potom zrejme $u = F(x_u)$. Spolu máme:

$$\begin{aligned} F(-x_u) &= 1 - F(x_u) \\ F(-x_u) &= 1 - u \\ F(-x_u) &= F(x_{1-u}) \end{aligned}$$ □

Keďže $F(x)$ je spojitá a rastúca (teda prostá), môžeme napísať rovnosť (a iná situácia nemôže nastať)

$$-x_u = x_{1-u}$$

Definícia 2.16 (medián)
Medián je 50%-ný kvantil rozdelenia náhodnej veličiny $\mathbb{X}$, t. j.

$$x_{0,5} = \widetilde{x} \left(= \inf_x \left\{ x : F(x) \geq \frac{1}{2} \right\} \right)$$

Poznámka 2.25

- V prípade, že $f(x)$ je spojitá a rastúca, medián nájdeme ako riešenie rovnice

$$F(\widetilde{x}) = \frac{1}{2}$$

- Medián je kvantilovou charakteristikou hodnoty.

Definícia 2.17 (kvartilová odchýlka)
Kvartilovou odchýlkou rozdelenia náhodnej veličiny $\mathbb{X}$ je číslo

$$Q(\mathbb{X}) = \frac{x_{0,75} - x_{0,25}}{2}$$

kde

$$\begin{aligned} x_{0,25} &= \inf_x \{x : F(x) \geq \frac{1}{4}\} \quad \text{(dolný kvartil)} \\ x_{0,75} &= \inf_x \{x : F(x) \geq \frac{3}{4}\} \quad \text{(horný kvartil)} \end{aligned}$$

[10]Napriek označeniu vo všeobecnosti nemusí byť kvantilová funkcia inverznou funkciou. Napr. u diskrétnych veličín je distribučná funkcia $F(x)$ schodkovitá, preto nemôže mať inverznú funkciu.
[11]Infimum v definícii je dôležité. Hoci pri rastúcej funkcii existuje jediný taký bod, pri diskrétnych veličinách je tých bodov viac, preto uvažujeme infimum.
[12]Teda napr. v tabuľkách stačí uvádzať polovicu hodnôt, lebo napr. $x_{0,95} = x_{0,05}$.

Poznámka 2.26

- Ak $F(x)$ je spojitá a rastúca, potom
$$F(x_{0,25}) = \frac{1}{4} \qquad F(x_{0,75}) = \frac{3}{4}$$
(keďže je rastúca a spojitá, taký bod je len jediný)

- Kvartilová odchýlka je kvantilovou charakteristikou variability

Okrem momentovej a kvantilovej charakteristiky sa používa ešte jedna charakteristika polohy – modus.

Definícia 2.18 (modus)
Modusom rozdelenia váh veličiny $\mathbb{X}$ nazývame najpravdepodobnejšiu hodnotu náhodnej veličiny $\mathbb{X}$, t. j. číslo $\widehat{x}$, pre ktoré platí

$$\begin{array}{rcll} f(\widehat{x}) & \geq & f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}_1 & \text{ak } \mathbb{X} \text{ je spojitá} \\ P(\mathbb{X} = \widehat{x}) & \geq & P(\mathbb{X} = x) \quad \forall x \in \mathbb{R}_1 & \text{ak } \mathbb{X} \text{ je diskrétna} \end{array}$$

Príklad 2.27
Nech $f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}$, pre $x \in (-\infty, \infty)$. Charakterizujte polohu a variabilitu.
Riešenie:
V niektorom z minulých príkladov sme ukázali, že neexistujú pre túto funkciu $E(\mathbb{X})$, $D(\mathbb{X})$. Preto budeme počítať charakteristiky $\widehat{x}$, $\widetilde{x}$, $Q(\mathbb{X})$.

- Modus $\widehat{x}$ (najpravdepodobnejšia hodnota)

  Z definície má platiť $f(\widehat{x}) \geq f(x)$, čiže hľadáme maximum funkcie $f(x)$. Nájdime najprv stacionárne body, čiže body, kde $f'(x) = 0$.
$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2} \\ f'(x) & = & \frac{1}{\pi} \cdot \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \\ f'(x) = 0 & \Leftrightarrow & x = 0 \end{array}$$
  čiže stacionárny bod je bod $x = 0$. Teraz potrebujeme overiť, či je v ňom maximum alebo minimum (môže však nastať aj situácia, keď nevieme o bode nič bližšie povedať). To urobíme výpočtom druhej derivácie $f''(x)$.
$$f''(x) = \frac{-2}{\pi} \cdot \frac{1 \cdot (1 + x^2 - x \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4}$$
  Dosadením nuly dostaneme:
$$f''(0) = \frac{-2}{\pi} < 0 \Rightarrow x = 0$$
  čiže x je maximum $f(x)$ a teda modus $\mathbb{X}$ je $\widehat{x} = 0$

- Medián $\widetilde{x}$

  Ak je funkcia spojitá a rastúca, medián nájdeme s využitím poznámky (2.25). (v opačnom prípade treba využiť definíciu – infimum)
$$\begin{array}{rcl} F(\widetilde{x}) & = & \frac{1}{2} \\ F(x) & = & \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \cdot \Big[\operatorname{arctg} t\Big]_{-\infty}^{x} = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}\right) \\ F(x) & = & \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \operatorname{arctg} x \end{array}$$

Využijeme poznámku (2.25):

$$\begin{aligned} F(\widetilde{x}) &= \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \operatorname{arctg} \widetilde{x} &= \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \widetilde{x} &= 0 \\ \operatorname{arctg} \widetilde{x} &= 0 \end{aligned}$$

čiže medián $\mathbb{X}$ je $\widetilde{x} = 0$

- variabilita (kvartilová odchýlka)

$$Q(\mathbb{X}) = \frac{x_{0,25} - x_{0,75}}{2}$$

Funkcia je spojitá a rastúca, teda môžeme počítať s využitím poznámky (2.26).

$$\begin{aligned} F(x_{0,75}) &= \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \operatorname{arctg} x_{0,75} &= \frac{\pi}{4} \\ x_{0,75} &= 1 \end{aligned}$$

Analogicky vypočítame

$$x_{0,25} = -1$$

Z toho máme: $Q(\mathbb{X}) = \frac{1-(-1)}{2} = 1$. Teda existuje 50%-ná pravdepodobnosť, že namerané hodnoty budú z intervalu $(\widetilde{x} - 1, \widetilde{x} + 1)$.

Príklad na diskrétne rozdelenie možno nájsť v skriptách [3].

2.5 Charakteristická funkcia

Dôležitou dôkazovou metódou v teórii pravdepodobnosti a matematickej štatistike je metóda charakteristických funkcií.

Definícia 2.19 (charakteristická funkcia)
Charakteristickou funkciou náhodnej veličiny $\mathbb{X}$ nazývame funkciu[13]

$$\varphi_{\mathbb{X}} : \mathbb{R}_1 \to \mathbb{C}$$

definovanú ako

$$\varphi_{\mathbb{X}}(t) = E(\mathrm{e}^{it\mathbb{X}})$$

pričom $t \in \mathbb{R}_1$ a i je komplexná jednotka.

Poznámka 2.28

- Výpočtový tvar charakteristickej funkcie podľa vety o prenose integrácie/sumácie 2.12 je

$$\varphi_{\mathbb{X}}(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{itx} f(x)\,\mathrm{d}x & \text{ak } \mathbb{X} \text{ je spojitá} \\ \displaystyle\sum_k \mathrm{e}^{itx_k} p_k & \text{ak } \mathbb{X} \text{ je diskrétna} \end{cases}$$

(ak označíme e^{itx} ako $g(\mathbb{X})$ z vety).

[13]komplexnú funkciu reálnej premennej

- Funkcia e^{itx} sa dá napísať ako $\cos tx + i \sin tx$. Potom integrál z tejto funkcie

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{itx}\,\mathrm{d}x &= \int (\cos tx + i\sin tx)\,\mathrm{d}x = \int \cos tx\,\mathrm{d}x + i\int \sin tx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\sin t}{t} - i\frac{\cos tx}{t} = \frac{i\sin tx - i^2\cos tx}{it} \\ &= \frac{\cos tx + i\sin tx}{it} = \frac{\mathrm{e}^{itx}}{it}\end{aligned}$$

resp.

$$\int \mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{\alpha}$$

Derivácia tejto funkcie

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{itx}}{\mathrm{d}x} = it\cdot \mathrm{e}^{itx} \quad \text{resp.} \quad \frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{\alpha x}}{\mathrm{d}x} = \alpha \mathrm{e}^{\alpha x}$$

Veta 2.8 (vlastnosti $\varphi_{\mathbb{X}}$)
Nech $\varphi_{\mathbb{X}}(t)$ je charakteristickou funkciou náhodnej veličiny $\mathbb{X}$. Nech a, b sú konštanty. Potom platí:

1. $|\varphi_{\mathbb{X}}(t)| \leq 1$
2. $\varphi_{\mathbb{X}}(0) = 1$
3. $\varphi_{a\mathbb{X}+b}(t) = \mathrm{e}^{itb}\cdot\varphi_{\mathbb{X}}(a\cdot t)$

Dôkaz:
Ad 1.)

$$|\varphi_{\mathbb{X}}(t)| = |E(\mathrm{e}^{it\mathbb{X}})| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{itx}\cdot f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\mathrm{e}^{itx}\cdot f(x)|\,\mathrm{d}x \qquad \square$$

Z definície platí, že $f(x) \geq 0$, čiže môžeme odstrániť absolútnu hodnotu a posledný integrál potom bude rovný

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{|\mathrm{e}^{itx}|}_{=1}\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{z norm. podm.}}{=\!=} 1$$

Ad 2.) Z definície

$$\varphi_{\mathbb{X}}(0) = E(\mathrm{e}^{i\cdot 0\mathbb{X}}) = E(\mathrm{e}^0) = E(1) = 1$$

Ad 3.)

$$\varphi_{a\mathbb{X}+b}(t) = E(\mathrm{e}^{it(a\mathbb{X}+b)}) = E(\mathrm{e}^{ita\mathbb{X}+itb}) = E(\mathrm{e}^{ita\mathbb{X}}\cdot \underbrace{\mathrm{e}^{itb}}_{\text{konšt}}) = \mathrm{e}^{itb}\cdot E(\mathrm{e}^{i(at)\mathbb{X}}) = \mathrm{e}^{itb}\cdot\varphi_{\mathbb{X}}(a\cdot t)$$

Veta 2.9 (vzťah medzi $\varphi_{\mathbb{X}}(t)$ a m_k)
Nech $\varphi_{\mathbb{X}}(t)$ je charakteristickou funkciou náhodnej veličiny $\mathbb{X}$. Nech $\mathbb{X} \in L^{n+1}$, kde $n \geq 1$. Potom existujú k-te derivácie charakteristickej funkcie a platí:

$$\varphi_{\mathbb{X}}^{(k)}(0) = i^k\cdot m_k$$

kde i je komplexná jednotka, $m_k = E(\mathbb{X}^k)$ a $\varphi_{\mathbb{X}}^{(k)}$ je k-tá derivácia charakteristickej funkcie v bode 0.

Dôkaz: Rozvinieme funkciu $\mathrm{e}^{it\mathbb{X}}$ do Taylorovho radu[14] v okolí bodu $t = 0$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{it\mathbb{X}} &= 1 + \frac{it\mathbb{X}}{1!} + \frac{(it\mathbb{X})^2}{2!} + \cdots + \frac{(it\mathbb{X})^n}{n!} + R_{n+1}(\mathbb{X}^{n+1}, \ldots) \\
\varphi_{\mathbb{X}}(t) = E(\mathrm{e}^{it\mathbb{X}}) &= E\left(1 + \frac{it\mathbb{X}}{1!} + \frac{(it\mathbb{X})^2}{2!} + \cdots + \frac{(it\mathbb{X})^n}{n!} + R_{n+1}(\mathbb{X}^{n+1}, \ldots)\right) \\
&= E(1) + itE(\mathbb{X}) + \frac{i^2t^2}{2!}E(\mathbb{X}^2) + \cdots + \frac{i^n x^n}{n!}E(\mathbb{X}^n) + R^*_{n+1}(t^{n+1}, E(\mathbb{X}^{n+1}), \ldots)
\end{aligned}
$$

Vypočítajme teraz prvú deriváciu funkcie $\varphi_{\mathbb{X}}(t)$:

$$
\begin{aligned}
\varphi'_{\mathbb{X}}(t) &= iE(\mathbb{X}) + i^2t^2E(\mathbb{X}^2) + \cdots + \frac{i^n}{(n-1)!}t^{n-1}E(\mathbb{X}^n) + R^{**}_{n+1}((n+1)t^n, E(\mathbb{X}), \ldots) \\
\varphi'_{\mathbb{X}}(0) &= iE(\mathbb{X}) = i \cdot m_1
\end{aligned}
$$

Podobne vypočítame druhú deriváciu – ako deriváciu prvej derivácie

$$
\begin{aligned}
\varphi''_{\mathbb{X}}(t) &= i^2E(\mathbb{X}^2) + i^3tE(\mathbb{X}^3) + \cdots + \frac{i^n}{(n-2)!}t^{n-2}E(\mathbb{X}^n) + R^{***}_{n+1}(t^{n-1}, \ldots) \\
\varphi''_{\mathbb{X}}(0) &= i^2E(\mathbb{X}^2) = i^2 m_2 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Takto rátame ďalej, kým nenájdeme všeobecný tvar pre n-tú deriváciu.
Predpoklad $\mathbb{X} \in L^{n+1}$ je dôležitý, pretože iba tak máme zaručenú existenciu počiatočných momentov k-teho rádu $E(\mathbb{X})$, $E(\mathbb{X}^2)$, …, $E(\mathbb{X}^{n+1})$ potrebných v deriváciách. □

Poznámka 2.29
Metóda charakteristických funkcií je založená na tvrdení, že medzi distribučnou funkciou $F_{\mathbb{X}}(x)$ a charakteristickou funkciou $\varphi_{\mathbb{X}}(t)$ existuje jedno-jednoznačný vzťah.

Lemma 2.30 (Leviho veta)
Nech $F(x)$ je distribučnou funkciou náhodnej veličiny $\mathbb{X}$. Nech body $x \pm h$ sú bodmi nespojitosti funkcie $F(x)$ (pričom $h > 0$ je malé kladné reálne číslo). Nech $\varphi_{\mathbb{X}}(t)$ je charakteristickou funkciou náhodnej veličiny $\mathbb{X}$. Potom platí:

$$F(x+h) - F(x-h) = \frac{1}{\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{\sinh t}{t}\cdot \mathrm{e}^{-itx}\cdot\varphi_{\mathbb{X}}(t)\,\mathrm{d}t$$

Dôkaz: bez dôkazu □

Dôsledok 2.31

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-itx}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

Príklad 2.32

[14] Rozvoj funkcie e^x do Taylorovho radu je

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x^{n+1})$$

kde R_{n+1} je zvyšok – funkcia premennej x^n

Nech $f(x) = e^{-x}$, pre $x > 0$. Vypočítajte $\varphi(t)$ a z nej $E(\mathbb{X})$ a $D(\mathbb{X})$[15].

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= E(\mathrm{e}^{it\mathbb{X}}) \stackrel{\text{spoj}}{=\!=} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{itx} \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{itx} \cdot \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{x(it-1)}\,\mathrm{d}x \stackrel{(it-1)=\alpha}{=\!=} \left[\frac{\mathrm{e}^{x(it-1)}}{it-1}\right]_0^{\infty} = \\
&= \frac{1}{it-1} \cdot \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{itx} \cdot \mathrm{e}^{-x} - e^0
\end{aligned}$$

Teraz uvažujme chvíľu nad touto limitou. $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{itx}$ neexistuje. Ale v poznámke 2.28 sme si rozpísali e^{itx} pomocou funkcií sínus a kosínus. Tieto funkcie nemajú pre $x \to \infty$ limitu, ale zato sú ohraničené. Ďalej $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = 0$. Využijeme vetu z matematickej analýzy o limite súčinu ohraničenej funkcie a funkcie, ktorej limita je 0. Teda

$$\frac{1}{it-1} \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{itx} \cdot \mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{it-1}$$

Aby sme sa zbavili komplexného čísla v menovateli, rozšírime posledný člen komplexne združeným číslom $-it + 1$, čím získavame

$$\frac{1+it}{1+t^2} = \varphi(t)$$

Vypočítajme teraz derivácie charakteristickej funkcie:

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= [(1-it)^{-1}]' = i(1-it)^{-2}, \quad \varphi'(0) = i \cdot 1 = i \cdot m_1 \Rightarrow m_1 = E(\mathbb{X}) = 1 \\
\varphi''(t) &= 2i^2(1-it)^{-3}, \quad \varphi''(0) = i^2 \cdot 2 = i^2 \cdot m_2 \Rightarrow m_2 = E(\mathbb{X}^2) = 2
\end{aligned}$$

Všimnime si, že pri rátaní k-tej derivácie v bode 0 sa snažíme z výsledného tvaru derivácie vyňať i^k, aby sme v ňom ľahko mohli uvidieť m_k.
Z m_1 a m_2 môžeme vyrátať $D(\mathbb{X}) = m_2 - m_1^2 = 2 - 1^2 = 1$.

Príklad 2.33
Majme danú diskrétnu náhodnú veličinu $\mathbb{X}$, kde $p_k = (1/2)^k$ pre $k = 1, 2, \ldots$. Vypočítajte $\varphi(t)$ a z nej $E(\mathbb{X})$, $D(\mathbb{X})$.
Riešenie:
Určme najprv charakteristickú funkciu:

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{itk} \cdot (1/2)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{it}\right)^k$$

Aby sme mohli využiť vzorec pre výpočet súčtu geometrického radu, musíme overiť, či $|q| < 1$. V našom prípade je $q = (1/2\mathrm{e}^{it})$. To však spĺňa požiadavky, lebo e^{it} je rovné 1 (dá sa to overiť modifikáciou poznámky 2.28). Po vynásobení 1/2 máme zaručené, že je to menšie ako 1. Preto podľa vzorca máme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{it}\right)^k = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{e}^{it}}{1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{it}} = \frac{\mathrm{e}^{it}}{2-\mathrm{e}^{it}} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Prvá derivácia charakteristickej funkcie bude

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \frac{i\mathrm{e}^{it}(2-\mathrm{e}^{it}) + \mathrm{e}^{it}(i\mathrm{e}^{it})}{(2-\mathrm{e}^{it})^4} = 2i\frac{\mathrm{e}^{it}}{(2-\mathrm{e}^{it})^2}, \qquad \varphi'(0) = i \cdot 2 = i \cdot m_1 \Rightarrow E(\mathbb{X}) = 2 \\
\varphi''(t) &= \frac{2i\mathrm{e}^{it}(2-\mathrm{e}^{it})^2 + \mathrm{e}^{it}(2 \cdot i\mathrm{e}^{it})}{(2-\mathrm{e}^{it})^4}, \qquad \varphi''(0) = i^2 \cdot 2 \cdot (1+3) = i^2 \cdot 6 \Rightarrow m_2 = E(\mathbb{X})^2 = 6 \\
D(\mathbb{X}) &= m_2 - m_1^2 = 6 - 2^2 = 2
\end{aligned}$$

[15] teda $E(\mathbb{X})$ a $D(\mathbb{X})$ sa nesmú vyrátať pomocou ich definície…

Register

charakteristiky
  kvantilové, 27
  momentové, 20

disperzia, 21

funkcia
  beta, 24
  charakteristická, 30
  distribučná, 15
  gama, 24
  hustota, *viď* hustota
  kvantilová, 27

hustota
  rozdelenia, 19

jav
  nezlučiteľnosť, 4
  náhodný, 3

koeficient
  šikmosti, 21
kovariancia
  náhodných veličín, 23
kvartilová odchýlka, 28

limita
  javovej postupnosti, 12

medián, 28
modus, 29
moment
  centrálny, 20
  normovaný, 21
  počiatočný, 20
monotónnosť
  javovej postupnosti, 12
  pravdepodobnosti, 7

nerovnosť
  Čebyševova, 23
nezávislosť
  javov, 8
    totálna, 8
normovacia podmienka, 18, 19
náhodná veličina, 14

pole
  javové, 4
poloaditívnosť
  pravdepodobnosti, 7

postupnosť
  javová, 11
pravdepodobnosť
  axiomatická definícia, 6
  geometrická definícia, 6
  klasická definícia, 5
  násobenie, 10
  podmienená, 10
  spojitosť, 12
  sčítanie, 8
  úplná, 10
priestor
  pravdepodobnostný, 6
    indukovaný, 14
  výberový, 3
    diskrétny, 5
    rozklad, 4
    spojitý, 5

rozdelenie
  absolútne spojité, 19
  diskrétne, 18
  rovnomerné, 5

stredná hodnota, 20

zákon rozdelenia, 14

špicatosť
  rozdelenia, 21

úplná formula, 10

Zoznam definícií

- **Definícia**: nastatie javu 3
- **Definícia**: jav istý, jav nemožný 3
- **Definícia**: relácie medzi javmi 3
- **Definícia**: operácie s javmi 3
- **Definícia**: nezlučiteľné a navzájom nezlučiteľné javy 4
- **Definícia**: rozklad Ω 4
- **Definícia**: axiomatická definícia javového poľa 4
- **Definícia**: diskrétny a spojitý výberový priestor 5
- **Definícia**: rovnomerné rozdelenie 5
- **Definícia**: klasická definícia pravdepodobnosti 5
- **Definícia**: geometrická definícia pravdepodobnosti 6
- **Definícia**: axiomatická definícia pravdepodobnosti 6
- **Definícia**: pravdepodobnostný priestor 6
- **Definícia**: nezávislé a totálne nezávislé javy 8
- **Definícia**: podmienená pravdepodobnosť 10
- **Definícia**: monotónnosť postupnosti javov 12
- **Definícia**: limita postupnosti javov 12
- **Definícia**: náhodná veličina 14
- **Definícia**: zákon rozdelenia 14
- **Definícia**: indukovaný pravdepodobnostný priestor 14
- **Definícia**: distribučná funkcia 15
- **Definícia**: diskrétne rozdelenie, normovacia podmienka 18
- **Definícia**: absolútne spojité rozdelenie, hustota rozdelenia 19
- **Definícia**: trieda L^k 20
- **Definícia**: počiatočný moment k-teho rádu 20
- **Definícia**: stredná hodnota 20
- **Definícia**: centrálny moment k-teho rádu 20
- **Definícia**: disperzia 21
- **Definícia**: normovaný moment k-teho rádu 21
- **Definícia**: koeficient šikmosti 21
- **Definícia**: špicatosť rozdelenia 21
- **Definícia**: kvantilová funkcia 27
- **Definícia**: medián 28
- **Definícia**: kvartilová odchýlka 28
- **Definícia**: modus 29
- **Definícia**: charakteristická funkcia 30

Dôležité vety a tvrdenia

- **Veta**: o monotónnosti pravdepodobnosti . . . 7
- **Veta**: o poloaditívnosti pravdepodobnosti . . . 7
- **Veta**: o sčítaní pravdepodobnosti . . . 8
- **Veta**: o násobení pravdepodobnosti . . . 10
- **Veta**: o úplnej pravdepodobnosti . . . 10
- **Veta**: Bayesova . . . 11
- **Veta**: o spojitosti pravdepodobnosti . . . 12
- **Veta**: základné vlastnosti distribučnej funkcie . . . 15
- **Lemma**: veta o prenose integrácie . . . 21
- **Veta**: vlastnosti $E(\mathbb{X})$ . . . 22
- **Veta**: o vlastnostiach disperzie . . . 22
- **Veta**: Čebyševova . . . 23
- **Veta**: vlastnosti kvantilov . . . 27
- **Veta**: vlastnosti $\varphi_{\mathbb{X}}$ . . . 31
- **Veta**: vzťah medzi $\varphi_{\mathbb{X}}(t)$ a m_k . . . 31
- **Lemma**: Leviho veta . . . 32