Prírodovedecká fakulta UPJŠ Košice

Pravdepodobnosť a štatistika

(poznámky z prednášok letného semestra predmetu Pravdepodobnosť a štatistika)

prednáša: RNDr. Valéria Skřivánková, CSc.

Verzia 22. decembra 2004 12:26
Zostavil Róbert Novotný
`http://s.ics.upjs.sk/~novotnyr`
Typeset by LaTeX. Illustrations by jPicEdt.
Function plots by gnuplot.

Obsah

Literatúra

[1] Riečan a kol.: Pravdepodobnosť a matematická štatistika, Bratislava 1984

[2] Potocký a kol.: Zbierka úloh z pravdepodobnosti a matematickej štatistiky, Bratislava 1986

[3] Skřivánková: Pravdepodobnosť v príkladoch, Košice 1999

[4] Anděl: Matematika náhody, Praha 2000

Tento materiál pokrýva látku z letného semestra predmetu Pravdepodobnosť a štatistika, ktorý prednáša RNDr. Valéria Skřivánková na Prírodovedeckej fakulte UPJŠ v Košiciach. Jeho obsahom sú definície, vety a dôkazy, ktoré odzneli na prednáškach v akademickom roku 2002/2003.

Materiál bol vytvorený výhradne pre internú potrebu študentov PrírF UPJŠ Košice.

Text nebol autorizovaný a môže obsahovať chyby, preklepy, či chýbajúce časti (budem však rád, keď ich oznámite na adrese `novotnyr@skmi.science.upjs.sk`). Na tento materiál sa nevzťahuje žiadna záruka.

Časť I
Pravdepodobnosť

1 Axiomatika v teórii pravdepodobnosti

1.1 Náhodné javy a operácie s javmi

Historický vznik pravdepodobnosti:

- 1654 – Pascal, Fermat – klasická definícia pravdepodobnosti (kombinatorická)
- 1777 – Buffon – geometrická definícia pravdepodobnosti
- 1900 – Hilbertove problémy – nie všetky úlohy sa dajú riešiť pomocou kombinatorickej alebo geometrickej pravdepodobnosti.
- 1933 – Kolmogorov – axiomatická definícia pravdepodobnosti

Náhodný jav – pokus, ktorého výsledky nie sú deterministicky dané; ktorý má viac rôznych, navzájom sa vylučujúcich výsledkov.
Elementárny jav – ω (omega) – každý možný výsledok náhodného pokusu.

Napr. hod kockou: ω_1 znamená, že padla 1, $\omega_2, \dots, \omega_6$.
hod mincou: ω_R ak padol rub, ω_L, ak padlo líce

Výberový priestor – Ω – množina všetkých možných výsledkov pokusu.
Napr. hod kockou: $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_6\}$
Náhodný jav – ozn. A, B, resp. $A_1, A_2, \dots$ – ľubovoľná podmnožina výberového priestoru Ω.
Napr.: označme jav A jav, keď padne pri hode kockou párne číslo. Zrejme $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$.

Definícia 1.1 (nastatie javu)
Hovoríme, že *nastal jav* A, ak vo výsledku náhodného pokusu bol vybratý prvok $\omega \in A$.
Hovoríme, že jav A *nenastal* (resp. nastal jav *opačný* k javu A), ak vybratý prvok $\omega \notin A$. Označujeme $A^{\complement}$.

$$A^{\complement} = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$$

Definícia 1.2 (jav istý, jav nemožný)
Množina všetkých elementárnych javov sa nazýva *jav istý*. Označujeme Ω.
Množina, ktorá neobsahuje žiaden elementárny jav sa nazýva *jav nemožný*. Označujeme $\emptyset$.
Zrejme platí:

$$\emptyset = \Omega^{\complement}$$

Definícia 1.3 (relácie medzi javmi)
Hovoríme, že jav A *má za následok* jav B, ak nastanie javu A znamená aj nastanie javu B.

$$A \subset B$$

Hovoríme, že javy A, B sú ekvivalentné (ozn. $A = B$), ak A má za následok B a B má za následok A.

$$A \subset B \wedge B \subset A$$

Definícia 1.4 (operácie s javmi)
Zjednotenie javov A, B je jav $A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \vee \omega \in B\}$.
Prienik javov A, B je jav $A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \wedge \omega \in B\}$.
Rozdiel javov A, B je jav $A - B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \wedge \omega \notin B\} = A \cap B^{\complement}$.

Vzhľadom na to, že javy sa definujú ako množiny, platia nasledovné vlastnosti:

1. $A \cup A^{\complement} = \Omega$
2. $A \cap A^{\complement} = \emptyset$
3. $A \cup \Omega = \Omega$

   $A \cap \Omega = A$
4. $A \cup \emptyset = A$

   $A \cap \emptyset = \emptyset$
5. $(A^{\complement})^{\complement} = A$

Ďalej platia nasledovné pravidlá:

1.	komutatívny zákon	$A \cup B = B \cup A$
		$A \cap B = B \cap A$
2.	asociatívny zákon	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C)$
		$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C)$
3.	distributívny zákon	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
		$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4.	De Morganove pravidlo	$(A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement}$
		$(A \cap B)^{\complement} = A^{\complement} \cup B^{\complement}$

Definícia 1.5 (nezlučiteľné a navzájom nezlučiteľné javy)
Hovoríme, že javy A, B sú *nezlučiteľné*, ak platí, že $A \cap B = \emptyset$. Hovoríme, že javy $A_1, \dots$ sú navzájom nezlučiteľné, ak

$$\forall i, j : i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset.$$

Definícia 1.6 (rozklad Ω)
Hovoríme, že javy $A_i, i = 1, 2, \dots$ tvoria *rozklad výberového priestoru* Ω, ak tvoria úplný systém nezlučiteľných javov:

1. $\bigcup_i A_i = \Omega$
2. $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$

Definícia 1.7 (axiomatická definícia javového poľa)
Neprázdny systém $\mathcal{A}$ podmnožín výberového priestoru Ω, ktorý obsahuje ako prvok Ω a je uzavretý vzhľadom na komplement a spočítateľné zjednotenie, sa nazýva *javové pole nad výberovým priestorom* Ω.
T.j. $\mathcal{A}$ je javové pole, ak spĺňa nasledovné 3 axiómy:

1. $\Omega \in A$
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^{\complement} \in \mathcal{A}$
3. $A_i \in \mathcal{A}$ pre $i = 1, 2, \dots \Rightarrow \bigcup_i A_i \in \mathcal{A}$

Dôsledok 1.1
Javové pole $\mathcal{A}$ v zmysle definície 1.7 je uzavreté aj na prienik a rozdiel.

Dôkaz:

- uzavretosť $\mathcal{A}$ na prienik. Overme, či platí $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \cap B \in \mathcal{A}$.
  Nech $A, B \in \mathcal{A} \overset{\text{ax. 2}}{\Longrightarrow} A^{\complement}, B^{\complement} \in \mathcal{A} \overset{\text{ax.3}}{\Longrightarrow} A^{\complement} \cup B^{\complement} \in \mathcal{A} \overset{\text{de Morg.}}{\Longrightarrow} (A \cap B)^{\complement} \in \mathcal{A} \overset{\text{ax.2}}{\Longrightarrow} A \cap B \in \mathcal{A}$.
- uzavretosť $\mathcal{A}$ na rozdiel. Overme, či $\forall A, B \in \mathcal{A} : A - B \in \mathcal{A}$.
  Nech $A, B \in \mathcal{A} \overset{\text{ax.2}}{\Longrightarrow} A \cap B^{\complement} \in \mathcal{A} \Rightarrow A - B \in \mathcal{A}$. $\square$

1.2 Pravdepodobnosť a jej rôzne definície

Z historického hľadiska - prvé matematické definície pravdepodobnosti:

1. klasická – 17. stor. – Pascal, Fermat
2. geometrická – 18. stor. – Buffon
3. axiomatická – 20. stor. – Kolmogorov

Prvé dva prípady sú v podstate špeciálnym prípadom axiomatickej definície pravdepodobnosti. Zároveň majú klasická a geometrická „definícia“ obmedzenú pravdepodobnosť, dajú sa použiť len za istých podmienok:

1. typ výberového priestoru
   - diskrétny
   - spojitý
2. typ rozdelenia možností na výberovom priestore Ω
   - rovnomerné
   - nerovnomerné

Definícia 1.8 (diskrétny a spojitý výberový priestor)
Výberový priestor Ω sa nazýva *diskrétny*, ak pozostáva z konečného alebo spočítateľného počtu elementárnych javov. V opačnom prípade hovoríme, že výberový priestor Ω je spojitý.

Príklad 1.2
- diskrétny Ω – hod kockou, mincou, výber kariet
- spojitý Ω – sledovanie hladiny rieky, výber čísla z intervalu $(0, 1)$.

Definícia 1.9 (rovnomerné rozdelenie)
- *Rovnomerné rozdelenie* možností na diskrétnom výberovom priestore Ω s konečným počtom prvkov znamená, že každý elementárny jav má rovnakú šancu nastať a to
  $$1 : |\Omega|, \quad |\Omega| < \infty$$
- *Rovnomerné rozdelenie* možností na spojitom výberovom priestore Ω s konečnou a kladnou mierou $0 < \mathrm{m}(\Omega) < \Omega$ znamená, že každá elementárna oblasť v Ω má rovnakú šancu byť volená a to
  $$1 : \mathrm{m}(\Omega),$$
  kde $\mathrm{m}(\cdot)$ znamená veľkosť (mieru) množiny javu v zátvorkách.

Definícia 1.10 (klasická definícia pravdepodobnosti)
Nech výberový priestor Ω je diskrétny s konečným počtom prvkov $|\Omega| < \infty$, nech rozdelenie možností na Ω je rovnomerné. Potom pravdepodobnosť ľubovoľného javu $A \in \mathcal{A}$ je číslo

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}, \tag{1.1}$$

kde $|A|, |\Omega|$ znamená počet prvkov množín $|A|, |\Omega|$.

Poznámka 1.3
Klasická definícia sa nazýva aj *kombinatorická*, pretože $|A|, |\Omega|$ sa najčastejšie určujú kombinatoricky.

Definícia 1.11 (geometrická definícia pravdepodobnosti)
Nech výberový priestor Ω je spojitý s konečnou a kladnou mierou $0 < \mathrm{m}(\Omega) < \infty$. Nech rozdelenie na Ω je rovnomerné. Potom pravdepodobnosť javu $A \in \mathcal{A}$, $A \subset \Omega$ je číslo

$$P(A) = \frac{\mathrm{m}(A)}{\mathrm{m}(\Omega)}, \tag{1.2}$$

kde $\mathrm{m}(\cdot)$ je miera (veľkosť) množiny v zátvorkách.

Poznámka 1.4
Miery $\mathrm{m}(A)$, $\mathrm{m}(\Omega)$ sa vo všeobecnosti vypočítajú pomocou určitého integrálu, v jednoduchších prípadoch ako dĺžka úsečky, plošný obsah, resp. objem známych geometrických útvarov.

Definícia 1.12 (axiomatická definícia pravdepodobnosti)
Reálna funkcia $P(\cdot)$ definovaná na javovom poli $\mathcal{A}$ (podmnožiny výberového priestoru Ω) pomocou axióm:

1. $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$ (axióma nezápornosti)
2. $P(\Omega) = 1$ (axióma úplnosti)
3. $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$, pričom $A_i \cap A_j = \emptyset$ pre $i \neq j$ (axióma σ-aditívnosti)

sa nazýva *pravdepodobnosť* (pravdepodobnostná miera) javu A.

Cvičenie 1.5
Overte, či klasická a geometrická pravdepodobnosť spĺňajú axiomatickú definíciu.

Definícia 1.13 (pravdepodobnostný priestor)
Trojica $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, kde Ω je výberový priestor, $\mathcal{A}$ javové pole nad Ω, $P(\cdot)$ pravdepodobnosť javu v zátvorkách sa nazýva *pravdepodobnostný priestor*.

Poznámka 1.6 (faktorizácia výberového priestoru)
Podmienka konečnosti v klasickej (i geometrickej) definícii pravdepodobnosti) je dosť obmedzujúca. Ak počet prvkov Ω je ∞, ale existuje taká relácia ekvivalencie R nad prvkami Ω, ktorá zoradí všetky prvky do konečného počtu tzv. „tried ekvivalencie“, potom možno použiť klasickú (resp. geometrickú) definíciu pre nový *faktorizovaný priestor*, ktorý označujeme

$$\Omega | R.$$

1.3 Vlastnosti pravdepodobnosti

Veta 1.1
Nech je daný pravdepodobnostný priestor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. *Nech javy* $A, B \in \mathcal{A}$. *Potom*

1. $P(A^{\complement}) = 1 - P(A)$
2. $P(\emptyset) = 0$
3. $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

Dôkaz:

- Vieme, že $A \cup A^{\complement} = \Omega$. Potom aj $P(A \cup A^{\complement}) = P(\Omega) = 1$. Zároveň však z axiómy σ-aditívnosti máme $P(A \cup A^{\complement}) = P(A) + P(A^{\complement}) = P(\Omega)$. Z toho však vyplýva, že

$$P(A^{\complement}) = 1 - P(A).$$

- Ukážme, že $P(\emptyset) = 0$.
  $P(\emptyset) = P(\Omega^{\complement}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$

- Uvážme množiny A, B. Vieme, že

  $$A = (A - B) \cup (A \cap B).$$

  Potom pre pravdepodobnosť javu A platí:

  $$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B).$$

  Z tejto rovnosti vyjadríme

  $$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B).$$

Poznámka 1.7
Ak $B \subset A$, potom $P(A - B) = P(A) - P(B)$.

Veta 1.2 (o monotónnosti pravdepodobnosti)
Nech je daný pravdepodobnostný priestor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a nech A, B sú náhodné javy a nech $A \subset B$. Potom

$$P(A) \leq P(B).$$

Dôkaz: Majme množiny A, B. Vyjadrime B nasledovne:

$$B = A \cup (B - A).$$

Potom

$$P(B) = P(A) + \underbrace{P(B - A)}_{\geq 0} \geq P(A).$$

Dôsledok 1.8

$$\forall A \in \mathcal{A} : 0 \leq P(A) \leq 1$$

Dôkaz: Stačí využiť vetu 1.2 a všimnúť si, že $P(A) \leq P(\Omega) = 1$. □

Veta 1.3 (o poloaditívnosti pravdepodobnosti)
Nech je daný $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Nech $A_i \in \mathcal{A}, i = 1, 2, \ldots$ sú ľubovoľné javy. Potom

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) \leq \sum_i P(A_i).$$

Dôkaz: Označme postupne

$$B_1 = A_1, B_2 = A_2 - A_1, B_3 = A_3 - (A_1 \cup A_2), \ldots, B_k = A_k - \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i.$$

Uvedomme si, že javy $B_1, \ldots, B_k$ sú nezlučiteľné a platí

$$\bigcup_k B_k = \bigcup_k A_k.$$

Ďalej tiež platí, že pre každé k je $B_k \subset A_k$, čiže aj $\forall k : P(B_k) \leq P(A_k)$. S využitím týchto vlastností

$$P\left(\bigcup_k A_k\right) = P\left(\bigcup_k B_k\right) \stackrel{3.\ \text{ax}}{=} \sum_k P(B_k) \leq \sum_k P(A_k),$$

čiže

$$P\left(\bigcup_k A_k\right) \leq \sum_k P(A_k).$$

Veta 1.4 (o sčítaní pravdepodobnosti)
Nech je daný $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *a nech* $A_i \in \mathcal{A}, i = 1, \ldots, n$ *sú ľubovoľné. Potom*

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \\
&- \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} P(A_i \cap A_j) + \\
&+ \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \\
&+ \ldots + \\
&+ (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)
\end{aligned}$$

Dôkaz: Vykonáme úplnou matematickou indukciou.

1. Nech $n = 2$. Potom vieme, že $A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A_2 - A_1)$ a pre pravdepodobnosť tohto zjednotenia platí:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2 - A_1) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2).$$

2. Teraz nech tvrdenie platí pre $n - 1$. Indukčný predpoklad bude:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i) - \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n-2} P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$$

Počítajme:

$$\begin{aligned}
P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) &= P(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \cup A_n) \\
&= P(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i) + P(A_n) - P(\underbrace{(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i)) \cap A_n}_{\text{použijeme distrib. zákon}}) \\
&= P(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i) + P(A_n) - P(\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n)) \\
&\overset{\text{I.P.}}{=\!=} \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i) - \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n-2} P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) + P(A_n) - \\
&\quad - \left[\sum_{i=1}^{n-1} P(A_i \cap A_n) - \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} P(A_i \cap A_j \cap A_n) + \ldots + \right. \\
&\quad \left. + (-1)^{n-2} P(\bigcap_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n))\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n-1} P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)
\end{aligned}$$

$\square$

Definícia 1.14 (nezávislé a totálne nezávislé javy)
Hovoríme, že javy $A, B \in \mathcal{A}$ sú *nezávislé*, ak

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Hovoríme, že javy $A_i \in \mathcal{A}, i = 1, \ldots,$ sú navzájom *(totálne) nezávislé*, ak pre ľubovoľnú podmnožinu indexov platí:

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_j\right) = \prod_{j=1}^{k} P(A_j)$$

Poznámka 1.9
Aby javy $A_1, \ldots, A_n$ boli navzájom nezávislé, nestačí aby boli nezávislé po dvojiciach.

Veta 1.5
Nech $A, B \in \mathcal{A}$ sú nezávislé. Potom sú nezávislé aj javy

$$A, B^{\complement} \qquad A^{\complement}, B \qquad A^{\complement}, B^{\complement}$$

Dôkaz:

1. $P(A \cap B^{\complement}) = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot (1 - P(B)) = P(A) \cdot P(B^{\complement})$
2. $P(A^{\complement} \cap B)$ ukážeme analogicky.
3. $P(A^{\complement} \cap B^{\complement}) = P(A^{\complement} - B) = P(A^{\complement}) - P(A^{\complement} \cap B) = P(A^{\complement}) - P(B - A) = P(A^{\complement}) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B)$ □

Veta 1.6
Nech $A_i \in \mathcal{A}, i = 1, \ldots, n$ sú navzájom nezávislé. Potom

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = 1 - P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^{\complement}) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(A_i^{\complement})$$

Dôkaz: Pre javy A_i pre $i = 1, 2, \ldots, n$ a ich zjednotenia zrejme platí:

$$(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \cup (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^{\complement} = \Omega$$

Pre pravdepodobnosť potom máme

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^{\complement}\right) = P(\Omega) = 1$$

Ekvivalentným prepísaním druhého sčítanca získame

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^{\complement}\right) = 1,$$

čo je ekvivalentné

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^{\complement}\right).$$

Na záver využijeme predpoklad vzájomnej nezávislosti javov A_i a definíciu (1.14), čím získame tvrdenie vety. □

1.4 Podmienená pravdepodobnosť

Definícia 1.15 (podmienená pravdepodobnosť)
Nech $A, H \in \mathcal{A}$. Nech $P(H) > 0$. *Podmienenú pravdepodobnosť* javu A za podmienky, že nastal jav $H, H \in \mathcal{A}$ definujeme vzťahom:

$$P(A|H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)}, \text{ pričom } P(H) > 0$$

Veta 1.7 (o násobení pravdepodobnosti)
Nech je daný pravdepodobnostný priestor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Nech javy $A_i \in \mathcal{A}$ pre $i = 1, 2, \dots, n$ a nech $P(\bigcap\limits_{i=1}^{n-1} A_i) > 0$. Potom platí:

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n|\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) \tag{1.3}$$

Poznámka 1.10
V tejto vete nepredpokladáme nezávislosť javov. Ďalej pravdepodobnosť podmienky nesmie byť 0, ale to je zaručené, pretože ak $P\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n-1} A_i\right) \neq 0$, tak aj pravdepodobnosti $P(A_1), P(A_1 \cap A_2) \dots$ sú nenulové.

Dôkaz:

1. Dokážeme vzťah (1.3) pre najmenšie n, t.j. pre $n = 2$. Overíme, či platí $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1)$.
   Z definície podmienenej pravdepodobnosti máme:
   $$P(A_2|A_1) = \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)}, \quad P(A_1) > 0$$
   Stačí rovnicu prenásobiť $P(A_1)$ a využiť komutatívny zákon, čím získavame tvrdenie.

2. Teraz budeme predpokladať platnosť (1.3) pre $n - 1$. Overíme, či tvrdenie platí pre n. Indukčný predpoklad bude:
   $$\text{IP:} \quad P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_{n-1}|\bigcap_{i=1}^{n-2} A_i)$$
   Vyjdeme z ľavej strany tvrdenia (1.3):
   $$\begin{aligned} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) &= P[(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) \cap A_n] \\ &\overset{\text{využi 1.)}}{=\!=} P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) \cdot P(A_n|\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) \\ &\overset{\text{IP}}{=\!=} P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_{n-1}|\bigcap_{i=1}^{n-2} A_i) \cdot P(A_n|\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) \end{aligned}$$ □

Veta 1.8 (o úplnej pravdepodobnosti)
Nech je daný pravdepodobnostný priestor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Nech javy $H_i \in \mathcal{A}$ pre $i = 1, 2, \dots, n$ tvoria rozklad Ω. Nech $P(H_i) > 0$ pre každé $i = 1, 2, \dots, n$. Potom pre ľubovoľný jav $A \in \mathcal{A}$ platí:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i) \tag{1.4}$$

Poznámka 1.11
Rovnica (1.4) sa nazýva *formula úplnej pravdepodobnosti*, resp. *úplná formula.*

Dôkaz: Vyjdeme z ľavej strany rovnosti a použijeme vlastnosť prieniku A s Ω.

$$P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} H_i)$$

Toto môžeme napísať, keďže z predpokladu H_i tvoria rozklad, t.j. $\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$. Ďalej aplikujeme distributívny zákon:

$$P(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} H_i) = P\left[\bigcup_{i=1}^{n}(A \cap H_i)\right] = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap H_i)$$

V poslednom kroku sme využili to, že $A \cap H_i$ pre $i = 1, \dots, n$ sú disjunktné javy. Teraz použijeme definíciu podmienenej pravdepodobnosti a predpoklad, že $P(H_i) > 0$:

$$\sum_{i=1}^{n} P(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot \frac{P(A \cap H_i)}{P(H_i)} = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i)$$

Veta 1.9 (Bayesova)
Nech je daný pravdepodobnostný priestor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. *Nech javy* $H_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2, \dots, n$ *tvoria rozklad výberového priestoru* Ω. *Nech* $P(H_i) > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. *Potom pre ľubovoľný jav* $A \in \mathcal{A}$ *taký, že* $P(A) > 0$ *platí:*

$$P(H_j|A) = \frac{P(H_j) \cdot P(A|H_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i)}$$

Dôkaz: Z definície podmienenej pravdepodobnosti:

$$P(H_j|A) = \frac{P(H_j \cap A)}{P(A)}$$

Keďže z predpokladu $P(A) > 0$, môžeme rovnicu prenásobiť $P(A)$.
Definícia podmienenej pravdepodobnosti samozrejme platí, aj keď vzájomne vymeníme javy A a H_j, teda

$$P(A|H_j) = \frac{P(A \cap H_j)}{P(H_j)}$$

Túto rovnicu môžeme tiež prenásobiť $P(H_j)$, lebo v predpoklade máme zaručenú nenulovosť. Využijeme komutatívnosť prieniku $H_j \cap A$ a porovnáme horeuvedené rovnice, čím máme

$$P(A) \cdot P(H_j|A) = P(H_j) \cdot P(A|H_j) = P(A \cap H_j)$$

Vyjadrime teraz $P(H_j|A)$:

$$P(H_j|A) = \frac{P(H_j) \cdot P(A|H_j)}{P(A)}$$

Stačí už len použiť formulu úplnosti na člen $P(A)$ v menovateli pravej strany rovnosti (všetky predpoklady sú splnené) a máme požadované tvrdenie. $\square$

1.5 Postupnosť javov a jej limita

Uvažujme pravdepodobnostný priestor $\Omega, \mathcal{A}, P$ a javy $A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$. Symbolom $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ budeme označovať postupnosť javov.

Definícia 1.16 (monotónnosť postupnosti javov)

a) Hovoríme, že postupnosť javov $\{A_n\}_n^{\infty}$ je *rastúca*, ak $\forall n \in \mathbb{N} : A_n \subset A_{n+1}$[1]

b) Hovoríme, že postupnosť javov $\{A_n\}_n^{\infty}$ je *klesajúca*, ak $\forall n \in \mathbb{N} : A_n \supset A_{n+1}$

c) Hovoríme, že postupnosť javov $\{A_n\}_n^{\infty}$ je *monotónna*, ak je rastúca alebo klesajúca.

Definícia 1.17 (limita postupnosti javov)

a) *Hornou limitou* postupnosti javov $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazývame jav

$$A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \limsup_{n\to\infty} A_n$$

b) *Dolnou limitou* postupnosti javov $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazývame jav

$$A_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \liminf_{n\to\infty} A_n$$

c) Hovoríme, že postupnosť javov $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *má limitu*, ak sa jej horná a dolná limita rovnajú.

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A = A^* = A_*$$

Poznámka 1.12
Ak postupnosť $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu, potom

1. ak $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca, potom

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

2. ak $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ je je klesajúca, potom

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

Veta 1.10 (o spojitosti pravdepodobnosti)
Nech je daný pravdepodobnostný priestor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. *Nech* $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$. *Nech existuje limita* $\lim_{n\to\infty} A_n$. *Potom platí*

$$P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) \tag{1.5}$$

Dôkaz:

1. dokážeme platnosť (1.5) pre monotónne postupnosti.
   Nech $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a má limitu. Postupne označíme

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 \\ B_2 &= A_2 - A_1 \\ B_3 &= A_3 - A_2 \\ &\vdots \\ B_k &= A_k - A_{k-1} \end{aligned}$$

[1] $A_n \subset A_{n+1}$ čítame „A_n má za následok A_{n+1}“

Zrejme javy B_k sú nezlučiteľné, $\bigcup_k A_k = \bigcup_k B_k$ a $B_k \subset A_k$. Počítajme:

$$\begin{aligned}
P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) &\overset{A_n \text{ je rastúca}}{=} P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = P(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(B_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(B_k) \\
&= \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{k=1}^{n} B_k) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \\
&= \lim_{n\to\infty} P(A_n)
\end{aligned}$$

Tvrdenie pre klesajúcu postupnosť ukážeme analogicky.

2. zovšeobecnime prvý krok na všetky postupnosti (nie len monotónne).
Nech existuje limita postupnosti javov A_n. Z definície to znamená, že $A_* = A^* = A$. Prepíšme toto tvrdenie podľa definície a označme si javy B_n, C_n nasledovne:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k}_{B_n} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k}_{C_n}$$

Uvedomme si (!), že postupnosť javov B_n je rastúca a postupnosť javov C_n je klesajúca. Ďalej platia inklúzie $B_n \subset A_n \subset C_n$. Počítajme teraz limitu postupností $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} B_n &= \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \lim_{n\to\infty} A_n \\
\lim_{n\to\infty} C_n &= \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \lim_{n\to\infty} A_n
\end{aligned}$$

Podľa vety o monotónnosti pravdepodobnosti (1.2) máme:

$$\begin{array}{rcccc}
P(B_n) & \leq & P(A_n) & \leq & P(C_n) \\
\lim_{n\to\infty} P(B_n) & \leq & \lim_{n\to\infty} P(A_n) & \leq & \lim_{n\to\infty} P(C_n)
\end{array}$$

Postupnosť B_n je rastúca a C_n klesajúca, môžme použiť dokázané tvrdenie z prvého kroku.

$$\begin{array}{rcccc}
P(\lim_{n\to\infty} B_n) & \leq & \lim_{n\to\infty} P(A_n) & \leq & P(\lim_{n\to\infty} C_n) \\
P(\lim_{n\to\infty} A_n) & \leq & \lim_{n\to\infty} P(A_n) & \leq & P(\lim_{n\to\infty} A_n)
\end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$P(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

$\square$

2 Náhodné veličiny

2.1 Indukovaný pravdepodobnostný priestor

Uvažujme pravdepodobnostný priestor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Nech zobrazenie

$$\mathbb{X} = \mathbb{X}(\omega) : \Omega \to \mathbb{R}_1$$

Teda, každému $\omega \in \Omega$ priradí zobrazenie $\mathbb{X}$ nejaké reálne číslo.
Napr. pri hode kockou máme $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\}$. Potom môžeme mať $\omega_i \to i$, kde $i = 1, \ldots, 6$, čiže $\omega_2 = 2, \omega_6 = 6$. Pri hode mincou zas môžeme písať $\Omega = \{\omega_L, \omega_R\}$ a priradiť $\omega_L \to 0, \omega_R \to 1$. Ako si však máme zvoliť priradenie $\mathbb{X} = \mathbb{X}(\omega)$? Tak, aby sa zachovala Kolmogorovova axiomatika a prípadné ďalšie vlastnosti pravdepodobnosti. Zvoľme teda

$$\mathbb{X} : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}_1, \mathcal{A}_1, P_1)$$

pričom $\mathcal{A}_1$ má spĺňať Kolmogorovovu axiomatiku a P_1 vlastnosti pravdepodobnosti. To bude zabezpečené, ak

$$\mathcal{A}_1 = \{(-\infty, x) \subset \mathbb{R}_1 : \mathbb{X}^{-1}(-\infty, x) \in \mathcal{A}\} \tag{2.6}$$

$$\mathbb{X}^{-1}(-\infty, x) = \{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) < x\} \tag{2.7}$$

$$P_1(-\infty, x) = P(\{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) < x\}) \tag{2.8}$$

Poznámka 2.1
Posledný riadok budeme zapisovať ekvivalentne ako $P(\mathbb{X} < x)$. Teda

$$P_1(-\infty, x) = P(\{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) < x\}) = P(\mathbb{X} < x)$$

Domáca zábava 2.2
Ukážte, resp. overte, že rovnosti (2.6) – (2.8) spĺňajú Kolmogorovou axiomatiku, resp. už definované vlastnosti pravdepodobnosti.

Definícia 2.1 (náhodná veličina)
Zobrazenie $\mathbb{X} = \mathbb{X}(\omega) : \Omega \to \mathbb{R}_1$ sa nazýva *náhodná veličina*, ak vzorom (proobrazom) ľubovoľného intervalu v $\mathbb{R}_1$ typu $(-\infty, x)$, $x \in \mathbb{R}_1$ je jav, teda

$$\left(\mathbb{X}^{-1}(-\infty, x) = \{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) < x\}\right) \in \mathcal{A}$$

Definícia 2.2 (zákon rozdelenia)
Pravdepodobnosť $P_1(\cdot)$ definovaná vzťahom (2.8) sa nazýva *pravdepodobnosť indukovaná zobrazením* $\mathbb{X}$ alebo *zákon rozdelenia* náhodnej veličiny $\mathbb{X}$.

Definícia 2.3 (indukovaný pravdepodobnostný priestor)
Trojica $(\mathbb{R}_1, \mathcal{A}_1, P_1)$ kde A_1, P_1 sú definované vzťahmi (2.6) – (2.8) sa nazýva *indukovaný pravdepodobnostný priestor*, resp. pravdepodobnostný priestor indukovaný zobrazením $\mathbb{X}$.

Poznámka 2.3
Pre označenie náhodných veličín sa používajú veľké tlačené polotučné písmená z konca slovenskej abecedy.

$$\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z} \qquad \mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \ldots, \mathbb{X}_n, \ldots$$

Pre označenie hodnoty, ktorú náhodná veličina môže nadobudnúť používame malé písmená zodpovedajúce náhodnej veličine.

$$x, y, z \qquad x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

2.2 Distribučná funkcia a jej vlastnosti

Definícia 2.4 (distribučná funkcia)
Nech $\mathbb{X}$ je náhodná veličina. Reálna funkcia $F_{\mathbb{X}} : \mathbb{R}_1 \to \langle 0, 1\rangle$ definovaná vzťahom

$$F_{\mathbb{X}}(x) = P(\mathbb{X} < x)$$

sa nazýva *distribučná funkcia náhodnej veličiny* $\mathbb{X}$.
V súlade s predchádzajúcimi označeniami platí:

$$F_{\mathbb{X}}(x) = P(\mathbb{X} < x) = P(\{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) < x\})$$

Poznámka 2.4
Ak narábame iba s jednou náhodnou veličinou[2], označujeme ju ako $\mathbb{X}$. Pri označení distribučnej funkcie vynecháme index $\mathbb{X}$, teda

$$F_{\mathbb{X}}(x) = F(x)$$

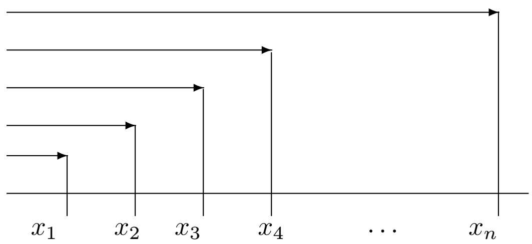
Veta 2.1 (základné vlastnosti distribučnej funkcie)
Nech $F_{\mathbb{X}}$ je distribučnou funkciou náhodnej veličiny $\mathbb{X}$. Potom platí

1. $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$ *a* $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$
2. *$F(x)$ je neklesajúca*
3. *$F(x)$ je zľava spojitá*

Dôkaz:

Ad 1. Uvažujme postupnosť reálnych čísel $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \to \infty$ pre $n \to \infty$.

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x_n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) \overset{\text{def. DF}}{=\!=} \lim_{n\to\infty} P(\underbrace{\{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) < x_n\}}_{A_n})$$



Uvedomme si, že postupnosť $\{A_n\}$ je rastúca (premyslite si to[3]!). To podľa definície znamená, že $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Počítajme ďalej:

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) \overset{\text{veta o spojitosti}}{=\!=} P(\lim_{n\to\infty} A_n) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\Omega) = 1,$$

čím sme dostali požadovanú rovnosť.
Tvrdenie pre druhú limitu ukážeme analogicky.

[2]V tomto semestri budeme zväčša pracovať iba s jednou náhodnou veličinou.
[3]Intuitívne – z predpokladu sa x_n pre $n \to \infty$ na osi posúva doprava, čiže možnosti pre platnosť nerovnosti v jave A_n sa zväčšujú, teda A_n je rastúca.

Ad 2. Nech $F(x)$ je neklesajúca funkcia. To je však ekvivalentné tomu, že $\forall x_1 < x_2 : F(x_1) \leq F(x_2)$. Uvažujme interval (x_1, x_2) na reálnej osi. Ak máme interval $(-\infty, x_2)$ potom zrejme platí, že

$$(-\infty, x_2) = (-\infty, x_1) \cup \langle x_1, x_2),$$

a navyše intervaly na pravej strane rovnosti sú disjunktné. Pre zodpovedajúce javy platí:

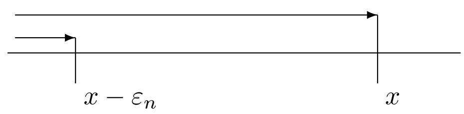
$$\begin{aligned}
\{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) < x_2\} &= \{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) < x_1\} \cup \{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) \in \langle x_1, x_2)\} \\
P(\mathbb{X} < x_2) &= P(\mathbb{X} < x_1) + P(\mathbb{X} \in \langle x_1, x_2)) \\
F(x_2) &= F(x_1) + P(\mathbb{X} \in \langle x_1, x_2)) \geq F(x_1) \\
F(x_2) &\geq F(x_1)
\end{aligned}$$

Ad 3. To, že $F(x)$ je zľava spojitá (v každom bode $x \in \mathbb{R}$) znamená, že limita zľava je rovná funkčnej hodnote, t.j. $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} F(x - \varepsilon) = F(x)$.

Uvažujme postupnosť kladných čísel $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $\varepsilon_n \to 0$ pre $n \to \infty$. Počítajme:

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} F(x - \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0+} F(x - \varepsilon_n) = \lim_{n \to \infty} F(x - \varepsilon_n) = \lim_{n \to \infty} P\Big(\{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) < x - \varepsilon_n\}\Big)$$

Opäť môžeme vyjadriť $(-\infty, x) = (-\infty, x - \varepsilon_n) \cup \langle x - \varepsilon_n)$, pričom na pravej strane sú



disjunktné intervaly. Pre príslušné javy máme:

$$\{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) < x\} = \{\omega \in \Omega : \mathbb{X} < x - \varepsilon_n\} \cup \{\omega \in \Omega : \mathbb{X} \in \langle x - \varepsilon_n, x)\}$$

Javy na pravej strane sú nezlučiteľné, preto

$$P(\mathbb{X} < x) = P(\mathbb{X} < x - \varepsilon_n) + P(\mathbb{X} \in \langle x - \varepsilon_n, x))$$

Pokračujme v počítaní limity.

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to \infty} P\Big(\{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) < x - \varepsilon_n\}\Big) &= \lim_{n \to \infty} P(\mathbb{X} < x - \varepsilon_n) \\
&= \lim_{n \to \infty} \Big(P(\mathbb{X} < x) - P(\mathbb{X} \in \langle x - \varepsilon_n, x))\Big)
\end{aligned}$$

Keďže $P(\mathbb{X} < x)$ je vzhľadom na $n \to \infty$ konštantná, máme pokračovanie rovnosti

$$= P(\mathbb{X} < x) - \lim_{n \to \infty} P\Big(\underbrace{\{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) \in \langle x - \varepsilon_n, x)\}}_{A_n}\Big)$$

Zrejme postupnosť javov $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca (opäť si to premyslite[4]!), platí

$$\lim_{n \to \infty} P(A_n) = P(\lim_{n \to \infty} A_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\emptyset) = 0,$$

teda

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} F(x - \varepsilon) = P(\mathbb{X} < x) - 0 = P(\mathbb{X} < x),$$

čo sme mali dokázať. □

[4]Vulgarizujúco povedané, pre $n \to \infty$ máme $\varepsilon_n \to 0$ a podľa obrázka $x - \varepsilon_n \to x$, čiže dĺžka intervalu konverguje k 0.

Veta 2.2
Nech $F(x)$ je distribučná funkcia náhodnej veličiny $\mathbb{X}$. Nech $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Potom platí:

$$P(\mathbb{X} \in \langle a, b)) = F(b) - F(a)$$

Dôkaz: Uvážme interval (a, b). Vieme, že interval

$$(-\infty, b) \quad = \quad (-\infty, a) \cup \langle a, b)$$

(už sme sa s takýmto trikom stretli!). Zároveň vieme, že tieto intervaly sú disjunktné, potom však aj zodpovedajúce javy sú nezlučiteľné. Teda

$$\begin{aligned} \{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) < b\} &= \{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) < a\} \cup \{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) \in \langle a, b)\} \\ P(\mathbb{X}(\omega) < b) &= P(\mathbb{X} < a) + P(\mathbb{X} \in \langle a, b)) \end{aligned}$$

Vyjadríme jav $P(\mathbb{X} \in \langle a, b))$:

$$\begin{aligned} P(\mathbb{X} \in \langle a, b)) &= P(\mathbb{X} < b) - P(\mathbb{X} < a) \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

□

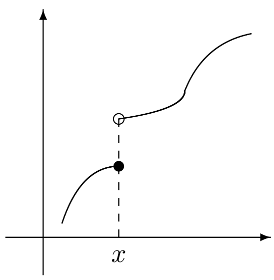
Poznámka 2.5
Zo základných vlastností distribučnej funkcie $F(x)$ vyplýva iba spojitosť zľava, nie spojitosť v bode. Teda $F(x)$ môže byť nespojitá sprava. Ak existuje bod $x \in \mathbb{R}$ taký, že

$$\lim_{x \to 0+} F(x + \varepsilon) \neq F(x)$$

potom pri označení $\lim\limits_{x \to 0+} F(x + \varepsilon) = F(x + 0)$ máme, že

$$F(x + 0) - F(x) > 0,$$

(lebo F je neklesajúca) a teda graf $F(x)$ v bode x je prerušený (*má skok*) a bod x sa nazýva *bodom nespojitosti* $F(x)$. Veľkosť skoku v tomto bode potom bude $P[\mathbb{X} = x] = F(x + 0) - F(x) > 0$.



Veta 2.3
Množina všetkých bodov nespojitosti distribučnej funkcie $F(x)$ je nanajvýš spočítateľná.

Dôkaz: Rozdeľme definičný obor funkcie $F(x)$ na disjunktné intervaly dĺžky 1, teda

$$\mathbb{R}_1 = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} I_n, \text{ kde } I_n = \langle n, n + 1)$$

Budeme hľadať body nespojitosti na I_n. Ak bude ich množina spočítateľná, potom bude spočítateľná aj množina bodov nespojitosti na celom $\mathbb{R}_1$.
Označme S_n^k množinu niektorých bodov nespojitosti na I_n, konkrétne

$$S_n^k = \{x \in I_n : P[\mathbb{X} = x] \geq \frac{1}{k}, k \in \mathbb{Z}^+\}$$

Zrejme platí $1 = P(\Omega) = P(\mathbb{R}_1)$. Ďalej máme $P(\mathbb{R}_1) > P(I_n)$, keďže $\mathbb{R}_1 \supset I_n$. Čiže

$$1 = P(\mathbb{R}_1) \geq P(I_n) \geq P(S_n^k)$$

lebo rovnako $S_n^k \subseteq I_n$.
Z toho máme, že

$$P(S_n^k) \geq |S_n^k| \cdot \frac{1}{k}$$

Použitím tejto[5] a horeuvedenej nerovnosti dostávame

$$\begin{aligned} 1 &\geq |S_n^k| \cdot \frac{1}{k} \\ k &\geq |S_n^k| \end{aligned}$$

čiže S_n^k má len konečný počet bodov. Ak však zoberieme $\lim\limits_{k\to\infty} S_n^k$ dostávame množinu obsahujúcu všetky body nespojitosti. Táto množina je navyše konečná. Na záver nám stačí zobrať zjednotenie

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\lim_{k\to\infty} S_n^k \right)$$

čo je vlastne spočítateľné zjednotenie spočítateľných množín. □

2.3 Diskrétne a absolútne spojité rozdelenie

Definícia 2.5 (diskrétne rozdelenie, normovacia podmienka)
Hovoríme, že náhodná veličina $\mathbb{X}$ má *diskrétne rozdelenie* (*je diskrétna*), ak existuje postupnosť reálnych čísel $\{x_i\}_{i\in I}$ a odpovedajúca postupnosť reálnych čísel $\{p_i\}_{i\in I}$ taká, že

$$p_i = P(\mathbb{X} = x_i)$$

a platí

$$\sum_{i\in I} p_i = 1 \qquad \& \qquad F_{\mathbb{X}} = \sum_{i:x_i<\mathbb{X}} p_i$$

Prvá suma v tomto výraze je tzv. *normovacia podmienka*.
Lomená čiara spájajúca body $[x_i, p_i]$ sa nazýva *polygón rozdelenia* náhodnej veličiny $\mathbb{X}$.

Poznámka 2.6
Zrejme body x_i pre ktoré $p_i = P(\mathbb{X} = x_i) > 0$ sú bodmi nespojitosti $F(x)$ a veľkosť skoku na grafe je práve p_i.

Príklad 2.7
Nech náhodná veličina $\mathbb{X}$ nadobúda hodnoty x_i s pravdepodobnosťou p_i podľa tabuľky:

x_i	1	2	3	4
p_i	0,1	0,6	0,2	0,1

Určte distribučnú funkciu $F(x)$, nakreslite graf, určte pravdepodobnosť, že $P(\mathbb{X} \in (2, 3\rangle)$.
Riešenie:
Distribučná funkcia: $F(x) = \sum\limits_{x_i<x} p_i$.

$$\begin{aligned} \text{ak } x \leq 1 &\Rightarrow F(x) = 0 \\ \text{ak } x \in (1, 2\rangle &\Rightarrow F(x) = p_1 = 0{,}1 \\ \text{ak } x \in (2, 3\rangle &\Rightarrow F(x) = p_1 + p_2 = 0{,}7 \\ \text{ak } x \in (3, 4\rangle &\Rightarrow F(x) = p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}9 \\ \text{ak } x > 4 &\Rightarrow F(x) = 1 \end{aligned}$$

[5] Vie mi niekto povedať, prečo toto platí? Ušiel mi výklad. — pozn. sadzača

Teraz určíme $P[\mathbb{X} \in (2,3\rangle]$. Ktoré body nespojitosti obsahuje interval $(2,3\rangle$? Len jeden, a to bod 3. Teda $P[\mathbb{X} = 3] = 0{,}2$.

Definícia 2.6 (absolútne spojité rozdelenie, hustota rozdelenia)
Hovoríme, že náhodná veličina $\mathbb{X}$ má *absolútne spojité rozdelenie* (*je spojitá*), ak existuje nezáporná, v $\mathbb{R}_1$ integrovateľná funkcia $f(x), x \in \mathbb{R}_1$ taká, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1 \qquad \& \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Funkcia $f(x)$ sa nazýva *hustota rozdelenia* náhodnej veličiny $\mathbb{X}$ (*hustota* $\mathbb{X}$).

Poznámka 2.8
Ak má $F(x)$ v bode x deriváciu, tak $f(x) = F'(x)$.

Príklad 2.9
Nech náhodná veličina $\mathbb{X}$ má rozdelenie dané hodnotou:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ak } x \in (0,1) \\ 0 & \text{ak } x \notin (0,1) \end{cases}$$

(t.j. v bodoch 0, 1 je $f(x) = 0$).
Určte $F(x)$, nakreslite grafy $f(x), F(x)$, určte pravdepodobnosť, že $P(|\mathbb{X}|) < \frac{1}{2}$.
Riešenie.
Vieme, že $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$. Pre $F(x)$ potom platí:

$$\begin{aligned}
\text{ak } x \le 0 \quad &\Rightarrow \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0 \\
\text{ak } x \in (0,1) \quad &\Rightarrow \quad F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} 1\,\mathrm{d}t = 0 + [t]_0^x = x \\
\text{ak } x \ge 1 \quad &\Rightarrow \quad F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{1} 1\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{x} \mathrm{d}t = 0 + [t]_0^1 = 1
\end{aligned}$$

Teda pre $F(x)$ platí:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ak } x \le 0 \\ x & \text{ak } x \in (0,1) \\ 1 & \text{ak } x \ge 1 \end{cases}$$

$F(x)$ je v bodoch 0, 1 síce spojitá, ale nie je tam diferencovateľná.
Pre pravdepodobnosť platí:

$$\begin{aligned}
P\left(|\mathbb{X}| < \frac{1}{2}\right) &= P\left(\mathbb{X} \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) \\
&= P\left(\mathbb{X} \in \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) - P\left(\mathbb{X} = -\frac{1}{2}\right) \\
&= F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(-\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

2.4 Charakteristika náhodných veličín

Číselne charakteristiky delíme:

1. podľa toho, čo charakterizujú

- charakteristika polohy (stredu)
- charakteristika variability (rozptýlenosti okolo stredu)
- charakteristika šikmosti (asymetrie)
- charakteristika špicatosti

2. podľa spôsobu výpočtu charakteristiky
   - momentové charakteristiky
   - kvantilové charakteristiky

2.4.1 Momentové charakteristiky

Definícia 2.7 (trieda L^k)
Hovoríme, že náhodná veličina $\mathbb{X}$ patrí do triedy $L^k : k \geq 1$, ak platí:

- buď $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$ pre $\mathbb{X}$ spojitú
- alebo $\sum_i |x_i|^k \cdot p_i < \infty$ pre $\mathbb{X}$ diskrétnu

(suma, resp. integrál je absolútne konvergentná)

Definícia 2.8 (počiatočný moment k-teho rádu)
Nech náhodná veličina $\mathbb{X} \in L^k, k \geq 1$. *Počiatočným momentom k-teho rádu* (k-tým počiatočným momentom) náhodnej veličiny $\mathbb{X}$ nazývame číslo

$$E(\mathbb{X}^k) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x & \text{pre } \mathbb{X} \text{ spojitú} \\ \displaystyle\sum_i x_i^k \cdot p_i & \text{pre } \mathbb{X} \text{ diskrétnu} \end{cases}$$

Všimnime si, že existencia sumy, resp. integrálu je zaručená podľa definície (2.7).

Definícia 2.9 (stredná hodnota)
Nech náhodná veličina $\mathbb{X} \in L^1$. Potom *strednou hodnotou* náhodnej veličiny $\mathbb{X}$ nazývame jej prvý počiatočný moment, t.j. číslo

$$E(\mathbb{X}) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x & \text{ak } \mathbb{X} \text{ je spojité} \\ \displaystyle\sum_i x_i \cdot p_i & \text{ak } \mathbb{X} \text{ je diskrétne} \end{cases}$$

Poznámka 2.10
Stredná hodnota $E(\mathbb{X})$ je momentovou charakteristikou polohy.

Definícia 2.10 (centrálny moment k-teho rádu)
Nech náhodná veličina $\mathbb{X} \in L^k$. *Centrálnym momentom* k-tého rádu (*k-tým centrálnym momentom*) náhodnej veličiny $\mathbb{X}$ nazývame číslo

$$E(\mathbb{X} - E(\mathbb{X}))^k = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (x - E(\mathbb{X}))^k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x & \text{ak } \mathbb{X} \text{ je spojitá} \\ \displaystyle\sum_i (x_i - E(\mathbb{X}))^k \cdot p_i & \text{ak } \mathbb{X} \text{ je diskrétna} \end{cases}$$

Definícia 2.11 (disperzia)
Nech náhodná veličina $\mathbb{X} \in L^2$. *Disperziou* (varianciou, rozptylom) náhodnej veličiny $\mathbb{X}$ nazývame jej druhý centrálny moment

$$D(\mathbb{X}) = E(\mathbb{X} - E(\mathbb{X}))^2$$

Odmocninu disperzie, ktorú označíme ako

$$\sigma_x = \sqrt{D(\mathbb{X})}$$

nazveme *smerodajná odchýlka.*

Definícia 2.12 (normovaný moment k-teho rádu)
Nech náhodná veličina $\mathbb{X} \in L^k$, $k \geq 1$. *Normovaným momentom k-teho rádu* náhodnej veličiny $\mathbb{X}$ nazveme číslo

$$E\left(\frac{\mathbb{X} - E(\mathbb{X})}{\sqrt{D(\mathbb{X})}}\right)^k = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x - E(\mathbb{X})}{\sqrt{D(\mathbb{X})}}\right)^k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x & \text{ak } \mathbb{X} \text{ je spojitá} \\ \sum_i \left(\frac{x_i - E(\mathbb{X})}{\sqrt{D(\mathbb{X})}}\right)^k \cdot p_i & \text{ak } \mathbb{X} \text{ je diskrétna} \end{cases}$$

Definícia 2.13 (koeficient šikmosti)
Nech náhodná veličina $\mathbb{X} \in L^3$. *Koeficientom šikmosti* náhodnej veličiny $\mathbb{X}$ nazývame jej tretí[6] normovaný moment, t.j. číslo[7]:

$$\alpha_3 = E\left(\frac{\mathbb{X} - E(\mathbb{X})}{\sqrt{D(\mathbb{X})}}\right)^3$$

Definícia 2.14 (špicatosť rozdelenia)
Nech náhodná veličina $\mathbb{X} \in L^4$. *Špicatosťou rozdelenia* náhodnej veličiny $\mathbb{X}$ nazývame jej štvrtý normovaný moment, t.j. číslo

$$\alpha_4 = E\left(\frac{\mathbb{X} - E(\mathbb{X})}{\sqrt{D(\mathbb{X})}}\right)^4$$

Koeficientom špicatosti je číslo

$$\alpha_4 - 3$$

Poznámka 2.11

1. Koeficient α_3 je momentovou charakteristikou šikmosti.
   Koeficient $\alpha_4 - 3$ je momentovou charakteristikou špicatosti.
2. K dôkazu viet o vlastnostiach $E(\mathbb{X}), D(\mathbb{X})$ potrebujeme nasledovné pomocné tvrdenie.

Lemma 2.12 (veta o prenose integrácie)
Nech náhodné veličiny $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \in L^1$. Nech $\mathbb{X}$ je spojitá s hustotou $f(x)$. Nech funkcia $g(x)$ je spojitá a $g(x) \cdot f(x)$ integrovateľná v $\mathbb{R}_1$. Potom platí pre $\mathbb{Y} = g(\mathbb{X})$:

$$E(g(\mathbb{X})) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$$

Poznámka 2.13
V predchádzajúcej vete je $\mathbb{Y}$ funkciou náhodnej veličiny $\mathbb{X}$. Ak by sme chceli počítať $E(g(\mathbb{X})) = E(\mathbb{Y})$ z definície, museli by sme určiť $E(\mathbb{Y}) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(y)\,\mathrm{d}y$. Tu však prichádzame k problému, ak nepoznáme hustotu $f(y)$. Táto lema nám však umožní tento problém obísť.

[6] Ak existuje k-tý normovaný moment, tak existujú aj všetky momenty nižších rádov.
[7] Prípad $\alpha_3 = 0$ nastane len pre symetrické rozdelenie.

Veta 2.4 (vlastnosti $E(\mathbb{X})$)
Nech náhodné veličiny $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \in L^1$ a nech $a, b \in \mathbb{R}$. Potom platí

1. $P(\mathbb{X} = a) = 1 \Rightarrow E(\mathbb{X}) = a$
2. $E(a \cdot \mathbb{X}) = a \cdot E(\mathbb{X})$
3. $E(a \cdot \mathbb{X} \pm b \cdot \mathbb{Y}) = a \cdot E(\mathbb{X}) \pm b \cdot E(\mathbb{Y})$

Dôkaz:

1. Nech $P(\mathbb{X} = a) = 1$. Keďže $\mathbb{X}$ je diskrétna, máme

$$E(\mathbb{X}) = \sum_i x_i \cdot p_i = \sum_i a \cdot p_i = a \sum_i p_i \overset{\text{z norm. podm.}}{=\!=} a \cdot 1 = a$$

2. Majme $E(a \cdot \mathbb{X})$. Ak označíme $a \cdot \mathbb{X}$ ako $g(\mathbb{X})$, môžeme použiť na ďalší výpočet lemu (2.12).

$$E(a \cdot \mathbb{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax) \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = a \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x}_{E(\mathbb{X})} = a \cdot E(\mathbb{X})$$

3. Označme $E(a \cdot \mathbb{X} \pm b \cdot \mathbb{Y})$ ako $E(g(\mathbb{X}, \mathbb{Y}))$. Potom máme:

$$E(a \cdot \mathbb{X} \pm b \cdot \mathbb{Y}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (ax \pm by) \cdot f(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

Dôkaz dokončíme neskôr (pri charakteristikách viacerých náhodných veličín). □

Veta 2.5 (o vlastnostiach disperzie)
Nech náhodné veličiny $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \in L^2$. Nech $a, b \in \mathbb{R}_1$. Potom platí:

1. $P(\mathbb{X} = a) = 1 \Rightarrow D(\mathbb{X}) = 0$
2. $D(a \cdot \mathbb{X}) = a^2 D(\mathbb{X})$
3. $D(a \cdot \mathbb{X} \pm b \cdot \mathbb{Y}) = a^2 \cdot D(\mathbb{X}) + b^2 \cdot D(\mathbb{Y}) \pm 2ab \cdot E[(\mathbb{X} - E(\mathbb{X}))(\mathbb{Y} - E(\mathbb{Y}))]$

Dôkaz:

1. Nech $P(\mathbb{X} = a) = 1$. Potom máme

$$D(\mathbb{X}) \overset{\text{z def.}}{=\!=} E(\mathbb{X} - E(\mathbb{X}))^2 \overset{\text{diskr.}}{=\!=} \sum_i (x_i - E(\mathbb{X}))^2 \cdot p_i$$

Z predpokladu zrejme pre každé i platí $\mathbb{X}_i = a$. Ďalej z predchádzajúcej vety (bod 1.) máme, že $E(\mathbb{X}) = a$. Teda posledná suma je rovná:

$$\sum_i 0 \cdot p_i = 0$$

2. Počítajme:

$$\begin{aligned} D(a \cdot \mathbb{X}) &\overset{\text{def. } D(\cdot)}{=\!=} E[(a \cdot \mathbb{X}) - E(a \cdot \mathbb{X})]^2 = E[(a \cdot \mathbb{X}) - a \cdot E(\mathbb{X})]^2 \\ &= E[a \cdot (\mathbb{X} - E(\mathbb{X}))]^2 = E[a^2 \cdot (\mathbb{X} - E(\mathbb{X}))^2] \\ &= a^2 \cdot E(\mathbb{X} - E(\mathbb{X}))^2 \overset{\text{z def.}}{=\!=} a^2 \cdot D(\mathbb{X}) \end{aligned}$$

□

3. Vyjdúc z ľavej strany nerovnosti máme:

$$D(a\cdot\mathbb{X}\pm b\cdot\mathbb{Y}) \overset{\text{z def}}{=\!=} E[(a\mathbb{X}\pm b\mathbb{Y})-E(a\mathbb{X}\pm b\mathbb{Y})]^2 \overset{\text{z predch. vety}}{=\!=} E[a(\mathbb{X}-E(\mathbb{X}))\pm b(\mathbb{Y}-E(\mathbb{Y}))]^2$$

   Umocnením tohto výrazu máme:

$$E[a^2(\mathbb{X}-E(\mathbb{X}))^2+b^2(\mathbb{Y}-E(\mathbb{Y}))^2\pm 2ab\cdot(\mathbb{X}-E(\mathbb{X}))(\mathbb{Y}-E(\mathbb{Y}))]$$

   čo je po úpravách

$$a^2E(\mathbb{X}-(E\mathbb{X}))^2+b^2E(\mathbb{Y}-E(\mathbb{Y}))^2\pm 2ab\cdot E[(\mathbb{X}-E(\mathbb{X}))(\mathbb{Y}-E(\mathbb{Y}))]$$

Poznámka 2.14
Výraz $E[(\mathbb{X}-E(\mathbb{X}))(\mathbb{Y}-E(\mathbb{Y}))]$ sa zvykne označovať ako *kovariancia* náhodných veličín $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$.

Dôsledok 2.15
Výpočtový tvar disperzie je

$$D(\mathbb{X})=E(\mathbb{X}^2)-(E(\mathbb{X}))^2=m_2-m_1^2$$

kde $m_k=E(\mathbb{X}^k)$ *pre* $k=1,2$

Dôkaz:

$$\begin{aligned} D(\mathbb{X}) \overset{\text{def}}{=\!=} E(\mathbb{X}-E(\mathbb{X}))^2 &= E[\mathbb{X}^2-2\cdot\mathbb{X}\cdot\underbrace{E(\mathbb{X})}_{\text{konšt.}^8}+(E(\mathbb{X}))^2] \\ &= E(\mathbb{X}^2)-2\cdot E(\mathbb{X})\cdot E(\mathbb{X})+(E(\mathbb{X}))^2 \\ &= E(\mathbb{X}^2)-(E(\mathbb{X}))^2 \end{aligned}$$

□

Veta 2.6 (Čebyševova)
Nech náhodná veličina $\mathbb{X}\in L^2$*. Potom pre ľubovoľné* $\varepsilon>0$ *platí:*

$$P(|\mathbb{X}|\geq\varepsilon)\leq\frac{E(\mathbb{X}^2)}{\varepsilon^2}$$

(Tento výraz sa nazýva Čebyševova nerovnosť.)

Dôkaz:

$$\begin{aligned} P(|\mathbb{X}|\geq\varepsilon) &= 1-P(|\mathbb{X}|<\varepsilon)=1-P[\mathbb{X}\in(-\varepsilon,\varepsilon)] \\ &\overset{\text{spojitá}}{=\!=} 1-[F(\varepsilon)-F(-\varepsilon)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x-\left[\int_{-\infty}^{\varepsilon}f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{-\varepsilon}f(x)\,\mathrm{d}x\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{|x|\geq\varepsilon}f(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

□

Keďže $\varepsilon>0$, môžeme odhadnúť $|x|\geq\varepsilon\equiv x^2\geq\varepsilon^2>0\equiv\frac{x^2}{\varepsilon^2}\geq 1$. Pomocou tohto môžeme odhadnúť posledný integrál:

$$\int_{|x|\geq\varepsilon}f(x)\,\mathrm{d}x\leq\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{x^2}{\varepsilon^2}\cdot f(x)\,\mathrm{d}x$$

[8] ale prečo vlastne? A vôbec, celý ten dôkaz je mi nejasný...

Ak medzi integračné medze prirátame interval $(-\varepsilon, \varepsilon)$, plocha pod integrálom sa zväčší. Teda

$$\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{x^2}{\varepsilon^2} \cdot f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\varepsilon^2} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{E(\mathbb{X}^2)}{\varepsilon^2}$$

Dôsledok 2.16
Iný tvar Čebyševovej nerovnosti je:

$$P(|\mathbb{X} - E(\mathbb{X})| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(\mathbb{X})}{\varepsilon^2}$$

Poznámka 2.17
Na výpočet $E(\mathbb{X})^k, k \geq 1$ sa niekedy používajú tzv. *Eulerove integrály* 1. a 2. druhu, t.j. gama a beta funkcia.
Gama funkcia:

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} \cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x, \qquad s \in \mathbb{C}, \Re(s) \geq 0$$

Beta funkcia:

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x, \qquad p,q \in \mathbb{C}, \Re(p) > 0, \Re(q) > 0$$

Vlastnosti funkcií beta[9] a gama.

1. $\Gamma(1) = 1$
2. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$
3. $\Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s)$
4. $\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

Príklad 2.18 (triviálny)
Nech distribučná funkcia náhodnej veličiny $\mathbb{X}$ má rozdelenie:

x_i	1	2	3	4
p_i	0,1	0,6	0,2	0,1

Určte $D(\mathbb{X}), E(\mathbb{X})$.
Riešenie:

$$\begin{aligned}
E(\mathbb{X}) &= \sum_{i=1}^{4} x_i \cdot p_i = 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}6 + 3 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}1 = 2{,}3 \\
D(\mathbb{X}) &= E(\mathbb{X}^2) - (E(\mathbb{X}))^2 \\
E(\mathbb{X}^2) &= \sum_{i=1}^{4} x_i^2 \cdot p_i = \ldots = 5{,}9 \\
D(\mathbb{X}) &= 5{,}9 \cdot 2{,}3^2 = 0,61 \\
\sigma_x &= \sqrt{D(\mathbb{X})} = \sqrt{0{,}61} \doteq 0{,}78
\end{aligned}$$

[9]Funkcia Γ je v istom zmysle zovšeobecnením funkcie faktoriál. Pre $s \in \mathbb{N}$ je $\Gamma(s+1) = s!$, teda napr. $\Gamma(125) = 124!$.

Príklad 2.19 (stále triviálny)
Spojitá náhodná veličina $\mathbb{X}$ má hustotu $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ak } x \in (0,1) \\ 0 & \text{ak } x \notin (0,1) \end{cases}$. Vypočítajte $E(\mathbb{X}), D(\mathbb{X})$.
Riešenie:

$$\begin{aligned} m_1 = E(\mathbb{X}) &\overset{\text{spojitá}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} x^1\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{\infty} 0\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \\ m_2 = E(\mathbb{X})^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 \cdot 1\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \\ D(\mathbb{X}) &= m_2 - m_1^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Príklad 2.20 (teraz zložitejšie)
Spojitá náhodná veličina $\mathbb{X}$ má hustotu $f(x) = \begin{cases} a \cdot x^m \cdot e^{-x} & \text{ak } x > 0, m > 0 \\ 0 & \text{ak } x \leq 0 \end{cases}$. Vypočítajte parameter a, $E(\mathbb{X})$, $D(\mathbb{X})$.
Riešenie:
Z normovacej podmienky pre hustotu spojitého rozdelenia má platiť:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} a \cdot x^m \cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x = a \int_0^{\infty} x^m \cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x = a \cdot \Gamma(m+1), \text{ čiže } a = \frac{1}{\Gamma(m+1)}$$

Vypočítajme charakteristiky:

$$\begin{aligned} E(\mathbb{X}) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = a \int_0^{\infty} x \cdot x^m \cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x = a \int_0^{\infty} x^{m+1} \cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{\Gamma(m+1)} \cdot \Gamma(m+2) \\ &= \frac{(m+1) \cdot \Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1)} = m+1 \\ E(\mathbb{X}^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = a \cdot \int_0^{\infty} x^{m+2} \cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{\Gamma(m+1)} \cdot \Gamma(m+3) = \frac{(m+2)\Gamma(m+2)}{\Gamma(m+1)} = (m+2)(m+1) \\ D(\mathbb{X}) &= E(\mathbb{X}^2) - (E(\mathbb{X}))^2 = (m+2)(m+1) - (m+1)^2 = (m+1)(m+2-m-1) = m+1 \end{aligned}$$

Príklad 2.21 (štvrtý...)
Spojitá náhodná veličina $\mathbb{X}$ má hustotu $f(x) = \begin{cases} a \cdot x^4 \cdot (1-x)^5 & \text{ak } x \in (0,1) \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$. Vypočítajte parameter a, $E(\mathbb{X})$, $D(\mathbb{X})$.
Riešenie:
Vypočítajme parameter a:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = a \int_0^1 x^4 (1-x)^5\,\mathrm{d}x = a \cdot \beta(5,6), \text{ teda } a = \frac{1}{\beta(5,6)}$$

Teraz určme charakteristiky:

$$\begin{aligned} m_1 = E(\mathbb{X}) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = a \int_0^1 x \cdot x^4 (1-x)^5\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\beta(5,6)} \cdot \beta(6,6) = \frac{\frac{\Gamma(6)\cdot\Gamma(6)}{\Gamma(12)}}{\frac{\Gamma(5)\cdot\Gamma(6)}{\Gamma(11)}} = \frac{5}{11} \\ m_2 = E(\mathbb{X}^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^6 \cdot (1-x)^5\,\mathrm{d}x = \frac{\beta(7,6)}{\beta(5,6)} = \frac{\frac{\Gamma(7)\cdot\Gamma(6)}{\Gamma(13)}}{\frac{\Gamma(5)\cdot\Gamma(6)}{\Gamma(11)}} == \frac{5}{22} \\ D(\mathbb{X}) &= m^2 - m_1^2 = \frac{5}{22} - \frac{25}{121} = \frac{5}{242} \end{aligned}$$

Príklad 2.22
Majme danú spojitú náhodnú veličinu $\mathbb{X}$. Nech hustota $f(x) = a \cdot e^{-|x|}$ $\forall x \in \mathbb{R}_1$. Vypočítajte parameter a, aby $f(x)$ bola hustotou, určte $E(\mathbb{X})$, $D(\mathbb{X})$, α_3, α_4.
Riešenie
Z normovacej podmienky:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1 = a \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,\mathrm{d}x$$

Keď si uvedomíme, že funkcia $e^{-|x|}$ je párna funkcia, vyhneme sa rozboru prípadov. Vieme totiž, že graf párnej funkcie je symetrický podľa osi y a teda aj plocha je symetrická – stačí teda počítať dvojnásobný integrál na polovičnom intervale $(0, \infty)$ Teda máme

$$2a \int_0^{\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = 2a[-e^{-x}]_0^{\infty}$$

Keďže horná hranica je v nekonečne, mali by sme overiť, či plocha nie je náhodou nekonečná:

$$\lim_{x\to\infty} 2a[-e^{-x}] = 1 \qquad \lim_{x\to 0} 2a[-e^{-x}] = 0$$

čo je v poriadku. Teda z normovacej podmienky máme

$$\begin{aligned} 1 &= 2a \cdot 1 = 2a \\ a &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Určme teraz momentové charakteristiky:

$$E(\mathbb{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-|x|}\,\mathrm{d}x$$

Opäť si uvedomíme, že x je nepárna funkcia a $e^{-|x|}$ je párna funkcia. Z matematickej analýzy vieme, že súčin párnej a nepárnej funkcie je funkcia nepárna. Čiže na intervale $(0, \infty)$ je plocha „kladná“, na intervale $(-\infty, 0)$ „záporná“. V prípade, že plocha na jednom z týchto intervalov je konečná (čo hneď overíme), výsledná plocha by mala byť nulová. Čiže mala byť platiť jedna z alternatív:

$$\mathcal{I} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-|x|}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{ak } \mathcal{I} < \infty \\ \text{neexistuje}, & \text{ak } \mathcal{I} = \infty \text{ (máme neurčitý výraz)} \end{cases}$$

Počítajme integrál $\mathcal{I}$:

$$\mathcal{I} = \int_0^{\infty} x \cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x = \Gamma(2) = 1! = 1 < \infty \Rightarrow E(\mathbb{X}) = 0$$

Teraz rátajme $D(\mathbb{X})$:

$$D(\mathbb{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x^2 \cdot e^{-|x|}}_{\text{párna funkcia}} = \frac{1}{2} \cdot 2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-x} = \Gamma(3) = 2! = 2$$

Pokračovanie riešenia možno nájsť v skriptách [3].

Poznámka 2.23 (geometrické postupnosti)
Majme nekonečný rad $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$, kde q je kvocient. Ak $|q| < 1$, potom je tento rad konvergentný a platí:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \qquad (\square)$$

Tento výraz platí, len ak počítame index k od nuly. Ak index k ide od 1 (tento prípad budeme využívať často), potom platí vzťah

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{a_1}{1-q} = \frac{q}{1-q}$$

Na ľavú stranu rovnosti (□) sa môžeme dívať ako na polynóm, ktorý môžeme zderivovať. Po derivácii oboch strán rovnosti získame:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \tag{$\star$}$$

Všimnime si, že v sume na ľavej strane ide k už od jednotky (nie od nuly). Tento postup a vzorce budeme často využívať.

2.4.2 Kvantilové charakteristiky

V prípade, že momentové charakteristiky neexistujú (ak $\mathbb{X} \notin L^k$), potom používame kvantilové charakteristiky (často sa však počítajú oboje charakteristiky – momentové aj kvantilové).

Príklad 2.24
Nech hustota náhodnej veličiny je $f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}$, $x \in (-\infty, \infty)$. Charakterizujte polohu a variabilitu rozdelenia náhodnej veličiny $\mathbb{X}$.
Riešenie:

$$\begin{aligned}
E(\mathbb{X}) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{\infty}^{\infty} \underbrace{x \cdot \frac{1}{1+x^2}}_{\text{nepárna}}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{ak } \mathcal{I} = \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x < \infty \\ \text{neex.}, & \text{ak } \mathcal{I} = \infty \end{cases} \\
\mathcal{I} &= \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\Big[\ln|1+x^2|\Big]_0^{\infty} = \frac{1}{2}\Big[\ln(1+x^2)\Big]_0^{\infty} \\
& \lim_{x\to\infty} \ln(1+x^2) = \infty \qquad \lim_{x\to 0} \ln(1+x^2) = -0
\end{aligned}$$

Teda $E(\mathbb{X})$ neexistuje, čiže neexistujú ani ostatné momentové charakteristiky.

Definícia 2.15 (kvantilová funkcia)
Nech $F(x)$ je distribučnou funkciou náhodnej veličiny $\mathbb{X}$. *Kvantilovou funkciou* náhodnej veličiny $\mathbb{X}$ odpovedajúcou distribučnej funkcii $F(x)$ nazývame funkciu[10]

$$F^{-1}(u) = \inf_x \{x : F(x) > u\} \quad u \in (0,1)$$

Hodnoty[11] kvantilovej funkcie nazývame *kvantily*, presnejšie

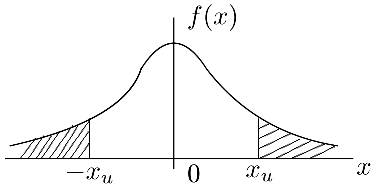
$$F^{-1}(u) = x_u,\ x_u \in \mathbb{R}_1$$

teda kvantil je reálne číslo. Číslo u nazývame *kvantil*, resp. 100%-ný kvantil.

Veta 2.7 (vlastnosti kvantilov)
Nech $F^{-1}(u)$ je kvantilovou funkciou náhodnej veličiny $\mathbb{X}$ odpovedajúcou distribučnej funkcii $F(x)$. Nech $F(x)$ je spojitá a rastúca a odpovedajúca hustota $f(x)$ je párna. Potom pre kvantily platí[12]

$$x_{1-u} = -x_u$$

Dôkaz: Nech $F(x)$ je spojitá a rastúca a nech $f(x)$ je párna. Z párnosti $f(x)$ vyplýva, že jej graf je symetrický. Z definície navyše plocha pod grafom je 1. Z týchto vlastností teda máme, že plochy



pod grafom na intervale $(-\infty, -x_u)$ a na intervale (x_u, ∞) by sa mali rovnať.
Vyjadrime teda

$$F(-x_u) = 1 - F(x_u)$$

Všimnime si, že ak je $F(x)$ spojitá a rastúca, tak $F^{-1}(x)$ je inverzná k $F(x)$, teda ak $F^{-1}(u) = x_u$, potom zrejme $u = F(x_u)$. Spolu máme:

$$\begin{aligned} F(-x_u) &= 1 - F(x_u) \\ F(-x_u) &= 1 - u \\ F(-x_u) &= F(x_{1-u}) \end{aligned}$$

□

Keďže $F(x)$ je spojitá a rastúca (teda prostá), môžeme napísať rovnosť (a iná situácia nemôže nastať)

$$-x_u = x_{1-u}$$

Definícia 2.16 (medián)
Medián je 50%-ný kvantil rozdelenia náhodnej veličiny $\mathbb{X}$, t. j.

$$x_{0,5} = \widetilde{x} \left(= \inf_x \left\{ x : F(x) \geq \frac{1}{2} \right\} \right)$$

Poznámka 2.25

- V prípade, že $f(x)$ je spojitá a rastúca, medián nájdeme ako riešenie rovnice

$$F(\widetilde{x}) = \frac{1}{2}$$

- Medián je kvantilovou charakteristikou hodnoty.

Definícia 2.17 (kvartilová odchýlka)
Kvartilovou odchýlkou rozdelenia náhodnej veličiny $\mathbb{X}$ je číslo

$$Q(\mathbb{X}) = \frac{x_{0,75} - x_{0,25}}{2}$$

kde

$$\begin{aligned} x_{0,25} &= \inf_x \{x : F(x) \geq \frac{1}{4}\} \quad \text{(dolný kvartil)} \\ x_{0,75} &= \inf_x \{x : F(x) \geq \frac{3}{4}\} \quad \text{(horný kvartil)} \end{aligned}$$

[10] Napriek označeniu vo všeobecnosti nemusí byť kvantilová funkcia inverznou funkciou. Napr. u diskrétnych veličín je distribučná funkcia $F(x)$ schodkovitá, preto nemôže mať inverznú funkciu.
[11] Infimum v definícii je dôležité. Hoci pri rastúcej funkcii existuje jediný taký bod, pri diskrétnych veličinách je tých bodov viac, preto uvažujeme infimum.
[12] Teda napr. v tabuľkách stačí uvádzať polovicu hodnôt, lebo napr. $x_{0,95} = x_{0,05}$.

Poznámka 2.26

- Ak $F(x)$ je spojitá a rastúca, potom

$$F(x_{0,25}) = \frac{1}{4} \qquad F(x_{0,75}) = \frac{3}{4}$$

(keďže je rastúca a spojitá, taký bod je len jediný)

- Kvartilová odchýlka je kvantilovou charakteristikou variability

Okrem momentovej a kvantilovej charakteristiky sa používa ešte jedna charakteristika polohy – modus.

Definícia 2.18 (modus)
Modusom rozdelenia váh veličiny $\mathbb{X}$ nazývame najpravdepodobnejšiu hodnotu náhodnej veličiny $\mathbb{X}$, t. j. číslo $\widehat{x}$, pre ktoré platí

$$\begin{array}{rcll} f(\widehat{x}) & \geq & f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_1 & \text{ak } \mathbb{X} \text{ je spojitá} \\ P(\mathbb{X} = \widehat{x}) & \geq & P(\mathbb{X} = x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_1 & \text{ak } \mathbb{X} \text{ je diskrétna} \end{array}$$

Príklad 2.27
Nech $f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}$, pre $x \in (-\infty, \infty)$. Charakterizujte polohu a variabilitu.
Riešenie:
V niektorom z minulých príkladov sme ukázali, že neexistujú pre túto funkciu $E(\mathbb{X})$, $D(\mathbb{X})$. Preto budeme počítať charakteristiky $\widehat{x}$, $\widetilde{x}$, $Q(\mathbb{X})$.

- Modus $\widehat{x}$ (najpravdepodobnejšia hodnota)

  Z definície má platiť $f(\widehat{x}) \geq f(x)$, čiže hľadáme maximum funkcie $f(x)$. Nájdime najprv stacionárne body, čiže body, kde $f'(x) = 0$.

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2} \\ f'(x) & = & \frac{1}{\pi} \cdot \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \\ f'(x) = 0 & \Leftrightarrow & x = 0 \end{array}$$

  čiže stacionárny bod je bod $x = 0$. Teraz potrebujeme overiť, či je v ňom maximum alebo minimum (môže však nastať aj situácia, keď nevieme o bode nič bližšie povedať). To urobíme výpočtom druhej derivácie $f''(x)$.

$$f''(x) = \frac{-2}{\pi} \cdot \frac{1 \cdot (1 + x^2 - x \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4}$$

  Dosadením nuly dostaneme:

$$f''(0) = \frac{-2}{\pi} < 0 \Rightarrow x = 0$$

  čiže x je maximum $f(x)$ a teda modus $\mathbb{X}$ je $\widehat{x} = 0$

- Medián $\widetilde{x}$

  Ak je funkcia spojitá a rastúca, medián nájdeme s využitím poznámky (2.25). (v opačnom prípade treba využiť definíciu – infimum)

$$\begin{array}{rcl} F(\widetilde{x}) & = & \frac{1}{2} \\ F(x) & = & \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \cdot \Big[\operatorname{arctg} t\Big]_{-\infty}^{x} = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}\right) \\ F(x) & = & \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \operatorname{arctg} x \end{array}$$

Využijeme poznámku (2.25):

$$\begin{aligned}
F(\widetilde{x}) &= \frac{1}{2} \\
\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \operatorname{arctg} \widetilde{x} &= \frac{1}{2} \\
\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \widetilde{x} &= 0 \\
\operatorname{arctg} \widetilde{x} &= 0
\end{aligned}$$

čiže medián $\mathbb{X}$ je $\widetilde{x} = 0$

- variabilita (kvartilová odchýlka)

$$Q(\mathbb{X}) = \frac{x_{0,25} - x_{0,75}}{2}$$

Funkcia je spojitá a rastúca, teda môžeme počítať s využitím poznámky (2.26).

$$\begin{aligned}
F(x_{0,75}) &= \frac{3}{4} \\
\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \operatorname{arctg} x_{0,75} &= \frac{\pi}{4} \\
x_{0,75} &= 1
\end{aligned}$$

Analogicky vypočítame

$$x_{0,25} = -1$$

Z toho máme: $Q(\mathbb{X}) = \frac{1-(-1)}{2} = 1$. Teda existuje 50%-ná pravdepodobnosť, že namerané hodnoty budú z intervalu $(\widetilde{x} - 1, \widetilde{x} + 1)$.

Príklad na diskrétne rozdelenie možno nájsť v skriptách [3].

2.5 Charakteristická funkcia

Dôležitou dôkazovou metódou v teórii pravdepodobnosti a matematickej štatistike je metóda charakteristických funkcií.

Definícia 2.19 (charakteristická funkcia)
Charakteristickou funkciou náhodnej veličiny $\mathbb{X}$ nazývame funkciu[13]

$$\varphi_{\mathbb{X}} : \mathbb{R}_1 \to \mathbb{C}$$

definovanú ako

$$\varphi_{\mathbb{X}}(t) = E(\mathrm{e}^{it\mathbb{X}})$$

pričom $t \in \mathbb{R}_1$ a i je komplexná jednotka.

Poznámka 2.28

- Výpočtový tvar charakteristickej funkcie podľa vety o prenose integrácie/sumácie 2.12 je

$$\varphi_{\mathbb{X}}(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{itx} f(x)\,\mathrm{d}x & \text{ak } \mathbb{X} \text{ je spojitá} \\ \displaystyle\sum_k \mathrm{e}^{itx_k} p_k & \text{ak } \mathbb{X} \text{ je diskrétna} \end{cases}$$

(ak označíme e^{itx} ako $g(\mathbb{X})$ z vety).

[13] komplexnú funkciu reálnej premennej

- Funkcia e^{itx} sa dá napísať ako $\cos tx + i \sin tx$. Potom integrál z tejto funkcie

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{itx}\,\mathrm{d}x &= \int (\cos tx + i\sin tx)\,\mathrm{d}x = \int \cos tx\,\mathrm{d}x + i\int \sin tx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\sin t}{t} - i\frac{\cos tx}{t} = \frac{i\sin tx - i^2\cos tx}{it} \\ &= \frac{\cos tx + i\sin tx}{it} = \frac{\mathrm{e}^{itx}}{it}\end{aligned}$$

resp.

$$\int \mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{\alpha}$$

Derivácia tejto funkcie

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{itx}}{\mathrm{d}x} = it \cdot \mathrm{e}^{itx} \quad \text{resp.} \quad \frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{\alpha x}}{\mathrm{d}x} = \alpha \mathrm{e}^{\alpha x}$$

Veta 2.8 (vlastnosti $\varphi_{\mathbb{X}}$)
Nech $\varphi_{\mathbb{X}}(t)$ je charakteristickou funkciou náhodnej veličiny $\mathbb{X}$. Nech a, b sú konštanty. Potom platí:

1. $|\varphi_{\mathbb{X}}(t)| \leq 1$
2. $\varphi_{\mathbb{X}}(0) = 1$
3. $\varphi_{a\mathbb{X}+b}(t) = \mathrm{e}^{itb} \cdot \varphi_{\mathbb{X}}(a \cdot t)$

Dôkaz:
Ad 1.)

$$|\varphi_{\mathbb{X}}(t)| = |E(\mathrm{e}^{it\mathbb{X}})| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{itx} \cdot f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\mathrm{e}^{itx} \cdot f(x)|\,\mathrm{d}x \qquad \square$$

Z definície platí, že $f(x) \geq 0$, čiže môžeme odstrániť absolútnu hodnotu a posledný integrál potom bude rovný

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{|\mathrm{e}^{itx}|}_{=1} \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{z norm. podm.}}{=\!=} 1$$

Ad 2.) Z definície

$$\varphi_{\mathbb{X}}(0) = E(\mathrm{e}^{i \cdot 0\mathbb{X}}) = E(\mathrm{e}^0) = E(1) = 1$$

Ad 3.)

$$\varphi_{a\mathbb{X}+b}(t) = E(\mathrm{e}^{it(a\mathbb{X}+b)}) = E(\mathrm{e}^{ita\mathbb{X}+itb}) = E(\mathrm{e}^{ita\mathbb{X}} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{itb}}_{\text{konšt}}) = \mathrm{e}^{itb} \cdot E(\mathrm{e}^{i(at)\mathbb{X}}) = \mathrm{e}^{itb} \cdot \varphi_{\mathbb{X}}(a \cdot t)$$

Veta 2.9 (vzťah medzi $\varphi_{\mathbb{X}}(t)$ a m_k)
Nech $\varphi_{\mathbb{X}}(t)$ je charakteristickou funkciou náhodnej veličiny $\mathbb{X}$. Nech $\mathbb{X} \in L^{n+1}$, kde $n \geq 1$. Potom existujú k-te derivácie charakteristickej funkcie a platí:

$$\varphi_{\mathbb{X}}^{(k)}(0) = i^k \cdot m_k$$

kde i je komplexná jednotka, $m_k = E(\mathbb{X}^k)$ a $\varphi_{\mathbb{X}}^{(k)}$ je k-tá derivácia charakteristickej funkcie v bode 0.

Dôkaz: Rozvinieme funkciu $\mathrm{e}^{it\mathbb{X}}$ do Taylorovho radu[14] v okolí bodu $t = 0$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{it\mathbb{X}} &= 1 + \frac{it\mathbb{X}}{1!} + \frac{(it\mathbb{X})^2}{2!} + \cdots + \frac{(it\mathbb{X})^n}{n!} + R_{n+1}(\mathbb{X}^{n+1}, \ldots) \\
\varphi_{\mathbb{X}}(t) = E(\mathrm{e}^{it\mathbb{X}}) &= E\left(1 + \frac{it\mathbb{X}}{1!} + \frac{(it\mathbb{X})^2}{2!} + \cdots + \frac{(it\mathbb{X})^n}{n!} + R_{n+1}(\mathbb{X}^{n+1}, \ldots)\right) \\
&= E(1) + itE(\mathbb{X}) + \frac{i^2t^2}{2!}E(\mathbb{X}^2) + \cdots + \frac{i^n x^n}{n!}E(\mathbb{X}^n) + R^*_{n+1}(t^{n+1}, E(\mathbb{X}^{n+1}), \ldots)
\end{aligned}$$

Vypočítajme teraz prvú deriváciu funkcie $\varphi_{\mathbb{X}}(t)$:

$$\begin{aligned}
\varphi'_{\mathbb{X}}(t) &= iE(\mathbb{X}) + i^2t^2E(\mathbb{X}^2) + \cdots + \frac{i^n}{(n-1)!}t^{n-1}E(\mathbb{X}^n) + R^{**}_{n+1}((n+1)t^n, E(\mathbb{X}), \ldots) \\
\varphi'_{\mathbb{X}}(0) &= iE(\mathbb{X}) = i \cdot m_1
\end{aligned}$$

Podobne vypočítame druhú deriváciu – ako deriváciu prvej derivácie

$$\begin{aligned}
\varphi''_{\mathbb{X}}(t) &= i^2E(\mathbb{X}^2) + i^3tE(\mathbb{X}^3) + \cdots + \frac{i^n}{(n-2)!}t^{n-2}E(\mathbb{X}^n) + R^{***}_{n+1}(t^{n-1}, \ldots) \\
\varphi''_{\mathbb{X}}(0) &= i^2E(\mathbb{X}^2) = i^2 m_2 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Takto rátame ďalej, kým nenájdeme všeobecný tvar pre n-tú deriváciu.
Predpoklad $\mathbb{X} \in L^{n+1}$ je dôležitý, pretože iba tak máme zaručenú existenciu počiatočných momentov k-teho rádu $E(\mathbb{X})$, $E(\mathbb{X}^2)$, …, $E(\mathbb{X}^{n+1})$ potrebných v deriváciách. □

Poznámka 2.29
Metóda charakteristických funkcií je založená na tvrdení, že medzi distribučnou funkciou $F_{\mathbb{X}}(x)$ a charakteristickou funkciou $\varphi_{\mathbb{X}}(t)$ existuje jedno-jednoznačný vzťah.

Lemma 2.30 (Leviho veta)
Nech $F(x)$ je distribučnou funkciou náhodnej veličiny $\mathbb{X}$. Nech body $x \pm h$ sú bodmi nespojitosti funkcie $F(x)$ (pričom $h > 0$ je malé kladné reálne číslo). Nech $\varphi_{\mathbb{X}}(t)$ je charakteristickou funkciou náhodnej veličiny $\mathbb{X}$. Potom platí:

$$F(x+h) - F(x-h) = \frac{1}{\pi} \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} \frac{\sinh t}{t} \cdot \mathrm{e}^{-itx} \cdot \varphi_{\mathbb{X}}(t) \, \mathrm{d}t$$

Dôkaz: bez dôkazu □

Dôsledok 2.31

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-itx} \varphi(t) \, \mathrm{d}t$$

[14]Rozvoj funkcie e^x do Taylorovho radu je

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x^{n+1})$$

kde R_{n+1} je zvyšok – funkcia premennej x^n

Príklad 2.32
Nech $f(x) = e^{-x}$, pre $x > 0$. Vypočítajte $\varphi(t)$ a z nej $E(\mathbb{X})$ a $D(\mathbb{X})$[15].

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= E(\mathrm{e}^{it\mathbb{X}}) \stackrel{\text{spoj}}{=\!=} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{itx} \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{itx} \cdot \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{x(it-1)}\,\mathrm{d}x \stackrel{(it-1)=\alpha}{=\!=} \left[\frac{\mathrm{e}^{x(it-1)}}{it-1}\right]_0^{\infty} = \\ &= \frac{1}{it-1} \cdot \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{itx} \cdot \mathrm{e}^{-x} - e^0\end{aligned}$$

Teraz uvažujme chvíľu nad touto limitou. $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{itx}$ neexistuje. Ale v poznámke 2.28 sme si rozpísali e^{itx} pomocou funkcií sínus a kosínus. Tieto funkcie nemajú pre $x \to \infty$ limitu, ale zato sú ohraničené. Ďalej $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = 0$. Využijeme vetu z matematickej analýzy o limite súčinu ohraničenej funkcie a funkcie, ktorej limita je 0. Teda

$$\frac{1}{it-1} \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{itx} \cdot \mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{it-1}$$

Aby sme sa zbavili komplexného čísla v menovateli, rozšírime posledný člen komplexne združeným číslom $-it + 1$, čím získavame

$$\frac{1+it}{1+t^2} = \varphi(t)$$

Vypočítajme teraz derivácie charakteristickej funkcie:

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= [(1-it)^{-1}]' = i(1-it)^{-2}, \quad \varphi'(0) = i \cdot 1 = i \cdot m_1 \Rightarrow m_1 = E(\mathbb{X}) = 1 \\ \varphi''(t) &= 2i^2(1-it)^{-3}, \quad \varphi''(0) = i^2 \cdot 2 = i^2 \cdot m_2 \Rightarrow m_2 = E(\mathbb{X}^2) = 2\end{aligned}$$

Všimnime si, že pri rátaní k-tej derivácie v bode 0 sa snažíme z výsledného tvaru derivácie vyňať i^k, aby sme v ňom ľahko mohli uvidieť m_k.
Z m_1 a m_2 môžeme vyrátať $D(\mathbb{X}) = m_2 - m_1^2 = 2 - 1^2 = 1$.

Príklad 2.33
Majme danú diskrétnu náhodnú veličinu $\mathbb{X}$, kde $p_k = (1/2)^k$ pre $k = 1, 2, \ldots$. Vypočítajte $\varphi(t)$ a z nej $E(\mathbb{X})$, $D(\mathbb{X})$.
Riešenie:
Určme najprv charakteristickú funkciu:

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{itk} \cdot (1/2)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{it}\right)^k$$

Aby sme mohli využiť vzorec pre výpočet súčtu geometrického radu, musíme overiť, či $|q| < 1$. V našom prípade je $q = (1/2\mathrm{e}^{it})$. To však spĺňa požiadavky, lebo e^{it} je rovné 1 (dá sa to overiť modifikáciou poznámky 2.28). Po vynásobení 1/2 máme zaručené, že je to menšie ako 1. Preto podľa vzorca máme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{it}\right)^k = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{e}^{it}}{1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{it}} = \frac{\mathrm{e}^{it}}{2 - \mathrm{e}^{it}} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Prvá derivácia charakteristickej funkcie bude

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \frac{i\mathrm{e}^{it}(2-\mathrm{e}^{it}) + \mathrm{e}^{it}(i e^{it})}{(2-\mathrm{e}^{it})^4} = 2i\frac{\mathrm{e}^{it}}{(2-\mathrm{e}^{it})^2}, \qquad \varphi'(0) = i \cdot 2 = i \cdot m_1 \Rightarrow E(\mathbb{X}) = 2 \\ \varphi''(t) &= \frac{2i\mathrm{e}^{it}(2-\mathrm{e}^{it})^2 + \mathrm{e}^{it}(2 \cdot i\mathrm{e}^{it})}{(2-\mathrm{e}^{it})^4}, \qquad \varphi''(0) = i^2 \cdot 2 \cdot (1+3) = i^2 \cdot 6 \Rightarrow m_2 = E(\mathbb{X})^2 = 6 \\ D(\mathbb{X}) &= m_2 - m_1^2 = 6 - 2^2 = 2\end{aligned}$$

[15] teda $E(\mathbb{X})$ a $D(\mathbb{X})$ sa nesmú vyrátať pomocou ich definície...

3 Niektoré špeciálne rozdelenia

3.1 Niektoré diskrétne typy rozdelení

3.1.1 Binomické rozdelenie $\mathsf{Bi}(n, p)$

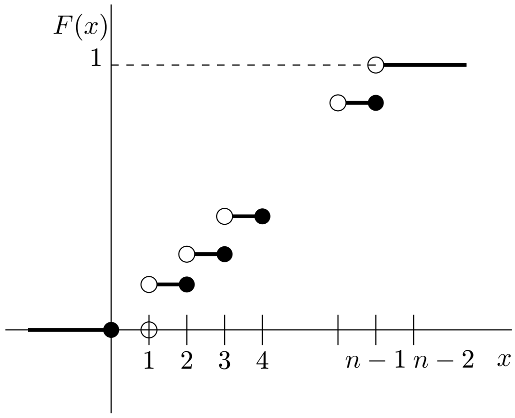
Definícia 3.1 (binomické rozdelenie)
Hovoríme, že diskrétna náhodná veličina $\mathbb{X}$ má *binomické rozdelenie* s parametrami n, p, ak nadobúda hodnoty $x_k = k$, $k = 0, 1, \ldots, n$ s pravdepodobnosťami

$$p_k = P(\mathbb{X} = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad p \in (0,1), n \in \mathbb{N}, k = 0, 1, \ldots, n$$

Interpretácia binomického rozdelenia. Bernoulliho schéma – realizujeme n nezávislých pokusov s možnými výsledkami ω, $\omega^{\complement}$, pričom $P(\{\omega\}) = p$, $p \in (0,1)$. Priraďme situácii „nastal jav ω“ hodnotu 1 a „nenastal jav ω“ hodnotu 0. Potom náhodná veličina $\mathbb{X}$ majúca binomické rozdelenie s parametrami n, p reprezentuje počet úspešných pokusov z n pokusov.

1. distribučná funkcia
$$F(x) = \sum_{k<x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

2. charakteristická funkcia
$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (p\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^k \cdot (1-p)^{n-k} = (p\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + 1 - p)^n$$



Obr. 1: Distribučná funkcia binomického rozdelenia

3. charakteristiky polohy a variability
$$\begin{aligned} E(\mathbb{X}) &= np \\ D(\mathbb{X}) &= np \cdot (1-p) \end{aligned}$$

Dôkaz:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= n(p\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + 1 - p)^{n-1} \cdot \mathrm{i}p\mathrm{e}^{it} \\ \varphi'(0) &= \mathrm{i} \cdot np = \mathrm{i} \cdot m_1 \Rightarrow m_1 = E(\mathbb{X}) = np \\ \varphi''(t) &= inp\left[(n-1)(p\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + 1 - p)^{n-2}) \cdot p\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \cdot e^{\mathrm{i}t} + (p\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + 1 - p)^{n-1} \cdot i\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi''(0) &= i^2np((n-1)p+1)\\ E(\mathbb{X}^2) &= n(n-1)p^2+np\\ D(\mathbb{X}) &= n^2p^2-np^2-np-(n^2p^2)=np(1-p)\end{aligned}$$ □

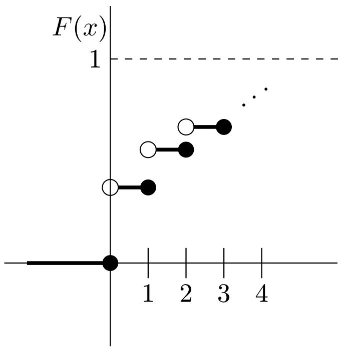
3.1.2 Poissonovo rozdelenie $\mathsf{Po}(\lambda)$

Definícia 3.2 (Poissonovo rozdelenie)
Hovoríme, že diskrétna náhodná veličina $\mathbb{X}$ má *Poissonovo rozdelenie* s parametrom λ, ak nadobúda hodnoty x_k, $k=0,1,\ldots$ s pravdepodobnosťami

$$p_k = P(\mathbb{X}=k) = \frac{\lambda^k}{k!}\cdot \mathrm{e}^{-\lambda}, \quad \lambda>0, k=0,1,2,\ldots$$

Interpretácia Poissonovho rozdelenia. Náhodná veličina $\mathbb{X}$ majúca Poissonovo rozdelenie s parametrom λ reprezentuje počet prípadov, v ktorých nastal sledovaný jav pri neobmedzenej realizácii daného pokusu za jednotku času. Napr. počet zákazníkov v obchode za časovú jednotku.

1. distribučná funkcia
$$F(x) = \sum_{k<x}\frac{\lambda^k}{k!}\cdot\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\sum_{k<x}\frac{\lambda^k}{k!}$$



Obr. 2: Distribučná funkcia Poissonovho rozdelenia. Pre x idúce do nekonečna sa bude „výška schodíkov“ zmenšovať, úroveň 1 sa nedosiahne v žiadnom konečnom bode.

2. charakteristická funkcia
$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{itk}\frac{\lambda^k}{k!}\cdot\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda\mathrm{e}^{it}}{k!}\right)^k$$

   Posledná suma je vlastne Taylorov rozvoj výrazu $\mathrm{e}^{(\cdot)}$. Teda máme
$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\mathrm{e}^{\lambda\mathrm{e}^{it}} = \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{it}-1)}$$

3. charakteristiky polohy a variability
$$\begin{aligned}E(\mathbb{X}) &= \lambda\\ D(\mathbb{X}) &= \lambda\end{aligned}$$

Dôkaz:

$$
\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{it}-1} \cdot \lambda i \mathrm{e}^{it} \\
\varphi'(0) &= i \cdot \lambda = i \cdot m_1 \Rightarrow E(\mathbb{X}) = \lambda \\
\varphi''(t) &= i\lambda \left(\mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{it}-1} \cdot \lambda i \mathrm{e}^{it} \cdot \mathrm{e}^{it} + \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{it}-1} \cdot i \mathrm{e}^{it} \right) \\
\varphi''(0) &= i^2 \lambda(\lambda+1) \Rightarrow E(\mathbb{X}^2) = \lambda(\lambda+1) \\
D(\mathbb{X}) &= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda
\end{aligned}
$$

□

3.1.3 Geometrické rozdelenie $\mathsf{Geo}(p)$

Definícia 3.3 (geometrické rozdelenie)
Hovoríme, že diskrétna náhodná veličina $\mathbb{X}$ má *geometrické rozdelenie* s parametrom p, ak nadobúda hodnoty $x_k = k$, $k = 0, 1, \dots$ s pravdepodobnosťami

$$p_k = P(\mathbb{X} = k) = p \cdot (1-p)^k, \quad p \in (0,1), k = 0, 1, \dots$$

Interpretácia geometrického rozdelenia. Náhodná veličina $\mathbb{X}$ majúca geometrické rozdelenie s parametrom p vyjadruje počet „neúspechov“ pred prvým úspechom pri neobmedzenej realizácii pokusov v Bernoulliho schéme.

1. distribučná funkcia
$$F(x) = p \cdot \sum_{k<x} (1-p)^k$$

2. charakteristická funkcia
$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{itk} \cdot p(1-p)^k = p \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left((1-p) \cdot \mathrm{e}^{it} \right)^k$$

   Pozrime sa na členy. Z definície je $p \in (0,1)$, teda aj $(1-p) \in (0,1)$. Už sme si ukázali, že $\mathrm{e}^{it} \leq 1$. Teda aj ich súčin je v absolútnej hodnote menší ako 1. To ale znamená, že suma je konvergentný geometrický rad. Teda.
$$\varphi(x) = \frac{p}{1-(1-p)\mathrm{e}^{it}}$$

3. charakteristika polohy a variability
$$
\begin{aligned}
E(\mathbb{X}) &= \frac{1-p}{p} \\
D(\mathbb{X}) &= \frac{1-p}{p^2}
\end{aligned}
$$

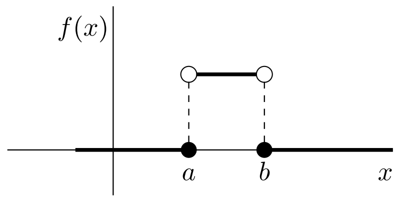
Dôkaz: Dôkaz nie je náročný, prenechávame ho čitateľovi. □

3.2 Niektoré spojité typy rozdelení

3.2.1 Rovnomerné rozdelenie $\mathsf{R}(a,b)$

Definícia 3.4 (rovnomerné rozdelenie)
Hovoríme, že spojitá náhodná veličina $\mathbb{X}$ má *rovnomerné rozdelenie* na intervale (a,b), ak má hustotu

$$f(x) \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{pre } x \in (a,b) \\ 0 & \text{inak} \end{cases} \qquad a < b;\ a, b \in \mathbb{R}$$

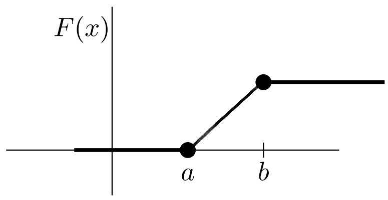


Obr. 3: Hustota rovnomerného rozdelenia spojitej náhodnej veličiny

Interpretácia rovnomerného rozdelenia. Náhodná veličina $\mathbb{X}$ s rovnomerným rozdelením $\mathsf{R}(a, b)$ reprezentuje dobu čakania na pravidelne sa opakujúcu udalosť. Napr. doba čakania na MHD – ak prídeme na zastávku v náhodnom okamihu, čas čakania má rovnomerné rozdelenie – minimálne čakáme 0 minút, maximálne n minút, kde n je časový interval medzi príchodmi spojov.

1. distribučná funkcia

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{ak } x < a \\ 1 & \text{ak } x \leq b \\ \displaystyle\int_a^x \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}t = \frac{x-a}{b-a} & \text{ak } x \in (a, b) \end{cases}$$



Obr. 4: Distribučná funkcia rovnomerného rozdelenia

2. charakteristická funkcia

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{itx} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_a^b \mathrm{e}^{itx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\left[\frac{\mathrm{e}^{itx}}{it}\right]_a^b \\ &= \frac{\mathrm{e}^{itb} - \mathrm{e}^{ita}}{i(b-a)t} \quad \forall t \in \mathbb{R}_1 - \{0\} \end{aligned}$$

Poznámka 3.1
$E(\mathbb{X})$, $D(\mathbb{X})$ sa počítajú z definície, nie podľa vzťahu $\varphi_0^{(k)} = i^k \cdot m_k$, lebo bod 0 nemôžeme v tomto prípade dosadiť.

3. charakteristika polohy a variability

$$\begin{aligned} E(\mathbb{X}) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} \Rightarrow E(\mathbb{X}) = \frac{a+b}{2} \\ E(\mathbb{X}^2) &= \frac{1}{b-a}\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{b} \\ D(\mathbb{X}) &= \frac{a^2+ab+b^2}{3}\cdot\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{a^2-2ab+b^2}{12} = \frac{(a-b)^2}{12} \end{aligned}$$

3.2.2 Exponenciálne rozdelenie $\mathsf{Ex}(\delta)$

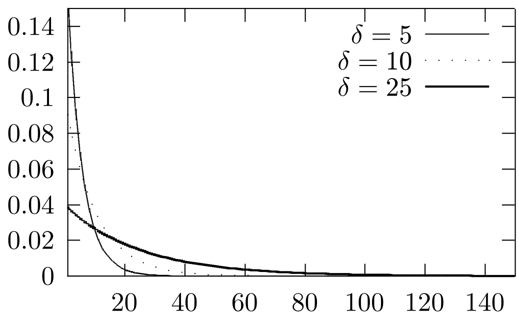
Definícia 3.5 (exponenciálne rozdelenie)
Hovoríme, že spojitá náhodná veličina má exponenciálne rozdelenie s parametrom δ ak má hustotu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\delta} \cdot \mathrm{e}^{-x/\delta} & \text{ak } x > 0 \\ 0 & \text{ak } x \leq 0 \end{cases}$$

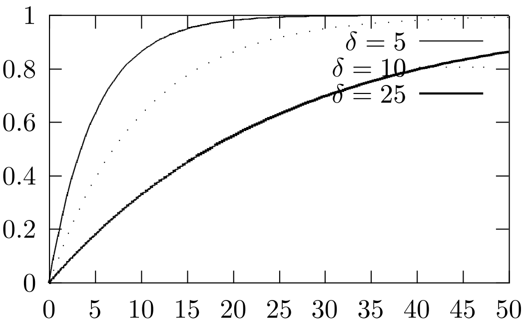
Interpretácia exponenciálneho rozdelenia Náhodná veličina $\mathbb{X}$ s exponenciálnym rozdelením $\mathsf{Ex}(\delta)$ reprezentuje[16]dobu čakania na náhodne sa vyskytujúce udalosti (dobu čakania na obsluhu, doba životnosti súčiastky).

1. distribučná funkcia

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{ak } x \leq 0 \\ \int_0^x \frac{1}{\delta} \cdot \mathrm{e}^{-t/\delta}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\delta}\left[\frac{\mathrm{e}^{-t/\delta}}{-\frac{1}{\delta}}\right]_0^x = -[\mathrm{e}^{-x/\delta} - 1] = 1 - \mathrm{e}^{-x/\delta} & \text{ak } x > 0 \end{cases}$$



Obr. 5: Hustota rozdelenia $\mathsf{Ex}(\delta)$



Obr. 6: Distribučná funkcia rozdelenia $\mathsf{Ex}(\delta)$

2. charakteristická funkcia

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} \cdot \frac{1}{\delta}\mathrm{e}^{-x/\delta}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\delta}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{(\delta \mathrm{i}t-1)\cdot x}{\delta}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\delta} \cdot \left[\frac{\mathrm{e}^{\frac{(\delta \mathrm{i}t-1)\cdot x}{\delta}}}{\frac{\delta \mathrm{i}t-1}{\delta}}\right]_0^{\infty} = \\ &= \frac{1}{\delta \mathrm{i}t}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}t-\frac{1}{\delta}\cdot x}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{\delta \mathrm{i}t - 1}(0-1) = \frac{1}{1 - \mathrm{i}t\delta}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

[16]V ďalšom budeme pojem „náhodná veličina majúca exponenciálne (resp. iné) rozdelenie“ označovať ako $\mathbb{X} \sim \mathsf{Ex}(\delta)$.

3. charakteristiky polohy a variability

$$E(\mathbb{X}) = \delta, \qquad D(\mathbb{X}) = \delta^2$$

Dôkaz:

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \frac{-1}{1-\mathrm{i}t\delta}^{2} \cdot (-\mathrm{i}\delta) = \frac{\mathrm{i}\delta}{1-2\mathrm{i}t\delta+\mathrm{i}^2t^2\delta^2} = \frac{\mathrm{i}\delta}{t^2\delta^2-2\mathrm{i}t+1} \\
\varphi'(0) &= \frac{\mathrm{i}\delta}{1} \Rightarrow E(\mathbb{X}) = \delta \\
\varphi''(t) &= \frac{(-2)\cdot \mathrm{i}\delta}{(1-\mathrm{i}t\delta)^3} \cdot (-\mathrm{i}\delta) = \frac{2\cdot i^2\delta^2}{(1-\mathrm{i}t\delta)^3} \\
\varphi''(0) &= \mathrm{i}^2\left(\frac{2\delta^2}{(1-0)^3}\right) \Rightarrow E(\mathbb{X}^2) = \frac{2\delta^2}{(1-0)^3} = 2\delta^2 \\
D(\mathbb{X}) &= E(\mathbb{X}^2) - E^2(\mathbb{X}) = 2\delta^2 - \delta^2 = \delta^2
\end{aligned}$$

□

3.2.3 Normálne rozdelenie $\mathsf{N}(a, \sigma^2)$

Definícia 3.6 (normálne rozdelenie)
Hovoríme, že spojitá náhodná veličina $\mathbb{X}$ má *normálne (Gaussovo) rozdelenie* s parametrami a, σ^2, ak má hustotu[17]

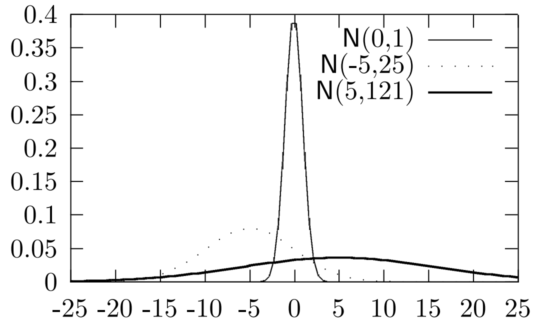
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \qquad \text{pre } x \in \mathbb{R}_1, a \in (-\infty, \infty), \sigma > 0$$

Interpretácia normálneho rozdelenia. Náhodná veličina $\mathbb{X} \sim \mathsf{N}(a, \sigma^2)$ reprezentuje napr. náhodnú chybu v meraní.

1. distribučná funkcia

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t$$

Tento integrál ale nemá primitívnu funkciu medzi elementárnymi funkciami. Preto sa hodnoty $F(x)$ aproximujú pre špeciálny prípad $a = 0$, $\sigma^2 = 1$, čím dostaneme tzv. *normované (štandardizované) normálne rozdelenie.*



Obr. 7: Hustota rozdelenia $\mathsf{N}(a, \sigma^2)$ pre rôzne hodnoty a, σ^2

[17] Parameter σ^2 čítame „sigma kvadrát“.

2. charakteristická funkcia
$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}ta - \frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

3. charakteristiky polohy a variability
$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}ta - \frac{t^2\sigma^2}{2}} \cdot (\mathrm{i}a - 2\frac{t\sigma^2}{2}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}ta - \frac{t^2\sigma^2}{2}} \cdot (\mathrm{i}a - t\sigma^2) \\
\varphi'(0) &= \mathrm{i}a \Rightarrow E(\mathbb{X}) = a \\
\varphi''(t) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}ta - \frac{t^2\sigma^2}{2}} \cdot (\mathrm{i}a - t\sigma^2) \cdot (\mathrm{i}a - t\sigma^2) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}ta - \frac{t^2\sigma^2}{2}}(-\sigma^2) \\
\varphi''(0) &= \mathrm{i}^2(a^2 + \sigma^2) \Rightarrow E(\mathbb{X}^2) = a^2 + \sigma^2 \\
D(\mathbb{X}) &= E(\mathbb{X}^2) - E^2(\mathbb{X}) = a^2 + \sigma^2 - a^2 = \sigma^2
\end{aligned}$$

Normované normálne rozdelenie. Nech $\mathbb{X} \sim \mathsf{N}(a, \sigma^2)$. Potom náhodná veličina
$$\mathbb{U} = \frac{\mathbb{X} - E(\mathbb{X})}{\sqrt{D(\mathbb{X})}} = \frac{\mathbb{X} - a}{\sigma} \sim \mathsf{N}(0, 1)$$

Dôkaz: Ak $\mathbb{X} \sim \mathsf{N}(a, \sigma)$ práve vtedy, keď $\varphi_{\mathbb{X}}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}ta - \frac{t^2\sigma^2}{2}}$. Chceme dokázať, že $\mathbb{U} \sim \mathsf{N}(0, 1)$ práve vtedy, keď $\varphi_{\mathbb{U}}(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$. Počítajme:
$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathbb{U}}(t) &= \varphi_{\frac{\mathbb{X}-a}{\sigma}}(t) = \varphi_{\frac{1}{\delta}\mathbb{X} + (-\frac{a}{\sigma})}(t) \stackrel{\text{v. 3}}{=\!=} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t(-\frac{a}{\sigma})} \cdot \varphi_{\mathbb{X}}\left(\frac{1}{\sigma} \cdot t\right) \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}t(-\frac{a}{\sigma})} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot(\frac{t}{\sigma})a - \frac{(1/\sigma)^2 t^2}{2}} = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}ta}{\sigma}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}ta}{\sigma} - \frac{(1/\sigma)^2 t^2}{2}} \\
&= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}
\end{aligned}$$
□

Poznámka 3.2
Distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia sa zvykne označovať $\Phi(u)$.

Veta 3.1 (pravidlo 3σ)
Nech $\mathbb{X} \sim \mathsf{N}(a, \sigma^2)$. *Potom* $P(|\mathbb{X} - a| < 3\sigma) = 0{,}9973$.

Dôkaz:
$$P(|\mathbb{X} - a| < 3\sigma) = P\left(\left|\frac{\mathbb{X} - a}{\sigma}\right| < 3\right)$$

Z vlastností normovaného normálneho rozdelenia má náhodná veličina $\left|\frac{\mathbb{X}-a}{\sigma}\right| = \mathbb{U} \sim \mathsf{N}(0, 1)$. Teda máme
$$\begin{aligned}
P(|\mathbb{U}| < 3) &= P(\mathbb{U} \in (-3, 3)) = \Phi(3) - \Phi(-3) = \Phi(3) - (1 - \Phi(3)) = 2\Phi(3) - 1 = \\
&= 2 \cdot 0{,}99865 - 1 = 0{,}9973
\end{aligned}$$
□

Poznámka 3.3 (Význam rozdelenia $\mathsf{N}(0, 1)$)
- Z normovaného normálneho rozdelenia sa dajú odvodiť tri špeciálne typy rozdelení – χ^2, t a F-rozdelenie, ktoré sú dôležité v matematickej štatistike.
- Súčet veľkého počtu nezávislých náhodných veličín má za veľmi všeobecných podmienok približne normované normálne rozdelenie. To je podstatou centrálnych limitných viet.

3.2.4 Chí-kvadrát rozdelenie (χ^2-rozdelenie)

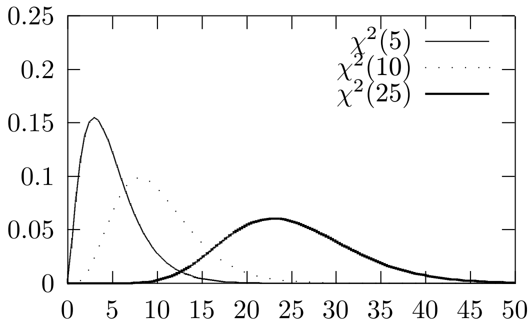
Definícia 3.7 (nezávislosť náhodných veličín)
Hovoríme, že náhodné veličiny $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \dots, \mathbb{X}_n$ sú *nezávislé*, ak sú nezávislé im odpovedajúce javy, t. j. platí

$$P(\mathbb{X}_1 < x_1, \mathbb{X}_2 < x_2, \mathbb{X}_3 < x_3) = \prod_{i=1}^{n} P(\mathbb{X}_i < x_i)$$

Definícia 3.8 (χ^2-rozdelenie)
Hovoríme, že spojitá náhodná veličina $\mathbb{Y}_n$ má chí-kvadrát rozdelenie o n stupňoch voľnosti, ak má hustotu

$$f_n(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot y^{\frac{n}{2}-1} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{y}{2}} & \text{ak } y > 0 \\ 0 & \text{ak } y \leq 0 \end{cases}$$

Označujeme $\mathbb{Y}_n \sim \chi^2(n)$.



Obr. 8: Hustota rozdelenia $\chi^2(n)$

Vlastnosti rozdelenia chí-kvadrát.

1. Rozdelenie $\chi^2(n)$ nie je symetrické[18]. Kvantily sa tabelizujú pre $n = 1, \dots, 100$. Pre $n > 100$ sa toto rozdelenie aproximuje normálnym rozdelením $\mathsf{N}(n, 2n)$.

2. Charakteristická funkcia, charakteristiky polohy a variability.

$$\varphi(t) = \frac{1}{(1-2\mathrm{i}t)^{\frac{n}{2}}}, \qquad E(\mathbb{Y}) = n, \qquad D(\mathbb{Y}) = 2n$$

3. Platí nasledovná vlastnosť:

$$\mathbb{Y}_n \sim \chi^2(n) \Leftrightarrow \mathbb{Y}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{X}_i^2,$$

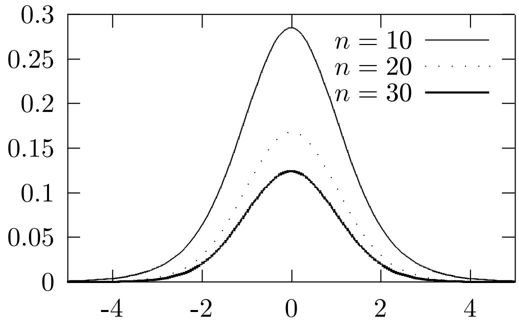
kde $\mathbb{X}_i \sim \mathsf{N}(0,1)$ a veličiny $\mathbb{X}_i$ sú nezávislé.

3.2.5 Studentovo rozdelenie (t-rozdelenie)

Definícia 3.9 (Studentovo (t-) rozdelenie)
Hovoríme, že spojitá náhodná veličina $\mathbb{T}$ má *Studentovo rozdelenie* (t*-rozdelenie*) o n stupňoch voľnosti, ak má hustotu

$$f_n(t) = \frac{1}{\beta\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \quad \text{pre } t \in (-\infty, \infty), n \in \mathbb{N}$$

[18]Čím väčšie je n, tým má rozdelenie bližšie k symetrickému.



Obr. 9: Hustota rozdelenia $t(n)$

Vlastnosti t-rozdelenia

1. Rozdelenie t je symetrické. Kvantily sú tabelované pre $n \leq 30$. Pre väčšie n sa toto rozdelenie aproximuje pomocou rozdelenia $\mathsf{N}\left(0, \frac{n}{n-2}\right)$.
2. Charakteristiky polohy a variability.

$$E(\mathbb{T}) = 0, \qquad D(\mathbb{T}) = \frac{n}{n-2}, \quad \text{pre } n > 2$$

3. Platí:

$$\mathbb{T} \sim t(n) \Leftrightarrow \mathbb{T} = \frac{\mathbb{X}}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{X}_i^2}} \tag{3.9}$$

kde $\mathbb{X}_i \sim \mathsf{N}(0,1)$ a veličiny $\mathbb{X}_i$ sú nezávislé.

3.2.6 Fischerovo-Snedecorovo rozdelenie (F-rozdelenie)

Definícia 3.10 (F-rozdelenie)
Hovoríme, že spojitá náhodná veličina $\mathbb{Z}$ má *Fischerovo-Snedecorovo rozdelenie* (*F-rozdelenie*) s n_1, n_2 stupňami voľnosti, ak má hustotu

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{\beta\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right)} \cdot \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} \cdot z^{\frac{n_1}{2}-1} \cdot \left(1 + \frac{n_1}{n_2} \cdot z\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}} & \text{ak } z > 0 \\ 0 & \text{ak } z \leq 0 \end{cases}$$

Vlastnosti F-rozdelenia

1. Rozdelenie $F(n_1, n_2)$ nie je symetrické. Kvantily sú tabelované pre $n_1 \leq 100$, $n_2 \leq 100$. Pre $n_1 > 100$ alebo $n_2 > 100$ odhadujeme toto rozdelenie normálnym rozdelením $\mathsf{N}(E(\mathbb{Z}), D(\mathbb{Z}))$. Pre interpoláciu kvantilov v tabuľkách sa používa vzťah

$$F_\alpha(n_1, n_2) = \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_2, n_1)}$$

2. Charakteristiky polohy a variability.

$$E(\mathbb{Z}) = \frac{n_2}{n_2 - 2}, \qquad D(\mathbb{Z}) = \frac{2n_2^2(n_1 + n_2 + 2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)}, \quad n_2 > 4$$

3. Náhodná veličina $\mathbb{Z} \sim F(n_1, n_2)$ práve vtedy, keď
$$\mathbb{Z} = \frac{\frac{1}{n_1} \cdot \mathbb{Y}_1}{\frac{1}{n_2} \cdot \mathbb{Y}_2} = \frac{\frac{1}{n_1} \cdot \sum_{i=1}^{n_1} \mathbb{X}_{1_i}^2}{\frac{1}{n_2} \cdot \sum_{i=1}^{n_2} \mathbb{X}_{2_i}^2},$$
kde $\mathbb{Y}_i \sim \chi^2(n_i)$, pre $i = 1, 2$ a $\mathbb{X}_{11}, \ldots, \mathbb{X}_{1n_1}, \mathbb{X}_{21}, \ldots, \mathbb{X}_{2n_2} \sim \mathsf{N}(0,1)$ a sú navyše nezávislé.

4 Centrálne limitné vety

Podstatou centrálnych limitných viet je fakt, že súčet veľkého počtu nezávislých náhodných veličín za veľmi všeobecných podmienok má asymptoticky normálne rozdelenie. Tieto podmienky spresnia nasledovné tri vety.

Veta 4.1 (Moivre-Laplace)
Nech $\mathbb{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{X}_i$, *kde* $\mathbb{X}_i$ *sú nezávislé náhodné veličiny s rozdelením* $\mathbb{X}_i \sim \mathsf{Bi}(1,p) = A(p)$ *(vykonávame len jeden pokus). Potom normovaná veličina* $\widehat{\mathbb{S}}_n$ *má približne normované normálne rozdelenie:*
$$\widehat{\mathbb{S}}_n = \frac{\mathbb{S}_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \dot{\sim} \mathsf{N}(0,1),$$
t. j.
$$\lim_{n \to \infty} F_{\widehat{\mathbb{S}}_n}(s) = \Phi(s)$$

Veta 4.2 (Feller-Lindeberg)
Nech $\mathbb{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{X}_i$, *kde* $\mathbb{X}_i$ *sú nezávislé náhodné veličiny s identickým rozdelením a s konečnou strednou hodnotou* $E(\mathbb{X}_i) = a < \infty$ *a konečnou disperziou* $D(\mathbb{X}_i) = \sigma^2 < \infty$ *pre* $i = 1, \ldots, n$. *Potom náhodná veličina* $\widehat{\mathbb{S}}_n$ *má približne normované normálne rozdelenie:*
$$\widehat{\mathbb{S}}_n = \frac{\mathbb{S}_n - na}{\sqrt{n\sigma^2}} \dot{\sim} \mathsf{N}(0,1),$$

Veta 4.3 (Ljapunov)
Nech $\mathbb{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{X}_i$, *kde* $\mathbb{X}_i$ *sú nezávislé náhodné veličiny s konečnou strednou hodnotou* $E(\mathbb{X}_i) < \infty$ *pre* $i = 1, \ldots, n$ *a konečnou disperziou* $D(\mathbb{X}_i) < \infty$) *pre* $i = 1, \ldots, n$. *Nech platí Ljapunovova podmienka*
$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt[3]{\sum_{i=1}^{n} E(|\mathbb{X}_i - E(\mathbb{X}_i)|^3)}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} D(\mathbb{X}_i)}} = 0$$
Potom náhodná veličina $\widehat{\mathbb{S}}_n$ *má približne normované normálne rozdelenie:*
$$\widehat{\mathbb{S}}_n = \frac{\mathbb{S}_n - \sum_{i=1}^{n} E(\mathbb{X}_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} D(\mathbb{X}_i)}} \dot{\sim} \mathsf{N}(0,1)$$

5 Náhodné vektory – viacrozmerné náhodné veličiny

5.1 Združené a marginálne rozdelenie

Nech je daný pravdepodobnostný priestor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Uvažujme kartézsky súčin intervalov $I_n = (-\infty, x_1) \times (-\infty, x_2) \times \ldots \times (-\infty, x_n)$, kde $x_i \in \mathbb{R}$, pre $i = 1, \ldots, n$.

Definícia 5.1 (náhodný vektor)
Zobrazenie
$$\mathbb{X} = (\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \dots \mathbb{X}_n) : \Omega \to \mathbb{R}_n$$
sa nazýva *náhodným vektorom* v $\mathbb{R}_n$, ak vzorom ľubovoľného intervalu v $\mathbb{R}_n$ typu I_n je jav, t. j. platí
$$\mathbb{X}^{-1}(I_n) = \{\omega \in \Omega : \mathbb{X}_1(\omega) < x_1, \mathbb{X}_2(\omega) < x_2, \dots, \mathbb{X}_n(\omega) < x_n\} \in \mathcal{A}$$

Poznámka 5.1
Vektor $(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \dots, \mathbb{X}_n)$ je náhodný vektor práve vtedy, ak zložky $\mathbb{X}_i$ sú náhodné veličiny.

Definícia 5.2 (združená distribučná funkcia)
Reálna funkcia $F_{\mathbb{X}} : \mathbb{R}_n \to \langle 0, 1\rangle$ definovaná vzťahom
$$F_{\mathbb{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(\mathbb{X}_1 < x_1, \mathbb{X}_2 < x_2, \dots, \mathbb{X}_n < x_n)$$
sa nazýva *združenou distribučnou funkciou* náhodného vektora $(\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n)$. Distribučné funkcie zložiek náhodného vektora $F_i(x_i)$ pre $i = 1, \dots, n$ nazývame *marginálne distribučné funkcie*.

Veta 5.1
Nech $F_{\mathbb{X}}(x_1, \dots, x_n)$ je združenou distribučnou funkciou náhodného vektora $\mathbb{X} = (\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n)$. Potom platí:

- $\lim\limits_{\forall i: x_i \to \infty} F(x_1, \dots, x_n) = 1$ a $\lim\limits_{\exists i: x_i \to -\infty} F(x_1, \dots, x_n) = 0$
- $F(x_1, \dots, x_n)$ *je neklesajúca vzhľadom na každú premennú*
- $F(x_1, \dots, x_n)$ *je zľava spojitá vzhľadom na každú premennú*

Dôkaz: Dôkaz je podobný ako v prípade $\mathbb{R}_1$ (pozri minulý semester). □

Veta 5.2
Nech $F(x_1, \dots, x_n)$ je združenou distribučnou funkciou náhodného vektora $(\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n)$. Potom pre marginálne distribučné funkcie zložiek platí:
$$F_{\mathbb{X}_i} = F_i(x_i) = \lim_{\substack{x_j \to \infty \\ j \neq i}} F(x_1, \dots, x_n)$$

Dôkaz: Dôkaz urobíme pre $n = 2$. Bez ujmy na všeobecnosti chceme dokázať, že $F_1(x) = \lim\limits_{x_2 \to \infty} F(x_1, x_2)$. Uvažujme postupnosť reálnych čísel $\{x_{2_n}\}_{n=1}^{\infty}$ takú, že pre $n \to \infty$ ide $\{x_{2_n}\} \to \infty$. Potom
$$\lim_{x_2 \to \infty} F(x_1, x_2) = \lim_{x_{2_n} \to \infty} F(x_1, x_{2_n}) = \lim_{x_{2_n} \to \infty} P(\mathbb{X}_1 < x_1, \mathbb{X}_2 < x_{2_n}) = \Delta$$
Označme $A_n = \{\omega \in \Omega : \mathbb{X}_1(\omega) < x_1 \wedge \mathbb{X}_2(\omega) < x_{2_n}\}$. Postupnosť javov $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca (nezabudnite si to premyslieť!) a preto podľa poznámky 1.12 je $\lim\limits_{n \to \infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Pokračujeme vo výpočte výrazu (Δ):
$$\begin{aligned}
\Delta &= \lim_{x_{2_n} \to \infty} P(A_n) \overset{\text{spojitosť } P(\cdot)}{=\!=} P\left(\lim_{x_{2_n} \to \infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \\
&= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega : \mathbb{X}_1(\omega) < x_1 \wedge \mathbb{X}_2(\omega) < x_{2_n}\}\right) \\
&= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega : \mathbb{X}_1(\omega) < x_1\} \cap \{\omega \in \Omega : \mathbb{X}_2(\omega) < x_{2_n}\}\right) \\
\text{(distr. zákon)} \quad &= P\left(\{\omega \in \Omega : \mathbb{X}_1(\omega) < x_1\} \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega : \mathbb{X}_2(\omega) < x_{2_n}\}\right) =
\end{aligned}$$
□

Pozrime sa teraz na prienik pod pravdepodobnostnou funkciou. Prvý člen tvorí vlastne $\mathbb{X}_1 < x_1$, druhý člen je celý pravdepodobnostný priestor Ω (pretože $x_{2_n} \to \infty$ a zjednocujeme rastúcu postupnosť). Ich prienik je teda práve prvý člen prieniku a teda môžeme pokračovať vo výpočte:

$$= P(\mathbb{X}_1 < x_1) = F_1(x_1) = F_{\mathbb{X}_1}(x_1)$$

Poznámka 5.2
Podľa vety 5.2, ak poznáme združenú distribučnú funkciu, vieme určiť jednoznačne všetky marginálne distribučné funkcie. Vo všeobecnosti to naopak neplatí; ak poznáme marginálne distribučné funkcie, nevieme jednoznačne skonštruovať združenú distribučnú funkciu. Výnimku tvorí prípad nezávislých náhodných veličín. Ak $P(\mathbb{X}_1 < x_1, \ldots \mathbb{X}_n < x_n) = \prod\limits_{i=1}^{n} P(\mathbb{X}_i < x_i)$, potom

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_i(x_i).$$

5.2 Diskrétne a absolútne spojité rozdelenie v $\mathbb{R}_2$

Definícia 5.3 (diskrétne rozdelenie náhodného vektora)
Hovoríme, že náhodný vektor $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ má *diskrétne rozdelenie*, ak existujú postupnosti reálnych čísel $\{x_i\}_{i\in I}$, $\{y_j\}_{j\in J}$ a odpovedajúca postupnosť kladných čísel $\{p_{ij}\}_{i\in I, j\in J}$ tak, že platí:

$$p_{ij} = P(\mathbb{X} = x_i, \mathbb{Y} = y_j) \qquad \& \qquad \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} p_{ij} = 1$$

a

$$F(x, y) = \sum_{x_i<x}\sum_{y_j<y} p_{ij}$$

Pravdepodobnosť p_{ij} sa nazýva *združený zákon rozdelenia* náhodného vektora $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

Definícia 5.4 (absolútne spojité rozdelenie)
Hovoríme, že náhodný vektor $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ má *absolútne spojité rozdelenie*, ak existuje nezáporná, v $\mathbb{R}_2$ integrovateľná funkcia $f(x, y)$ taká, že platí:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 1 \qquad \& \qquad F(x, y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u, v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u$$

Funkcia $f(x, y)$ sa nazýva *združenou hustotou náhodného vektora* $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ a platí

$$f(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

Veta 5.3
Nech p_{ij} je združený zákon rozdelenia diskrétneho náhodného vektora $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Potom pre marginálne zákony zložiek platí:

$$p_{i\bullet} = \sum_j p_{ij} \qquad \text{a} \qquad p_{\bullet j} = \sum_i p_{ij}$$

Dôkaz: Bez ujmy na všeobecnosti dokážeme prvý vzťah (druhý vzťah sa dokáže analogicky). Vyjdeme z marginálnej distribučnej funkcie

$$F_1(x) \stackrel{\text{v. 5.2}}{=\!=} \lim_{y\to\infty} F(x, y) \stackrel{\text{def.}}{=\!=} \lim_{y\to\infty} \sum_{x_i<x}\sum_{y_i<y} p_{ij} = \sum_{x_i<x} \lim_{y\to\infty} \sum_{y_i<y} p_{ij} =$$

Ak $y \to \infty$ a počítame sumu cez všetky $y_j < y$, je to v podstate to isté ako výpočet sumy pre všetky j. Máme teda

$$F_1(x) = \sum_{x_i<x} \underbrace{\sum_{\forall j} p_{ij}}_{p_{i\bullet}}, \qquad \text{z čoho } p_{i\bullet} = \sum_{\forall j} p_{ij}$$

Veta 5.4
Nech $f(x,y)$ je združenou hustotou spojitého náhodného vektora $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$. Potom pre marginálne hustoty zložiek platí:

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y \qquad \text{a} \qquad f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

Dôkaz: Opäť bez ujmy na všeobecnosti dokážeme prvý vzťah a opäť vyjdeme z marginálnej distribučnej funkcie:

$$\begin{aligned} F_1(x) &\overset{\text{v. 5.2}}{=} \lim_{y\to\infty} F(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \lim_{y\to\infty} \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{-\infty}^{x} \lim_{y\to\infty}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

Označme v poslednom dvojnom integráli $f(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)\,\mathrm{d}v$ a to sa nám hodí do definície, pretože $F_1(x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)\,\mathrm{d}u$. Stačí už len „premenovať“ premenné vo vyjadrení $f(u)$ a dostaneme požadované tvrdenie. □

Poznámka 5.3
V časti 5.1 sme vybudovali aparát potrebný na dokázanie vety 2.4, bod 3.)

$$E(a\mathbb{X}\pm b\mathbb{Y}) = aE(\mathbb{X})\pm bE(\mathbb{Y})$$

Dôkaz: Podľa vety o prenose integrácie pre funkciu dvoch premenných platí:

$$\begin{aligned} E(\underbrace{a\mathbb{X}\pm b\mathbb{Y}}_{g(\mathbb{X},\mathbb{Y})}) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (ax\pm by)\cdot f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= a\cdot\int_{-\infty}^{\infty} x\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \pm b\cdot\int_{-\infty}^{\infty} y\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\ &\overset{\text{v. 5.3}}{=} a\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f_1(x)\,\mathrm{d}x \pm b\int_{-\infty}^{\infty} y\cdot f_2(y)\,\mathrm{d}y \\ &= a\cdot E(\mathbb{X})\pm b\cdot E(\mathbb{Y}) \end{aligned}$$

□

5.3 Podmienené rozdelenie v $\mathbb{R}_2$

Definícia 5.5 (podmienené rozdelenie náhodného vektora)
Nech $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ je diskrétny náhodný vektor so združeným zákonom rozdelenia

$$p_{ij}=P(\mathbb{X}=x_i,\mathbb{Y}=y_j), i\in I, j\in J$$

Potom *podmienené rozdelenie* náhodného vektora $\mathbb{X}$ za predpokladu $\mathbb{Y}$ definujeme ako

$$P(\mathbb{X}=x_i|\mathbb{Y}=y_j)=\frac{P(\mathbb{X}=x_i,\mathbb{Y}=y_j)}{P(\mathbb{Y}=y_j)}, \forall i\in I, j\in J, \quad \text{pričom } P(\mathbb{Y}=y_j)>0$$

Odpovedajúca podmienená distribučná funkcia je daná vzťahom

$$F(x|y)=\sum_{x_i<x} P(\mathbb{X}=x_i|\mathbb{Y}=y_j)$$

Definícia 5.6 (podmienená hustota)
Nech $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ je spojitý náhodný vektor, ktorého rozdelenie je dané združenou hustotou $f(x,y)$. Potom *podmienená hustota* náhodnej veličiny $\mathbb{X}$ za podmienky $\mathbb{Y}$ definujeme ako

$$f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}$$

Odpovedajúca podmienená distribučná funkcia je definovaná vzťahom

$$F(x|y) = \int_{-\infty}^{x} f(t|y)\,\mathrm{d}t$$

Poznámka 5.4

1. Analogicky definujeme funkciu $F(y|x)$.
2. Môžeme definovať aj podmienené charakteristiky podľa vzťahu

$$E(\mathbb{X}^k|\mathbb{Y}) \overset{\text{spoj.}}{=\!=} \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x|y)\,\mathrm{d}x.$$

5.4 Charakteristiky náhodného vektora

Charakteristika polohy náhodného vektora $(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \ldots, \mathbb{X}_n)$ je definovaná ako vektor stredných hodnôt

$$E(\mathbb{X}_1, \ldots, \mathbb{X}_n) = (E(\mathbb{X}_1), \ldots, E(\mathbb{X}_n)).$$

Definícia 5.7 (kovariančná matica)
Kovariančnou maticou $K_{\mathbb{X}}$ náhodného vektora $\mathbb{X} = (\mathbb{X}_1, \ldots, \mathbb{X}_n)$ nazývame symetrickú maticu danú prvkami

$$\begin{aligned} K_{ii} &= D(\mathbb{X}_i), \quad \forall i = 1, \ldots, n \\ K_{ij} &= E[(\mathbb{X}_i - E(\mathbb{X}_i))(\mathbb{X}_j - E(\mathbb{X}_j))] = \operatorname{cov}(\mathbb{X}_i, \mathbb{X}_j), \quad \forall i = 1, \ldots, n; i \neq 1 \end{aligned}$$

Číslo $K_{ij} = \operatorname{cov}(\mathbb{X}_i, \mathbb{X}_j)$ nazývame *kovarianciou náhodných vektorov* $\mathbb{X}_i$, $\mathbb{X}_j$.

Definícia 5.8 (korelačná matica)
Korelačnou maticou náhodného vektora $\mathbb{X} = (\mathbb{X}_1, \ldots, \mathbb{X}_n)$ nazývame symetrickú maticu $R_{\mathbb{X}} = (\varrho_{ij})_{i,j=1}^{n}$ s prvkami

$$\begin{aligned} \varrho_{ii} &= 1, \forall i = 1, \ldots, n \\ \varrho_{ij} &= \frac{\operatorname{cov}(\mathbb{X}_i, \mathbb{Y}_j)}{\sqrt{D(\mathbb{X}_i) \cdot D(\mathbb{X}_j)}}, \quad \forall i, j \in 1, \ldots, n, \text{pričom } D(\mathbb{X}_i) > 0, i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Číslo $\varrho_{ij} = \varrho(\mathbb{X}_i, \mathbb{X}_j)$ sa nazýva *korelačný koeficient náhodných vektorov* $\mathbb{X}_i$, $\mathbb{X}_j$, pričom $i \neq j$.

Poznámka 5.5

1. Disperzia (variancia, rozptyl) je špeciálnym prípadom kovariancie pre $i = j$.
2. Výpočtový tvar kovariancie je

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(\mathbb{X}_i, \mathbb{X}_j) &= E[(\mathbb{X}_i - E(\mathbb{X}_i))(\mathbb{X}_j - E(\mathbb{X}_j))] \\ &= E[\mathbb{X}_i \cdot \mathbb{X}_j - \mathbb{X}_i \cdot \underbrace{E(\mathbb{X}_j)}_{\text{konšt.}} - \mathbb{X}_j \cdot \underbrace{E(\mathbb{X}_i)}_{\text{konšt.}} + E(\mathbb{X}_i) \cdot E(\mathbb{X}_j)] \\ &= E(\mathbb{X}_i \cdot \mathbb{X}_j) - E(\mathbb{X}_i) \cdot E(\mathbb{X}_j) - E(\mathbb{X}_j) \cdot E(\mathbb{X}_i) + E(\mathbb{X}_i) \cdot E(\mathbb{X}_j) \\ &= E(\mathbb{X}_i \cdot \mathbb{X}_j) - E(\mathbb{X}_i) \cdot E(\mathbb{X}_j). \end{aligned}$$

Veta 5.5
Nech náhodné veličiny $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ *sú nezávislé. Potom platí:*

1. $E(\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y}) = E(\mathbb{X}) \cdot E(\mathbb{Y})$
2. $D(\mathbb{X} \pm \mathbb{Y}) = D(\mathbb{X}) + D(\mathbb{Y})$
3. $\varphi_{\mathbb{X}+\mathbb{Y}}(t) = \varphi_{\mathbb{X}}(t) \cdot \varphi_{\mathbb{Y}}(t)$

Dôkaz:

1. Nech $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ sú nezávislé. To je však práve vtedy, ak zodpovedajúce javy sú nezávislé a teda $F(x,y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$, ale aj $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$. Podľa vety o prenose integrácie:
$$E(\underbrace{\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y}}_{g(\mathbb{X})}) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \overset{\text{nezávislosť}}{=\!=} \int_{-\infty}^{\infty} xy \cdot f_1(x) \cdot f_2(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$
Podľa vety z matematickej analýzy možno posledný člen napísať ako:
$$\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_1(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_2(y)\,\mathrm{d}y = E(\mathbb{X}) \cdot E(\mathbb{Y})$$

2. Pre kovarianciu platí, že $\mathrm{cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = E(\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y}) - E(\mathbb{X}) \cdot E(\mathbb{Y}) \overset{\text{a)}}{=\!=} E(\mathbb{X}) \cdot E(\mathbb{Y}) - E(\mathbb{X}) \cdot E(\mathbb{Y}) = 0$. Podľa vety 2.5, bodu 3.) o vlastnostiach disperzie, platí rovnosť $D(\mathbb{X} \pm \mathbb{Y}) = D(\mathbb{X}) + D(\mathbb{Y}) \pm 2\,\mathrm{cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = D(\mathbb{X}) + D(\mathbb{Y})$. Člen $\mathrm{cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ je však rovný nule, preto dostávame požadovanú rovnosť.

3. Vyjdime z definície charakteristickej funkcie: $\varphi_{\mathbb{X}+\mathbb{Y}}(t) = E(\mathrm{e}^{it(\mathbb{X}+\mathbb{Y})}) = E(\mathrm{e}^{it\mathbb{X}} \cdot \mathrm{e}^{it\mathbb{Y}})$. Pozrime sa bližšie na obidva členy vo vnútri. Premenné i, t v exponente sú konštanty, náhodné veličiny $\mathbb{X}$ a $\mathbb{Y}$ sú nezávislé. Potom sú ale nezávislé aj členy $it\mathbb{X}$ a $it\mathbb{Y}$ a dokonca aj členy $\mathrm{e}^{it\mathbb{X}}$ a $\mathrm{e}^{it\mathbb{Y}}$. Ďalej podľa už dokázaného bodu 1) máme po úprave $E(\mathrm{e}^{it\mathbb{X}}) \cdot E(\mathrm{e}^{it\mathbb{Y}}) = \varphi_{\mathbb{X}}(t) \cdot \varphi_{\mathbb{Y}}(t)$, čo sme chceli dokázať. □

Poznámka 5.6

Poslednú vetu možno zovšeobecniť: strednú hodnotu súčinu nezávislých veličín možno spočítať ako súčin ich stredných hodnôt, disperziu súčtu nezávislých veličín možno vyrátať ako súčet ich disperzií, a charakteristickú funkciu súčtu nezávislých náhodných veličín možno vypočítať ako súčin charakteristických funkcií jednotlivých náhodných veličín. Skrátene zapísané:
$$E\left(\prod_{i=1}^{n} \mathbb{X}_i\right) = \prod_{i=1}^{n} E(\mathbb{X}_i), \qquad D\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{X}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D(\mathbb{X}_i), \qquad \varphi_{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{X}_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{\mathbb{X}_i}(t)$$

Veta 5.6 (vlastnosti $\varrho(\mathbb{X},\mathbb{Y})$)

Nech $\varrho(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ *je korelačný koeficient náhodného vektora* $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$. *Potom platí:*

1. *ak* $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ *sú nezávislé, potom* $\varrho(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = 0$
2. *ak* $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ *sú lineárne závislé, potom* $|\varrho(\mathbb{X},\mathbb{Y})| = 1$
3. *ak* $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ *sú ľubovoľné náhodné veličiny, tak* $|\varrho(\mathbb{X},\mathbb{Y})| \leq 1$

Dôkaz:

1. Ak $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ sú nezávislé, potom podľa vety 5.5, bodu 1) platí, že $E(\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y}) = E(\mathbb{X}) \cdot E(\mathbb{Y})$. Pre kovarianciu platí: $\mathrm{cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = \underbrace{E(\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y})}_{E(\mathbb{X}) \cdot E(\mathbb{Y})} - E(\mathbb{X}) \cdot E(\mathbb{Y}) = 0$. Ale potom $\varrho(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = \frac{\mathrm{cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y})}{\sqrt{D(\mathbb{X}) \cdot D(\mathbb{Y})}} = 0$.

2. Nech $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ sú lineárne závislé. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $\mathbb{Y} = a\mathbb{X} + b$. Počítajme:
$$\varrho(\mathbb{X},\mathbb{Y}) \overset{\text{z výp. tvaru}}{=\!=} \frac{E(\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y}) - E(\mathbb{X}) \cdot E(\mathbb{Y})}{\sqrt{D(\mathbb{X}) \cdot D(\mathbb{Y})}} = \frac{E[\mathbb{X} \cdot (a\mathbb{X} + b)] - E(\mathbb{X}) \cdot E(a\mathbb{X} + b)}{\sqrt{D(\mathbb{X}) \cdot D(a\mathbb{X} + b)}}$$

V ďalšom kroku využijeme vlastnosti strednej hodnoty a disperzie. Ďalej si všimneme člen $D(a\mathbb{X}+b)$ v menovateli. Veličiny $a\mathbb{X}$ a b sú zrejme nezávislé, môžeme teda použiť vetu 5.5, pričom však $D(b)=0$. Teda

$$\varrho(\mathbb{X},\mathbb{Y}) \overset{\text{vl. E, D}}{=} \frac{aE(\mathbb{X}^2)+b\cdot E(\mathbb{X})-a(E(\mathbb{X}))^2-b\cdot E(\mathbb{X})}{\sqrt{D(\mathbb{X})\cdot a^2 D(\mathbb{X})}}$$

Teraz odmocníme členy v menovateli. Keďže $D(\mathbb{X})>0$, máme po vynásobením oboch $D(\mathbb{X})$ a ich následnom odmocnení člen $D(\mathbb{X})$. Konštanta a^2 po odmocnení nám však dá $|a|$. V čitateli nám po sčítaní vypadnú členy $b\cdot E(\mathbb{X})$ a zo zvyšných dvoch členov vyjmeme a pred zátvorku.

$$\varrho(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = \frac{aE(\mathbb{X}^2)-(E(\mathbb{X}))^2}{|a|D(\mathbb{X})} = \frac{a\cdot D(\mathbb{X})}{|a|\cdot D(\mathbb{X})} = \frac{a}{|a|} = \begin{cases} 1 & \text{ak } a>0 \\ -1 & \text{ak } a<0 \end{cases}$$

Z posledných alternatív teda vyplýva, že $|\varrho(\mathbb{X},\mathbb{Y})|=1$.

3. Nech $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ sú ľubovoľné. Uvažujme výraz $E[t(\mathbb{X}-E(\mathbb{X}))+(\mathbb{Y}-E(\mathbb{Y}))]^2\geq 0$. Ak výraz vo vnútri strednej hodnoty nebude záporný, tak aj stredná hodnota bude nezáporná. Upravujme postupne tento výraz:

$$\begin{aligned} E[t^2E(\mathbb{X}-E(\mathbb{X}))^2+(\mathbb{X}-E(\mathbb{Y}))^2+2t(\mathbb{X}-E(\mathbb{X}))(\mathbb{Y}-E(\mathbb{Y}))] &\geq 0 \\ t^2D(\mathbb{X})+D(\mathbb{Y})+2t\operatorname{cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) &\geq 0 \end{aligned}$$

Uvažujme kvadratickú rovnicu s premennou t. Počítajme diskriminant za predpokladu, že rovnica má najviac jeden reálny koreň.

$$\begin{aligned} 4\operatorname{cov}^2(\mathbb{X},\mathbb{Y})-4\cdot D(\mathbb{X})\cdot E(\mathbb{Y}) &\leq 0 \\ \operatorname{cov}^2(\mathbb{X},\mathbb{Y}) &\leq D(\mathbb{X})\cdot D(\mathbb{Y}), \qquad (5.10) \\ &\text{a} \\ \operatorname{cov}^2(\mathbb{X},\mathbb{Y}) &\geq 0 \qquad (5.11) \end{aligned}$$

Postupne predelíme zlomok (výraz je nezáporný – vyplýva to z nerovností (5.10) a (5.10)), aby sme na pravej strane získali 1 a odmocníme s ohľadom na absolútne hodnoty:

$$\begin{aligned} 0 \leq & \frac{\operatorname{cov}^2(\mathbb{X},\mathbb{Y})}{D(\mathbb{X})\cdot D(\mathbb{Y})} \leq 1 \\ 0 \leq & \frac{|\operatorname{cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y})|}{\sqrt{D(\mathbb{X})\cdot D(\mathbb{Y})}} \leq 1 \\ 0 \leq & \left|\frac{\operatorname{cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y})}{\sqrt{D(\mathbb{X})\cdot D(\mathbb{Y})}}\right| \leq 1 \\ 0 \leq & |\varrho(\mathbb{X},\mathbb{Y})| \leq 1 \end{aligned}$$

□

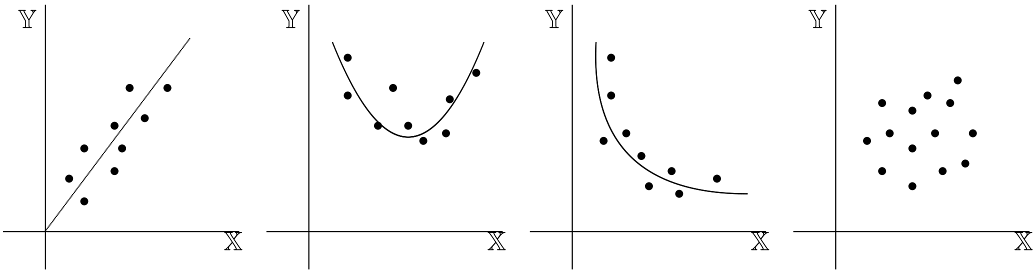
Poznámka 5.7

1. K tvrdeniu „ak $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ sú nezávislé, potom $\varrho(\mathbb{X},\mathbb{Y})=0$“ obrátená veta neplatí.

2. K tvrdeniu „ak $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ sú lineárne závislé, potom $|\varrho(\mathbb{X},\mathbb{Y})|=1$“ platí aj opačné tvrdenie.

Korelačný koeficient $\varrho(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ je mierou (lineárnej) závislosti. V matematickej štatistike sa používa:

- ak $|\varrho(\mathbb{X},\mathbb{Y})|>0{,}8$, hovorieva sa o silnej (lineárnej) závislosti,
- ak $0{,}3\leq|\varrho(\mathbb{X},\mathbb{Y})|\leq 0{,}8$ ide o miernu (lineárnu) závislosť,
- ak $|\varrho(\mathbb{X},\mathbb{Y})|<0{,}3$, hovoríme o slabej (lineárnej) závislosti.



Obr. 10: Lineárna, parabolická, hyperbolická závislosť a nezávislosť

5.5 Regresia ako trend závislosti

Trend (smer) závislosti náhodných veličín $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ sa dá graficky znázorniť tzv. regresnou čiarou.

V praxi sa najčastejšie používa lineárna závislosť, ktorej zodpovedá *regresná priamka*[19].

Definícia 5.9 (regresná priamka)
Regresnou priamkou závislosti $\mathbb{Y}$ na $\mathbb{X}$ (1. regresnou priamkou) nazývame priamku

$$y = ax + b,$$

kde koeficienty a, b spĺňajú podmienku

$$E[\mathbb{Y} - (a\mathbb{X} + b)] \text{ je minimálne}$$

(koeficienty minimalizujú strednú kvadratickú odchýlku). Koeficienty a, b nazývame *regresnými koeficientami.*

Veta 5.7
Nech $\varrho(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ je korelačný koeficient náhodných veličín $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$. Pre 1. regresnú priamku závislosti $\mathbb{Y}$ na $\mathbb{X}$ platí:

$$y - E(\mathbb{Y}) = \varrho(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \cdot \sqrt{\frac{D(\mathbb{Y})}{D(\mathbb{X})}} \cdot (x - E(\mathbb{X}))$$

Potom $a = \varrho(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \cdot \sqrt{\frac{D(\mathbb{Y})}{D(\mathbb{X})}}$, $b = E(\mathbb{Y}) - aE(\mathbb{X})$.

Dôkaz: Dôkaz vykonáme použitím metódy najmenších štvorcov. Chceme minimalizovať výraz $S(a, b) = E(\mathbb{Y} - (a\mathbb{X} + b))^2$. Má platiť:

- $\frac{\partial S(a,b)}{a} = 0$ (stacionárny bod)
- $\frac{\partial S(a,b)}{b} = 0$ (stacionárny bod)
- 2. diferenciál má byť kladný

Upravme najprv

$$\begin{aligned} S(a,b) &= E[(\mathbb{Y} - E(\mathbb{Y})) - a(\mathbb{X} - E(\mathbb{X})) + \overbrace{(E(\mathbb{Y}) - aE(\mathbb{X}) - b)}^{\Delta-\text{konšt.}}]^2 \\ &= E\big[(\mathbb{Y} - E(\mathbb{Y}))^2 + a^2(\mathbb{X} - E(\mathbb{X}))^2 + \Delta^2 + \\ &\quad -2a(\mathbb{X} - E(\mathbb{X}))(\mathbb{Y} - E(\mathbb{Y})) + 2\Delta(\mathbb{Y} - E(\mathbb{Y})) - 2a\Delta(\mathbb{X} - E(\mathbb{X}))\big] \\ \text{Aplikujme } E: &= D(\mathbb{Y}) + a^2 D(\mathbb{X}) + (E(\mathbb{Y}) - aE(\mathbb{X}) - b)^2 - 2a\,\text{cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) + 0 \end{aligned}$$

[19]Dá sa jednoduchšie popísať ako napr. hyperbola. V okolí hyperboly vieme často priamkou dobre aproximovať.

Počítajme parciálnu deriváciu podľa a:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S(a,b)}{\partial a} &= 2aD(\mathbb{X}) + 2(E(\mathbb{Y}) - aE(\mathbb{X}) - b) \cdot -E(\mathbb{X}) - 2\operatorname{cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) \\
\frac{\partial S(a,b)}{\partial b} &= 2(E(\mathbb{Y}) - aE(\mathbb{X}) - b)(-1)
\end{aligned}$$

Obe parciálne derivácie položíme rovné 0, teda ich môžeme upraviť

$$\begin{aligned}
2aD(\mathbb{X}) + 2(E(\mathbb{Y}) - aE(\mathbb{X}) - b) \cdot -E(\mathbb{X}) - 2\operatorname{cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) &= 2(E(\mathbb{Y}) - aE(\mathbb{X}) - b)(-1) \\
&\text{a} \\
a[D(\mathbb{X}) + E^2(\mathbb{X})] + bE(\mathbb{X}) &= \operatorname{cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) + E(\mathbb{X}) \cdot E(\mathbb{Y})
\end{aligned}$$

Postupnou úpravou dostaneme

$$\begin{aligned}
a &= \frac{\operatorname{cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y})}{D(\mathbb{X})} = \frac{\operatorname{cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y})}{\sqrt{D(\mathbb{X}) \cdot D(\mathbb{Y})}} \cdot \sqrt{\frac{D(\mathbb{Y})}{D(\mathbb{X})}} = \varrho(\mathbb{X},\mathbb{Y}) \cdot \sqrt{\frac{D(\mathbb{Y})}{D(\mathbb{X})}} \\
b &= E(\mathbb{Y}) - a \cdot E(\mathbb{X})
\end{aligned}$$

Potrebujeme však ešte overiť, že druhý diferenciál je naozaj kladný. Túto úlohu však prenechávame na čitateľa. □

Časť II
Matematická štatistika

História – korene už v staroveku.

Starovek – sčítanie ľudu a majetku (vojenské a daňové účely) – Egypt, Čína, Mezopotámia

Stredovek – vznik a konsolidácia nových štátov – zisťovanie geografických údajov, hospodársky a politický popis štátu. „status" = stav štátu.

Novovek

- 17. stor. – „politická aritmetika" v anglosaských krajinách – Petty, Grand. Vznik zárodkov poisťovníctva a z toho vyplývajúca tvorba úmrtnostných tabuliek (Huygens).

  Do 20. storočia tzv. popisná štatistika, hlavný princíp je vyčerpávajúce zisťovanie (čím viac údajov, tým lepšie výsledky).
- 20. stor. – využívanie aparátu pravdepodobnosti (v jadre). Vznik matematickej (induktívnej) štatistiky – princíp spočívajúci v náhodnom výbere

6 Popisná štatistika a náhodný výber

6.1 Základné pojmy a metódy

Štatistický súbor – skupina prvkov, ktoré sú predmetom štatistického skúmania a ktoré majú spoločnú vlastnosť. Napr. skupina študentov na prednáške, skupina výrobkov vyrobených na jednom stroji

Rozsah štatistického súboru – počet prvkov štatistického súboru. Označujeme N.

Štatistický znak – sledovaná vlastnosť prvkov. Označujeme x. Napr. váha, výška, vedomosti, farba očí.

Štatistické dáta – namerané hodnoty štatistického znaku Ozn. $x_1, x_2, \ldots, x_N$.

Delenie štatistických znakov

- kvantitatívne – dajú sa jednoznačne číselne vyjadriť
- kvalitatívne – nedajú sa vyjadriť jednoznačne číslom, snaha je ich kvantifikovať

Etapy štatistickej práce

1. štatistické zisťovanie (hromadenie) dát
2. spracovanie štatistických dát
3. vyhodnocovanie výsledkov; záver pre prax

Štatistické zisťovanie (hromadenie) dát. Štatisticky sa zisťujú dáta, je potrebná dôkladná evidencia. Získame východzie dáta $x_1, x_2, \ldots, x_N$.

Spracovanie štatistických dát. Spracovanie sa koná troma spôsobmi:

1. tabuľkové
2. grafické
3. výpočtové

Tabuľkové spracovanie dát. Usporiadame dáta do neklesajúcej postupnosti

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(N)}$$

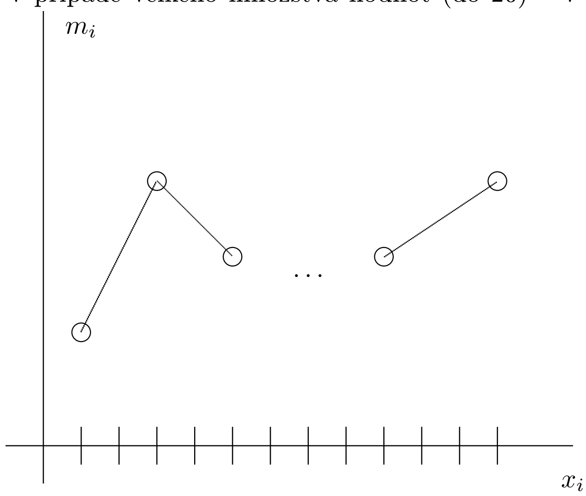
Ak sa údaje opakujú, vzniká *tabuľka početností*, obsahuje absolútne a relatívne početnosti, kumulatívne početnosti a kumulatívne relatívne početnosti.

	x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_K	
absolútna početnosť	m_i	m_1	m_2	$\ldots$	m_K	$\sum_{i=1}^{K} m_i = N$
relatívna početnosť	$\frac{m_i}{N}$	$\frac{m_1}{N}$	$\frac{m_2}{N}$	$\ldots$	$\frac{m_K}{N}$	
kumulatívna početnosť	$\sum_{i=1}^{K} m_i$	m_1	$m_1 + m_2$	$\ldots$	$\sum_{i=1}^{K} m_i$	$\sum_{i=1}^{K} m_i = N$
kumulatívna relatívna početnosť	$\sum_{i=1}^{K} \frac{m_i}{N}$	$\frac{m_1}{N}$	$\frac{m_1+m_2}{N}$	$\ldots$	$\sum_{i=1}^{K} \frac{m_i}{N}$	$\sum_{i=1}^{K} \frac{m_i}{N} = 1$

Keďže podľa zákona veľkých čísel $\frac{m_i}{N} \to p_i$ pre $n \to \infty$, môžeme definovať *empirickú distribučnú funkciu* (z nameraných hodnôt). Distribučnú funkciu odhadneme z tabuľky kumulatívnych relatívnych početností.

$$F_N(x) = \sum_{x_i < x} \frac{m_i}{N}$$

Grafické metódy. *Polygón* je spojnicový diagram spájajúci (najčastejšie) body $[x_i, m_i]$. *Histogram* je stĺpcový diagram. Používa sa v prípade veľkého množstva hodnôt (do 20) – v tomto prípade zadelíme hodnoty do intervalov.



Výpočtové metódy.

- Charakteristiky polohy štatistického znaku:
  - *aritmetický priemer* $\bar{x}$ – budeme ho používať ako odhad strednej hodnoty.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{K} x_i \cdot m_i$$

  - *modus* $\widehat{x}$ – najpočetnejšia hodnota znaku x

– *medián* $\widetilde{x}$ – prostredná hodnota. Hodnoty usporiadame podľa veľkosti a nájdeme prostrednú hodnotu.

$$\widetilde{x} = \begin{cases} x_{\frac{N+1}{2}} & \text{ak } N \text{ je nepárne} \\ \dfrac{x_{\frac{N}{2}} + x_{\frac{N}{2}+1}}{2} & \text{ak } N \text{ je párne} \end{cases}$$

V prípade, že N je párne, v podstate „umelo“ vytvoríme prostredný člen.

- Charakteristiky variability štatistického znaku
  - analógia k $D(\mathbb{X})$ – s^2 [s-kvadrát].

$$s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{K}(x_i - \bar{x})^2 \cdot m_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$$

Analogicky podľa výpočtového tvaru $D(\mathbb{X}) = m_2 - m_1^2$ máme

$$s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \bar{x}^2$$

  - analógia k $Q(\mathbb{X})$

$$Q(\mathbb{X}) = \frac{x_{0,75} - x_{0,25}}{2}$$

Hodnoty $x_{0,25}$ a $x_{0,75}$ určíme podobne ako pri mediáne. Dohoda: ak hodnota $\widetilde{x}$ existuje, zarátame ju dvakrát, inak nie.

  - variačné rozpätie

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

  - variačný koeficient znaku x

$$V(x) = \frac{s_x}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

Ak $V(x) < 30\%$, hovoríme o dobrej charakteristike. V prípade, že $V(x) > 50\%$, je potrebné použiť iné charakteristiky polohy.

- charakteristiky závislosti 2 znakov. Na každom prvku štatistického súboru sledujeme dva znaky
  - korelačný koeficient

$$r(x,y) = \frac{k(x,y)}{s_x \cdot s_y}, \text{ kde } k(x,y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

Výraz $k(x,y)$ je kovariancia (odhad).

  - rovnica regresnej priamky

$$\begin{aligned} \text{1. regresná priamka:} \quad y - \bar{y} &= r(x,y) \cdot \frac{s_y}{s_x}(x - \bar{x}) \\ \text{2. regresná priamka:} \quad x - \bar{x} &= r(x,y) \cdot \frac{s_x}{s_y}(y - \bar{y}) \\ \text{resp. iný tvar 2. regresnej priamky:} \quad y - \bar{y} &= \frac{1}{r(x,y)} \cdot \frac{s_y}{s_x}(x - \bar{x}) \end{aligned}$$

Poznámka 6.1
Ak je rôznych hodnôt štatistického znaku veľa ($\gg 20$), potom dáta triedime do intervalov typu $\langle a_i, b_i)$ alebo $(a_i, b_i\rangle$ (tak, že každý krajný bod je tam práve raz). Postup:

1. určíme variačné rozpätie $R = x_{\max} - x_{\min}$
2. určíme počet intervalov k (typicky $5 \leq k \leq 15$)
3. určíme dĺžku intervalu $\langle a_i, b_i \rangle$: $h \doteq \frac{R}{k}$, pričom h vhodne zaokrúhlime nahor (ak by sme zaokrúhľovali nadol, posledná hodnota by nemusela patriť do žiadneho intervalu)
4. zostrojíme tabuľku početností pre intervaly, pričom početnosť intervalu bude počet hodnôt, ktoré padnú do intervalu. Za reprezentanta intervalu berieme (považujeme) stred intervalu x_i^*.
5. nakreslíme histogram (stĺpčeky šírky h)
6. vypočítame charakteristiky znaku

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} x_i^* \cdot m_i \\
\widetilde{x}_{\text{kor}} &= a_i + h \cdot \frac{\frac{N}{2} - \sum_{j \leq i} m_j}{m_i} \\
\widehat{x}_{\text{kor}} &= x_i^* + \frac{h}{2} \cdot \frac{m_{i+1} - m_{i-1}}{2m_i - m_{i+1} - m_{i-1}}
\end{aligned}$$

6.2 Náhodný výber a výberové charakteristiky

Nevýhodou popisnej štatistiky je nutnosť vyčerpávajúceho zisťovania, čo v praxi často znamená potrebu financií, času atď. Rovnako meranie môže v niektorých prípadoch spôsobiť zničenie meraného prvku, čo opäť znemožňuje opakované zisťovanie.
Upustíme teda od tohto spôsobu zisťovania a budeme realizovať náhodné (reprezentatívne) výbery o rozsahu $n \ll N$. Prvky reprezentatívnej vzorky sú nositeľmi hodnôt sledovaného znaku x_i, možno ich považovať za náhodné veličiny $\mathbb{X}_i$.

Definícia 6.1 (náhodný vektor)
n-rozmerný náhodný vektor $V_n = (\mathbb{X}_1, \ldots, \mathbb{X}_n)$, kde $\mathbb{X}_i$ pre $i = 1, \ldots, n$ sú nezávislé náhodné veličiny s identickým náhodným rozdelením $F_i(x_i, \theta) \sim F(x, \theta)$, sa nazýva *náhodný výber* o rozsahu n z rozdelenia $F(x, \theta)$.

$$\text{ozn. } V_n \in F(x, \theta)$$

Poznámka 6.2

1. θ je neznámy parameter s hodnotami z parametrického priestoru Θ.
2. Keďže zložky V_n sú nezávislé, pre distribučnú funkciu náhodného vektora platí:

$$F(x_1, \ldots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} F_i(x_i, \theta)$$

Charakteristiky náhodného výberu sú dobrými odhadmi skutočných charakteristík základného štatistického súboru.

1. charakteristika polohy – výberový priemer

$$\bar{\mathbb{X}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathbb{X}_i$$

2. charakteristiky variability – výberové rozptyly

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathbb{X}_i - \bar{\mathbb{X}})^2$$
$$S_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathbb{X}_i - a)^2, \quad a = E(\mathbb{X}_i) \text{ je konšt. pre všetky } i$$
$$S_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathbb{X}_i - \bar{\mathbb{X}})^2$$

   Neskôr ukážeme, že S^2 [čítame: S kvadrát] nie je dobrou charakteristikou variability. Výberový rozptyl S_0^2 [S_0 kvadrát] budeme používať, ak poznáme strednú hodnotu. Ak ju nepoznáme, použijeme výberový rozptyl S_1^2 [S_1 kvadrát].

3. charakteristiky závislosti – výberový korelačný koeficient

$$R_{\mathbb{X},\mathbb{Y}} = \frac{K_{\mathbb{X},\mathbb{Y}}}{S_{\mathbb{X}} \cdot S_{\mathbb{Y}}},$$

   kde $K_{\mathbb{X},\mathbb{Y}} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{X}_i \cdot \mathbb{Y}_i\right) - \bar{\mathbb{X}} \cdot \bar{\mathbb{Y}}$ a $S_{\mathbb{X}}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathbb{X} - \bar{\mathbb{X}})^2$.

Veta 6.1
Nech náhodný výber V_n pochádza z rozdelenia $F(x,\theta)$, ktoré má konečnú strednú hodnotu $E(\mathbb{X}_i) = a$ pre $i = 1,\dots,n$ a konečnú disperziu $D(\mathbb{X}) = \sigma^2$, pre $i = 1,\dots,n$. Potom

1. $E(\bar{\mathbb{X}}) = a$
2. $D(\bar{\mathbb{X}}) = \frac{\sigma^2}{n}$
3. $E(S_0^2) = E(S_1^2) = \sigma^2$
4. $E(S^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2$

Dôkaz:

1. $E(\mathbb{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{X}_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(\mathbb{X}_i) \overset{E(\mathbb{X}_i)=a}{=\!=} \frac{1}{n}(n\cdot a) = a$
2. $D(\mathbb{X}) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{X}_i\right) = \frac{1}{n^2}\cdot D(\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\mathbb{X}_i}_{\text{nezávislé}}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(\mathbb{X}_i) \overset{D(\mathbb{X}_i)=a}{=\!=} \frac{1}{n^2}(n\cdot\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}$
3. $E(S_0^2) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathbb{X}_i - a)^2\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(\mathbb{X}_i - a)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(\mathbb{X}_i - E(\mathbb{X}))^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}D(\mathbb{X}) =$
   $= \frac{1}{n}(n\cdot\sigma^2) = \sigma^2$
4. Druhú nerovnosť v 3) a dôkaz 4) (zatiaľ) ponechávame na pozorného čitateľa □

Veta 6.2
Nech $V_n \in \mathsf{N}(a,\sigma^2)$. Potom $\bar{\mathbb{X}} \sim N\left(a, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

Dôkaz: Dôkaz urobíme metódou charakteristických funkcií. Už vieme, že parametrami normálneho rozdelenia, z ktorého pochádza $\mathbb{X}$, sú a, $\frac{\sigma^2}{n}$ (pozri predošlá veta). Chceme ukázať, že $\bar{\mathbb{X}}$ má práve normálne rozdelenie.

Máme $V_n = (\mathbb{X}_1, \ldots, \mathbb{X}_n)$. Jednotlivé zložky $\mathbb{X}_i \sim \mathsf{N}(a, \sigma^2)$ práve vtedy, keď $\varphi_{\mathbb{X}_i}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\boxed{a} - \frac{1}{2}t^2\cdot\boxed{\sigma^2}}$ „Zaškatuľkované“ sú práve $E(\mathbb{X}_i) = a$ a $D(\mathbb{X}_i) = \sigma^2$. Pre $\bar{\mathbb{X}}$ by teda malo platiť: $\varphi_{\bar{\mathbb{X}}}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\boxed{a} - \frac{1}{2}t^2\cdot\boxed{\frac{\sigma^2}{n}}}$. Overme to:

$$\varphi_{\bar{\mathbb{X}}}(t) = \varphi_{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbb{X}_i}(t) \overset{\text{vl. } \varphi_{\mathbb{X}}(t)}{=\!=\!=} \varphi_{\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbb{X}_i}\left(\frac{1}{n}\cdot t\right)$$

Jednotlivé veličiny $\mathbb{X}_i$ sú nezávislé, môžeme teda použiť vetu 5.5, bod 3.

$$\varphi_{\bar{\mathbb{X}}}(t) = \prod_{i=1}^{n}\varphi_{\mathbb{X}_i}\left(\frac{t}{n}\right) = \prod_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{t}{n}\right)a - \frac{1}{2}\left(\frac{t}{n}\right)^2\sigma^2} = \mathrm{e}^{n\cdot\mathrm{i}\left(\frac{t}{n}\right)a - \frac{1}{2}\left(\frac{t}{n}\right)^2\sigma^2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}ta - \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{n}\right)\sigma^2},$$

čo sme chceli overiť. □

6.3 Štatistika a jej rozdelenie

Definícia 6.2 (štatistika)
Nech $V_n \in F(x, \theta)$, $\theta \in \Theta$. *Štatistikou* nazývame takú funkciu náhodného výberu V_n, rozdelenie ktorej nezávisí od parametra θ rozdelenia $F(x, \theta)$, z ktorého výber pochádza.

$$g = g(\mathbb{X}_1, \ldots, \mathbb{X}_n)$$

Veta 6.3
Nech $V_n \in \mathsf{N}(a, \sigma^2)$. Potom pre nasledovné štatistiky platí:

1. $g = \dfrac{\bar{\mathbb{X}} - a}{\sigma}\cdot\sqrt{n} \sim \mathsf{N}(0, 1)$
2. $g = \dfrac{n \cdot S_0^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$
3. $g = \dfrac{(n-1)\cdot S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$
4. $g = \dfrac{\bar{\mathbb{X}} - a}{S_1}\cdot\sqrt{n} \sim t(n-1)$

Dôkaz:

1. Overme, či $g = \frac{\bar{\mathbb{X}}-a}{\sigma}\cdot\sqrt{n} \sim \mathsf{N}(0, 1)$.
   $V_n = (\mathbb{X}_1, \ldots, \mathbb{X}_n) \sim \mathsf{N}(a, \sigma^2)$, teda aj jednotlivé zložky $\mathbb{X}_i \sim \mathsf{N}(a, \sigma^2)$. Z vety 6.2 vieme, že $\bar{\mathbb{X}} \sim \mathsf{N}\left(a, \frac{\sigma^2}{n}\right)$. Teda $E(\bar{\mathbb{X}}) = a$, $D(\bar{\mathbb{X}}) = \frac{\sigma^2}{n}$ a môžeme rozdelenie normovať, čím dostávame

   $$\frac{\bar{\mathbb{X}} - a}{\sqrt{\sigma^2/n}} = \frac{\bar{\mathbb{X}} - a}{\sigma}\cdot\sqrt{n} \sim \mathsf{N}(0, 1)$$

2. Platí[20], že $\mathbb{Y} = \sum\limits_{i=1}^{n}\mathbb{X}_i^2 \sim \chi^2(n)$ práve vtedy, keď $\mathbb{X}_i \sim \mathsf{N}(0, 1)$ a náhodné veličiny $\mathbb{X}_i$ sú nezávislé. Chceme ukázať, že uvedená štatistika g sa dá napísať v tomto tvare.

   $$g = \frac{n \cdot S_0^2}{\sigma^2} = \frac{n}{\sigma^2}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathbb{X}_i - a)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\mathbb{X}_i - a}{\sigma^2}\right)^2$$

   Z predpokladu $\mathbb{X}_i \sim \mathsf{N}(a, \sigma^2)$, teda $\frac{\mathbb{X}_i - a}{\sigma^2} \sim \mathsf{N}(0, 1)$. Potrebujeme overiť ešte nezávislosť, ale tá je zaručená už z definície náhodného výberu (V_n je tvorený nezávislými náhodnými veličinami). Overili sme oba predpoklady a teda z ekvivalencie vyplýva požadované rozdelenie $\chi^2(n)$.

[20] ale skäde?

3. Počítajme:

$$\begin{aligned}
g &= \frac{(n-1)\cdot S_1^2}{\sigma^2} \stackrel{\text{def.}}{=\!=} \frac{(n-1)}{\sigma^2}\cdot\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathbb{X}_i-\bar{\mathbb{X}})^2 = \frac{1}{\sigma^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}((\mathbb{X}_i-a)-(\bar{\mathbb{X}}-a))^2 \\
&= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\Big[(\mathbb{X}_i-a)^2+(\bar{\mathbb{X}}-a)^2-2(\mathbb{X}_i-a)(\bar{\mathbb{X}}-a)\Big] \\
&= \frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(\mathbb{X}_i-a)^2\right)-2(\bar{\mathbb{X}}-a)\sum_{i=1}^{n}(\mathbb{X}_i-a)+n\cdot(\bar{\mathbb{X}}-a)^2
\end{aligned}$$

Použijeme teraz trik: upravíme sumu $\sum_{i=1}^{n}(\mathbb{X}_i-a)$:

$$\sum_{i=1}^{n}(\mathbb{X}_i-a) = \left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{X}_i\right)-na = n\cdot\left(\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{X}_i\right)-a\right) = n\cdot(\bar{\mathbb{X}}-a)$$

a pokračujeme vo výpočte g

$$\begin{aligned}
g &= \frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(\mathbb{X}_i-a)^2\right)-2(\bar{\mathbb{X}}-a)\cdot n\cdot(\mathbb{X}_i-a)+n\cdot(\bar{\mathbb{X}}-a)^5 \\
&= \frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(\mathbb{X}_i-a)^2\right)-2n\cdot(\bar{\mathbb{X}}-a)^2+n\cdot(\bar{\mathbb{X}}-a)^5 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\mathbb{X}_i-a}{\sigma}\right)^2-\frac{n(\bar{\mathbb{X}}-a)^2}{\sigma^2} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\mathbb{X}_i-a}{\sigma}\right)^2-\left(\frac{\bar{\mathbb{X}}-a}{\sigma^2}\cdot\sqrt{n}\right)
\end{aligned}$$

V posledne uvedenom rozdieli má menšenec rozdelenie $\chi^2(n)$ (pozri začiatok dôkazu bodu 2). Ak sa pozrieme do menšiteľa na výraz pod mocninou, tak vidíme, že tento výraz má rozdelenie $\mathsf{N}(0,1)$. Jeho mocnina má však rozdelenie $\chi^2(n)$[21]?. Celý rozdiel má teda tiež rozdelenie $\chi^2(n)$[22], čo sme chceli dokázať.

4. Z vlastností t-rozdelenia – vzťah (3.9) – vieme, že

$$\mathbb{T} = \frac{\mathbb{X}}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbb{X}_i^2}} \sim t(n),$$

ak $\mathbb{X}\sim\mathsf{N}(0,1)$ a sú $\mathbb{X}_i$ sú nezávislé. (— je potrebné dopísať dôkaz) □

Veta 6.4
Nech $V_n \in \mathsf{Ex}(\delta)$. Potom $g = \frac{2n\bar{\mathbb{X}}}{\delta} \sim \chi^2(2n)$.

Dôkaz: Dôkaz vykonáme metódou charakteristických funkcií. Z vlastností rozdelení platí:

$$\mathbb{X}\sim\mathsf{Ex}(\delta) \quad \text{akk} \quad \varphi_{\mathbb{X}}(t) = \frac{1}{1-\mathrm{i}t\delta} \tag{6.12}$$

$$\mathbb{Y}\sim\chi^2(n) \quad \text{akk} \quad \varphi_{\mathbb{Y}}(t) = \frac{1}{(1-2\mathrm{i}t)^{n/2}} \tag{6.13}$$

[21] Je niekde vpredu taká veta

[22] Je veta o tom, že súčet zachováva rozdelenie?

Platí: $\varphi_g(t) = \varphi_{\frac{2n\mathbb{X}}{\sigma}}(t) = \varphi_{\frac{2n}{\sigma}\cdot\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbb{X}_i} = \varphi_{\frac{2}{\sigma}\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbb{X}_i}(t)$. Predstavme si členy v dolnom indexe v tvare $a\mathbb{X} + b$ ($a = 2/\sigma$, $\mathbb{X}$ bude tvoriť suma, a b bude nulové). Veta 2.8, bod 3.) hovorí, že $\varphi_{a\mathbb{X}+b} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}tb} \cdot \varphi_{\mathbb{X}}(at)$. Použijeme ju na náš prípad: $\varphi_g(t) = \mathrm{e}^0 \cdot \varphi_{\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbb{X}_i}\left(\frac{2}{\sigma}\cdot t\right) \overset{\text{vl. } \varphi}{=\!=} \prod_{i=1}^{n}\varphi_{\mathbb{X}_i}\left(\frac{2}{\delta}\cdot t\right)$. Použijeme teraz predpoklad o exponenciálnom rozdelení a teda posledný

$$\varphi_g(t) = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-\mathrm{i}\left(\frac{2}{\delta}t\right)\delta} = \prod_{i=1}^{n}\underbrace{\frac{1}{1-2\mathrm{i}t}}_{\text{konšt. pre } i} = \left(\frac{1}{1-2\mathrm{i}t}\right)^n = \frac{1}{(1-2\mathrm{i}t)^n} \qquad \square$$

Ak sa pozrieme na posledný člen a na rovnosť v (6.13), zistíme, že $\varphi_g(t)$ je práve v tomto tvare, až na parameter n, ktorý je v poslednom člene dvojnásobný. Preto

$$g = \frac{2n\mathbb{X}}{\sigma} \sim \chi^2(2n).$$

7 Teória odhadov

Úlohou teórie odhadov je na základe náhodného výberu V_n čo najlepšie odhadnúť neznámy parameter θ rozdelenia $F(x,\theta)$. Rozoznávame dva typy:

- bodový odhad
- intervalový odhad

7.1 Bodové odhady

Úlohou bodového odhadu je nahradiť neznámu hodnotu parametra θ hodnotou vhodne zvolenej štatistiky.

Definícia 7.1 (bodový odhad)
Nech $V_n \in F(x,\theta)$, kde $\theta \in \Theta$. *Bodovým odhadom parametra* θ nazývame ľubovoľnú „vhodne zvolenú" funkciu náhodného výberu (štatistiku) g, takú, že

$$g = g(\mathbb{X}_1,\ldots,\mathbb{X}_n)$$

Kritéria vhodnosti bodového odhadu

- nestrannosť (nevychýlenosť)
- konzistentnosť
- výdatnosť...

Definícia 7.2 (nestranný odhad)
Nech $V_n \in F(x,\theta)$, kde $\theta \in \Theta$. Hovoríme, že bodový odhad $g = g(\mathbb{X}_1,\ldots,\mathbb{X}_n)$ *je nestranným* (nevychýleným) odhadom parametra θ, ak platí:

$$E(g) = E(g(\mathbb{X}_1,\ldots,\mathbb{X}_n)) = \theta$$

Definícia 7.3 (asymptoticky nestranný odhad)
Hovoríme, že bodový odhad $g = g(\mathbb{X}_1,\ldots,\mathbb{X}_n)$ *je asymptoticky nestranným odhadom* parametra θ rozdelenia $F(x,\theta)$, ak platí:

$$\lim_{n\to\infty} E(g(\mathbb{X}_1,\ldots,\mathbb{X}_n)) = \theta$$

Definícia 7.4 (najlepší nestranný odhad)
Hovoríme, že bodový odhad $g = g(\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n)$ *je najlepším nestranným odhadom* parametra θ rozdelenia $F(x, \theta)$, ak platí:

1. $E(g) = \theta$
2. $D(g) \leq D(g')$, pre g' ľubovoľný nestranný odhad

Definícia 7.5 (konzistentný odhad)
Hovoríme, že bodový odhad $g = g(\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n)$ *je konzistentným odhadom* parametra θ rozdelenia $F(x, \theta)$, ak platí:

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} P(|E(g) - \theta| \geq \varepsilon) = 0$$

Poznámka 7.1
Na určenie konzistentnosti bodového odhadu sa nepoužíva definícia, ale postačujúca podmienka:

$$\lim_{n\to\infty} E(g) = \theta \;\&\; \lim_{n\to\infty} D(g) = 0 \Rightarrow g \text{ je konzistentný odhad}$$

Metóda hľadania vhodného bodového bodového odhadu – metóda maximálnej vierohodnosti

Definícia 7.6 (vierohodnostná funkcia)
Nech náhodný výber V_n pochádza z rozdelenia daného hustotou (zákonom rozdelenia) $f_i(x_i, \theta)$, kde $\theta \in \Theta$. *Vierohodnostnou funkciou* nazývame funkciu

$$L(\boldsymbol{x}, \theta) = L(x_1, \dots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i, \theta)$$

Definícia 7.7 (maximálne vierohodný odhad)
Maximálne vierohodným odhadom parametra θ rozdelenia $F(x, \theta)$ nazývame taký bod $\widehat{\theta}$, v ktorom vierohodnostná funkcia nadobúda maximum, t. j.

$$\forall \theta \in \Theta : L(\boldsymbol{x}, \widehat{\theta}) \geq L(\boldsymbol{x}, \theta)$$

Hľadanie $\bar{\theta}$

1. $\left.\frac{\partial L(\boldsymbol{x},\theta)}{\partial \theta}\right|_{\theta=\widehat{\theta}} = 0$
2. $\left.\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{x},\theta)}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=\widehat{\theta}} < 0$

V prípade, že hustota je exponenciálneho typu, tak $\widehat{\theta}$ nájdeme ako bod, v ktorom nadobúda maximum funkcia $\ln L(\boldsymbol{x}, \theta)$.

Príklad 7.2
Nech $V_n \in \mathsf{Po}(\lambda)$. Nájdite maximálny vierohodný odhad parametra λ.

Riešenie:
$\mathbb{X} \sim \mathsf{Po}(\lambda) \Leftrightarrow p_k = P(\mathbb{X} = x_k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}$. Počítajme vierohodnostnú funkciu:

$$L(\boldsymbol{x}, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} \mathrm{e}^{-\lambda} = \frac{\lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=i}^{n}(x_i!)} \cdot \mathrm{e}^{n(-\lambda)}$$

V tomto prípade bude výhodnejšie počítať maximum logaritmu vierohodnostnej funkcie.

$$\ln(L(\boldsymbol{x}, \lambda)) = \ln \lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i} - \ln \prod_{i=1}^{n} (x_i!) - n\lambda = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \ln \lambda - \ln \prod_{i=1}^{n} (x_i!) - n\lambda$$

Na nájdenie maxima tejto funkcie je potrebné nájsť body, v ktorej nadobúda prvá derivácia nulovú hodnotu a z nich vybrať bod, v ktorom druhá derivácia je záporná.

$$\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{x}, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i - n$$

$$\left.\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i - n\right|_{\lambda=\widehat{\lambda}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \widehat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{\mathbb{X}}$$

Overenie druhej derivácie:

$$\left.\frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{x}, \lambda)}{\partial^2 \lambda}\right|_{\lambda=\widehat{\lambda}} = -\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n} x_i\Big|_{\lambda=\widehat{\lambda}} < 0$$

čiže naozaj: $\mathbb{X}$ je maximálnym vierohodným odhadom parametra λ.

7.2 Intervalové odhady

Cieľom je na základe realizácie náhodného výberu V_n skonštruovať taký interval (θ_1, θ_2), ktorý s vopred danou pravdepodobnosťou obsahuje neznámy parameter θ.

Definícia 7.8 (interval spoľahlivosti)
Nech náhodný výber $V_n \in F(x, \theta)$, kde $\theta \in \Theta$. Interval (θ_1, θ_2), kde (θ_1, θ_2), pre ktorý platí

$$P(\theta_1 < \theta < \theta_2|_{\theta=\theta_0}) = 1 - \alpha, \tag{7.14}$$

kde $\alpha \in (0,1)$, θ_0 je skutočnou hodnotou parametra θ a $\theta, \theta_0 \in \Theta$; sa nazýva $100 \cdot (1-\alpha)$*%-ný interval spoľahlivosti* pre parameter θ. Číslo $1-\alpha$ sa nazýva *koeficient spoľahlivosti.*

Poznámka 7.3
Číslo α si volíme najčastejšie $\alpha = 0{,}05$ (príp. 0,01 alebo 0,1), tzn. dostaneme 95% (90%, 99%) interval spoľahlivosti.

Postup pri konštrukcii intervalu spoľahlivosti

1. Vychádzame z nejakého vhodného bodového odhadu parametra θ
2. Doplníme bodový odhad na vhodnú štatistiku g
3. Nájdeme čísla g_1, g_2 také, že
$$P(g \le g_1) = \alpha_1, \qquad P(g \ge g_2) = \alpha_2, \tag{7.15}$$
kde $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$, $g_1 < g_2$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha \in (0,1)$, $g_1, g_2 \in \mathbb{R}$.
4. Sčítaním rovníc (7.14) a (7.15) dostaneme
$$\begin{aligned} P(g \le g_1) + P(g \ge g_2) &= \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha \\ 1 - P(g_1 < g < g_2) &= \alpha \\ P(g_1 < g < g_2) &= 1 - \alpha \end{aligned} \tag{7.16}$$
Zo vzťahu (7.16) ekvivalentnými úpravami získame tvar (7.14).

Čísla g_1, g_2 vo vzťahu (7.15) sú vlastne kvantily, ak distribučná funkcia štatistiky g je spojitá a rastúca. Zo spojitosti distribučnej funkcie tiež vyplýva, že $P(g \le g_1) = \alpha_1 = P(g < g_1)$, čo je vlastne inverzná funkcia F^{-1}. Teda

$$F(g_1) = \alpha_1 \Rightarrow g_1 = F^{-1}(\alpha),$$

g_1 je α_1-kvantil štatistiky g.
Z podmienky $P(g \geq g_2) = \alpha_2$ vyplýva, že $1 - P(g < g_2) = \alpha_2$, čo je ekvivalentné tomu, že

$$F(g_2) = P(g < g_2) = 1 - \alpha_2.$$

Ďalej opäť použijeme spojitosť a rýdzu monotónnosť funkcie F, na obe strany rovnosti aplikujeme F^{-1}.

$$\begin{aligned} F^{-1}(F(g_2)) &= F^{-1}(1-\alpha_2) \\ g_2 &= F^{-1}(1-\alpha_2) \end{aligned}$$

g_2 je teda $(1-\alpha_2)$-kvantil štatistiky g.

Príklady konštrukcie pre intervaly spoľahlivosti

1. $V_n \in \mathsf{N}(a, \sigma^2)$. Pre intervaly spoľahlivosti rozdelenia $\mathsf{N}(a, \sigma^2)$ máme 4 prípady:
   (a) interval spoľahlivosti pre parameter a, ak σ^2 je známe
   (b) interval spoľahlivosti pre parameter a, ak σ^2 je neznáme
   (c) interval spoľahlivosti pre parameter σ^2, ak a je známe
   (d) interval spoľahlivosti pre parameter σ^2, ak a je neznáme
2. $V_n \in \mathsf{Ex}(\delta)$

---

1. $V_n \in \mathsf{N}(a, \sigma^2)$
   (a) Hľadáme interval spoľahlivosti pre parameter a, ak σ^2 je známe.
   Postup:
      i. Vhodným bodovým odhadom pre a je $\bar{\mathbb{X}}$.
      ii. Vhodnou štatistikou je $g = \frac{\bar{\mathbb{X}}-a}{\sigma} \cdot \sqrt{n} \sim \mathsf{N}(0,1)$
      iii. $g_1 = u_{\alpha_1}$, $g_2 = u_{1-\alpha_2}$ (u-kvantily sú kvantily normovaného normálneho rozdelenia)
      iv. Má platiť:

$$\begin{aligned} P(g_1 < \; & g \; < g_2) = 1-\alpha \\ P\left(u_{\alpha_1} < \; \right. & \frac{\bar{\mathbb{X}}-a}{\sigma} \cdot \sqrt{n} \left. \; < u_{1-\alpha_2}\right) = 1-\alpha \end{aligned}$$

Naším cieľom je vyjadriť parameter a:

$$P\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot u_{\alpha_1} < \bar{\mathbb{X}} - a < \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot u_{1-\alpha_2}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot u_{\alpha_1} - \bar{\mathbb{X}} < -a < \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot u_{1-\alpha_2} - \bar{\mathbb{X}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\bar{\mathbb{X}} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot u_{1-\alpha_2} < a < \bar{\mathbb{X}} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot u_{\alpha_1}\right) = 1-\alpha$$

Teraz využijeme vlastnosť, že $u_\alpha = -u_{1-\alpha}$ (normované normálne rozdelenie je symetrické):

$$P\left(\bar{\mathbb{X}} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot u_{1-\alpha_2} < a < \bar{\mathbb{X}} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot u_{1-\alpha_1}\right) = 1-\alpha$$

Interval spoľahlivosti je teda

$$\left(\bar{\mathbb{X}} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot u_{1-\alpha_2};\ \bar{\mathbb{X}} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot u_{1-\alpha_1}\right)$$

(b) Hľadáme interval spoľahlivosti pre parameter a, ak σ^2 je neznáme.

i. Vhodným bodovým odhadom pre a je $\bar{\mathbb{X}}$.

ii. Vhodnou štatistikou je $g = \frac{\bar{\mathbb{X}}-a}{S_1} \cdot \sqrt{n} \sim t(n-1)$ (S_1 slúži ako odhad pre neznámy parameter σ^2)

iii. $g_1 = t_{\alpha_1}(n-1)$, $g_2 = t_{1-\alpha_2}(n-1)$

iv. Má platiť:

$$P\left(t_{\alpha_1}(n-1) < \frac{\bar{\mathbb{X}}-a}{S_1} \cdot \sqrt{n} < t_{1-\alpha_2}(n-1)\right) = 1-\alpha$$

Výsledný interval spoľahlivosti (určíme ho podobne ako v predchádzajúcom prípade):

$$\bar{\mathbb{X}} - \frac{S_1}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha_2}(n-1) < a < \bar{\mathbb{X}} + \frac{S_1}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha_1}(n-1)$$

(c) Hľadáme interval spoľahlivosti pre parameter σ^2, ak a je známe.

i. Vhodným bodovým odhadom pre σ^2 je $S_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathbb{X}_i - a)^2$, kde $a = E(\mathbb{X}_i) =$ konšt

ii. Vhodnou štatistikou je $g = \frac{n \cdot S_0^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$

iii. $g_1 = \chi^2_{\alpha_1}(n)$, $g_2 = \chi^2_{1-\alpha_2}(n)$

iv. Má platiť:

$$P\left(\chi^2_{\alpha_1}(n) < \frac{n \cdot S_0^2}{\sigma^2} < \chi^2_{1-\alpha_2}(n)\right) = 1-\alpha$$

V tomto prípade však musíme dať pozor nato, že rozdelenie χ^2 nie je symetrické. Výsledný interval spoľahlivosti bude teda po úpravách:

$$P\left(n \cdot S_0^2 \cdot \chi^2_{1-\alpha_2}(n) < \sigma^2 < n \cdot S_0^2 \cdot \chi^2_{\alpha_1}(n)\right) = 1-\alpha$$

(d) Hľadáme interval spoľahlivosti pre parameter σ^2, ak a je neznáme.

i. Vhodným bodovým odhadom pre σ^2 je S_1^2

ii. Vhodnou štatistikou je $g = \frac{(n-1) \cdot S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

iii. $g_1 = \chi^2_{\alpha_1}(n-1)$, $g_2 = \chi^2_{1-\alpha_2}(n-1)$

iv. Má platiť:

$$P\left(\chi^2_{\alpha_1}(n-1) < \frac{(n-1) \cdot S_1^2}{\sigma^2} < \chi^2_{1-\alpha_2}(n-1)\right) = 1-\alpha$$

Opäť musíme vziať do úvahy asymetriu rozdelenia χ^2. Výsledný interval spoľahlivosti po úpravách:

$$P\left(\frac{(n-1) \cdot S_1^2}{\chi^2_{1-\alpha_2}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1) \cdot S_1^2}{\chi^2_{\alpha_1}(n-1)}\right) = 1-\alpha$$

2. $V_n \in \mathsf{Ex}(\delta)$

Teraz máme len jeden prípad - budeme odhadovať parameter δ

i. Vhodným bodovým odhadom δ je $\bar{\mathbb{X}}$

ii. Vhodnou štatistikou je $g = \frac{2n\mathbb{X}}{\delta} \sim \chi^2(2n)$

iii. $g_1 = \chi^2_{\alpha_1}(2n)$, $g_2 = \chi_{1-\alpha_2}(2n)$

iv. Má platiť:

$$P\left(\chi^2_{\alpha_1}(2n) < \frac{2n\cdot\bar{\mathbb{X}}}{\delta} < \chi^2_{1-\alpha_2}(2n)\right) = 1-\alpha$$

Výsledný interval spoľahlivosti:

$$P\left(\frac{2n\cdot\bar{\mathbb{X}}}{\chi^2_{1-\alpha_2}(2n)} < \delta < \frac{2n\cdot\bar{\mathbb{X}}}{\chi^2_{\alpha_1}(2n)}\right) = 1-\alpha$$

Poznámka 7.4

1. Interval spoľahlivosti má byť čo najkratší, pre symetrické rozdelenia typu $\mathsf{N}(0,1)$, $t(n)$ to nastáva pre
$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2},$$
Takéto hodnoty sa však používajú aj pri nesymetrickom rozdelení $\chi^2(n)$.

2. Ak chceme odhad len z jednej strany, použijeme taký istý postup. Odvodené odhady sú obojstranné. Možno však uvažovať aj jednostranný odhad (resp. jednostranný interval spoľahlivosti), kedy neznámy parameter je odhad iba zdola (príp. iba zhora). Potom rozoznávame
   - ľavostranný[23] interval spoľahlivosti (zdola) – položíme $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = 0$
   - pravostranný interval spoľahlivosti (zhora) – položíme $\alpha_1 = 0$, $\alpha_1 = \alpha$

Príklad 7.5

Podnik dodáva do obchodu balíčky sušienok, ktorých hmotnosť má rozdelenie $\mathsf{N}(a, 25)$. Náhodným výberom 25 balíčkov sa zistila priemerná hmotnosť 150 g. Určte:

1. 95%-ný interval spoľahlivosti pre strednú hmotnosť
2. hornú medzu strednej hmotnosti, ktorá z pravdepodobnosťou 0,95 nebude prekročená
3. aký by mal byť minimálny rozsah výberu, ak chceme zaručiť chybu odhadu strednej hmotnosti menšiu ako 1 g s pravdepodobnosťou 0,95

Riešenie:
Zo zadania $V_n \in \mathsf{N}(a, 25)$, $n = 25$.

1. Chceme interval spoľahlivosti pre parameter a, ak $\sigma^2 = 25$ (je známe) – ten je takýto:
$$\bar{\mathbb{X}} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot u_{1-\alpha_2} < a < \bar{\mathbb{X}} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot u_{1-\alpha_1}$$
Bodovým odhadom a je $\bar{\mathbb{X}} = 150$, $\sigma^2 = 25$, $n = 25$. Chceme 95%-nú spoľahlivosť, teda $\alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$, $\alpha/2 = 0{,}025$. Môžeme dosadiť:
$$150 - u_{1-\frac{\alpha}{2}} < a < 150 + u_{1-\frac{\alpha}{2}}$$
Kvantily nájdeme v tabuľkách a po dosadení nám vyjde požadovaný interval spoľahlivosti:
$$148{,}04 < a < 151{,}96$$

2. Na výpočet hornej medze potrebujeme vlastne určiť pravostranný interval spoľahlivosti. Využijeme výpočet z predchádzajúceho bodu:
$$a < \bar{\mathbb{X}} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha_1}$$
Teraz však položíme $\alpha_1 = \alpha = 0{,}05$. Dosadíme, kvantily nájdeme v tabuľkách a získame
$$a < 151{,}64$$

[23] Pozor! V publikácii Potocký a kol. je to naopak!

3. Opäť vyjdeme z obojstranného intervalu spoľahlivosti, ktorý si však predstavíme v tvare
$$\bar{\mathbb{X}} - \Delta < a < \bar{\mathbb{X}} + \Delta, \qquad \Delta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\frac{\alpha}{2}}$$
Podľa zadania chceme, aby $\Delta < 1$ a hľadáme n. Po dosadení a výpočte získame $n > 96$.

8 Testovanie štatistických hypotéz

8.1 Základné pojmy a metódy

Štatistická hypotéza H – každý predpoklad týkajúci sa rozdelenia $F(x, \theta)$, z ktorého V_n pochádza.
Testovanie štatistických hypotéz – overovanie správnosti nášho predpokladu
Testovacie kritérium $g(\mathbb{X}_1, \ldots, \mathbb{X}_n)$ je vhodne zvolená štatistika
Kritický obor W je tá časť množiny všetkých realizácií náhodného výberu V_n, ktoré vedie k zamietnutiu testovanej hypotézy.
Kritická hodnota k_α – tá hodnota, ktorá delí množiny všetkých realizácií V_n na kritickú oblasť a jej doplnok.
Nulová hypotéza H_0 – testovaná hypotéza.
Alternatívna hypotéza H_1 – hypotéza, ktorú staviame proti nulovej hypotéze (H_1 nemusí byť doplnok H_0[24]).
Chyby pri testovaní štatistických hypotéz

1. chyba 1. druhu – testovanú hypotézu H_0 zamietame, hoci je správna
2. chyba 2. druhu – hypotézu H_0 nezamietame, hoci je nesprávna

Definícia 8.1 (hladina významnosti a sila testu)

- Pravdepodobnosť chyby 1. druhu je číslo α
$$\alpha = P(g_0 \in W|H_0)$$
a nazýva sa *hladina významnosti testu.*
- Pravdepodobnosť chyby 2. druhu je číslo β
$$\beta = P(g_0 \notin W|H_1)$$
a číslo $1 - \beta$ sa nazýva *sila testu* ($1 - \beta = P(q_0 \in W|H_1)$ – pravdepodobnosť, že správne zamietam nulovú hypotézu)

Poznámka 8.1
Ideálne by bolo, keby sa dalo α, β súčasne minimalizovať. Dá sa ukázať, že znižovaním α sa zvyšuje β a naopak. Preto sa zvolí α ľubovoľne malé a hľadá sa kritický obor, ktorý zabezpečí pre dané α minimálne β. Dostaneme najlepší kritický obor na hladine α – ozn. W_α, W_0. Najčastejšou voľbou je $\alpha = 0{,}05$, príp. 0,1, resp. 0,01.

Postup pri testovaní štatistických hypotéz

1. vysloviť hypotézy H_0, H_1
2. zvoliť testové kritérium g a hladinu významnosti α
3. nájsť najlepší kritický obor W_0
4. zistiť, či realizácia testovacieho kritéria g je z W_0 a urobiť záver pre prax
   (a) ak $g_0 \in W_0$, potom H_0 zamietame a prijímame H_1
   (b) ak $g_0 \notin W_0$, potom H_0 nezamietam na danej hladine významnosti (slabší záver). Môžeme urobiť nový výber alebo zmeníme hladinu významnosti.

[24]Napr. môžeme položiť nulovú hypotézu „stredná hodnota je 5“ a alternatívnu hypotézu „stredná hodnota nie je 5“ – v tomto prípade je alternatívna hypotéza doplnkom nulovej. V prípade „stredná hodnota je 5“ a „stredná hodnota je väčšia ako 5“, už alternatívna hypotéza doplnkom nie je.

Delenie testov

1. podľa toho, čo testujú
   (a) parametrické testy
   (b) neparametrické testy
2. podľa počtu zrealizovaných výberov
   (a) jednovýberové
   (b) dvoj- a viacvýberové

8.2 Niektoré parametrické testy (jednovýberové)

Budeme predpokladať, že výber pochádza buď z normálneho alebo exponenciálneho rozdelenia, teda $V_n \in \mathsf{N}(a, \sigma^2)$, resp. $V_n \in \mathsf{Ex}(\delta)$.

Parametrický test testuje neznámy parameter θ rozdelenia $F(x, \theta)$ pre $\theta \in \Theta$, z ktorého výber V_n pochádza. Uvažujme hypotézu

$$H_0 : \theta = \theta_0,$$

kde θ_0 je skutočná hodnota parametra (alebo hodnota, o ktorej si myslím, že je skutočná :-)). Potom pre H_1 prichádza do úvahy jedna z nasledovných hypotéz:

$$H_1 : \theta \neq \theta_0, \qquad H_1 : \theta > \theta_0, \qquad H_1 : \theta < \theta_0$$

Prvá z uvedených hypotéz je tzv. *obojstranná alternatívna hypotéza*, zvyšné dve sú *jednostranné alternatívne hypotézy*. Hypotéza H_0 je tu nazývaná *jednoduchou hypotézou*, ostatné zase *zloženými alternatívnymi hypotézami*.

8.2.1 Metódy hľadania najlepšieho kritického oboru W_0

1. *Neymann-Pearsson* – pri jednostranných alternatívnych hypotézach
2. *test podielom (pomerom) vierohodností* – pri obojstranných alternatívnych hypotézach

Neymannova-Pearssonova metóda. Za kritický obor vezmeme:

$$W_0 = \left\{ \mathbb{X} : \frac{L(\mathbb{X}, \theta_1)}{L(\mathbb{X}, \theta_0)} \geq c(\alpha) \right\},$$

kde θ_0 je skutočná hodnota parametra θ, θ_1 je hodnota θ v alternatívnej hypotéze a $c(\alpha)$ je konštanta závislá iba od hladiny významnosti (malo by byť $c(\alpha) \geq 0$, inak nie je čo odhadovať). V dôkaze sa ukáže, že W_0 v tomto tvare zaručí minimálne β.

Podiel vierohodností. Kritický obor položíme:

$$W_0 = \left\{ \mathbb{X} : \frac{L(\mathbb{X}, \widehat{\theta})}{L(\mathbb{X}, \theta_0)} \geq L^*(\alpha) \right\},$$

kde $\widehat{\theta}$ je maximálny vierohodný odhad parametra θ, θ_0 je skutočná hodnota θ a $L^*(\alpha)$ je konštanta závislá iba od hladiny významnosti. $L^*(\alpha) \geq 1$, lebo podľa definície $L(\mathbb{X}, \bar{\theta}) > L(\mathbb{X}, \theta_0)$.

8.2.2 Príklady kritických oborov W_0 pre normálne a exponenciálne rozdelenie

1. Nech $V_n \in N(a, \sigma^2)$.

   (a) test parametra a, ak σ^2 je známe (v ďalšom bude používaná „nekanonická“ prologovská notácia `?-`$a|\sigma^2$ známe — pozn. sadzač)

   (b) test parametra a, ak σ^2 je neznáme; `?-`$a|\sigma^2$ neznáme

   (c) test parametra σ^2, ak a je známe; `?-`$\sigma^2|a$ známe

   (d) test parametra σ^2, ak a je neznáme; `?-`$\sigma^2|a$ neznáme

   (a) `?-`$a|\sigma^2$ známe

$$H_0 : a = a_0, \qquad H_1 : a = a_1 < a_0 \text{ alebo } H_1 : a_0 > a_1 = a_1 \text{ alebo } H_1 : a \neq a_0$$

   σ^2 je známe, preto použijeme štatistiku

$$g = \frac{\bar{\mathbb{X}} - a}{\sigma} \cdot \sqrt{n} \sim \mathsf{N}(0,1)$$

   Kritické obory budú

$$\begin{aligned} W_0 &= \left\{ \mathbb{X} : \frac{\bar{\mathbb{X}} - a}{\sigma} \cdot \sqrt{n} \leq u_\alpha \right\}, \text{ ak } a < a_0 \\ W_0 &= \left\{ \mathbb{X} : \frac{\bar{\mathbb{X}} - a}{\sigma} \cdot \sqrt{n} \geq u_{1-\alpha} \right\}, \text{ ak } a > a_0 \\ W_0 &= \left\{ \mathbb{X} : \left| \frac{\bar{\mathbb{X}} - a}{\sigma} \cdot \sqrt{n} \right| \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\}, \text{ ak } a \neq a_0 \end{aligned}$$

   (b) `?-`$a|\sigma^2$ neznáme

$$g = \frac{\bar{\mathbb{X}} - a}{S_1} \cdot \sqrt{n} \sim t(n-1) \qquad \begin{aligned} W_0 &= \{\mathbb{X} : g \leq t_\alpha(n-1)\}, && \text{ak } a < a_0 \\ W_0 &= \{\mathbb{X} : g \geq t_{1-\alpha}(n-1)\}, && \text{ak } a > a_0 \\ W_0 &= \left\{\mathbb{X} : |g| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}, && \text{ak } a \neq a_0 \end{aligned}$$

   (c) `?-`$\sigma^2|a$ známe

$$g = \frac{nS_0^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n) \qquad \begin{aligned} W_0 &= \left\{\mathbb{X} : g \leq \chi^2_\alpha(n)\right\}, && \text{ak } \sigma^2 < \sigma_0^2 \\ W_0 &= \left\{\mathbb{X} : g \geq \chi^2_{1-\alpha}(n)\right\}, && \text{ak } \sigma^2 > \sigma_0^2 \\ W_0 &= \left\{\mathbb{X} : g \leq \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n) \vee g \geq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)\right\}, && \text{ak } \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{aligned}$$

   (d) `?-`$\sigma^2|a$ neznáme

$$g = \frac{(n-1)\,S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \qquad \begin{aligned} W_0 &= \left\{\mathbb{X} : g \leq \chi^2_\alpha(n-1)\right\}, && \text{ak } \sigma^2 < \sigma_0^2 \\ W_0 &= \left\{\mathbb{X} : g \geq \chi^2_{1-\alpha}(n-1)\right\}, && \text{ak } \sigma^2 > \sigma_0^2 \\ W_0 &= \left\{\mathbb{X} : g \leq \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \vee g \geq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}, \\ & && \text{ak } \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{aligned}$$

2. Nech $V_n \in \mathsf{Ex}(\delta)$. Budeme testovať parameter δ. Hypotézy položíme nasledovne:

$$H_0 : \delta = \delta_0, \qquad H_1 : \delta = \delta_1 < \delta_0, \quad \text{alebo} \quad H_1 : \delta_1 > \delta_0, \quad \text{alebo} \quad H_1 : \delta_1 \neq \delta_0$$

Potom použitá štatistika a príslušné kritické obory budú:

$$g = \frac{2n\bar{\mathbb{X}}}{\delta} \sim \chi^2(2n) \qquad W_0 = \left\{\mathbb{X} : \frac{2n\bar{\mathbb{X}}}{\delta} \leq \chi^2_{\alpha}(2n)\right\}, \qquad \text{ak } \delta < \delta_0^2$$

$$W_0 = \left\{\mathbb{X} : g \geq \chi^2_{1-\alpha}(2n)\right\}, \qquad \text{ak } \delta^2 > \delta_0^2$$

$$W_0 = \left\{\mathbb{X} : g \leq \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(2n) \vee g \geq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(2n)\right\}, \quad \text{ak } \delta^2 \neq \delta_0^2$$

Tu je potrebné dopísať nasledovné časti:

- Odvodenie najlepšieho kritického oboru W_0
- Neparametrické testy (znamienkový test, Dixonov test)
- Párový t-test

8.3 Testy zhody pre dva nezávislé výbery

Uvažujme dva nezávislé výbery z normálneho rozdelenia.

$$V_{n_1} = (\mathbb{X}_{11}, \mathbb{X}_{12}, \ldots, \mathbb{X}_{1n_1}) \in \mathsf{N}\left(a_1, \sigma_1^2\right), \bar{\mathbb{X}}_1 \sim \mathsf{N}\left(a_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}\right)$$
$$V_{n_2} = (\mathbb{X}_{21}, \mathbb{X}_{22}, \ldots, \mathbb{X}_{2n_2}) \in \mathsf{N}\left(a_2, \sigma_2^2\right), \bar{\mathbb{X}}_2 \sim \mathsf{N}\left(a_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

Potom $\bar{\mathbb{X}}_1 - \bar{\mathbb{X}}_2 \sim \mathsf{N}\left(a_1 - a_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} - \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$. (kovarianciu poznáme, je rovná 0, pretože výbery sú nezávislé).

Rozlišujeme dva typy testovanej zhody:

A.) test zhody dvoch stredných hodnôt

B.) test zhody dvoch rozptylov

8.3.1 Testy zhody dvoch stredných hodnôt

Hypotézy položíme nasledovne:

$$H_0 : a_1 = a_2, \qquad H_1 : a_1 \neq a_2$$

Rozlišujeme dva prípady:

1. ak σ_1^2, σ_2^2 sú známe – ide o *u-test*.

   Testovým kritériom a kritickým oborom sú:

$$\begin{aligned} g &= \frac{(\bar{\mathbb{X}}_1 - \bar{\mathbb{X}}_2) - (a_1 - a_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{(\bar{\mathbb{X}}_1 - \bar{\mathbb{X}}_2) - (a_1 - a_2)}{\sqrt{n_2\sigma_1^2 + n_1\sigma_2^2}} \cdot \sqrt{n_1 n_2} \sim \mathsf{N}(0,1) \\ W_0 &= \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 : |g| \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\} \end{aligned}$$

2. ak σ_1^2, σ_2^2 sú známe – ide o *t-testy*. Opäť máme dve možnosti:

(a) ak $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ je neznáme Potom testovým kritériom je

$$g = \frac{\frac{(\bar{\mathbb{X}}_1 - \bar{\mathbb{X}}_2) - (a_1 - a_2)}{\sqrt{n_2 S_{1_1}^2 + n_1 S_{1_2}^2}} \cdot \sqrt{n_1 n_2}}{\sqrt{\frac{\frac{(n_1-1)S_{1_1}^2}{\sigma^2} + \frac{(n_2-1)S_{1_2}^2}{\sigma^2}}{(n_1-1)+(n_2-1)}}} = \frac{(\bar{\mathbb{X}}_1 - \bar{\mathbb{X}}_2) - (a_1 - a_2)}{\sqrt{(n_1-1)S_{1_1}^2 + (n_2-1)S_{1_2}^2}} \cdot \sqrt{n_1 n_2},$$

pričom uvedené $g \sim t(n_1 + n_2 - 2)$.

(b) ak $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. A opäť rozlíšime dva prípady:

i. Ak $n_1 > 30$ a $n_2 > 30$, môžeme t-rozdelenie aproximovať normovaným normálnym rozdelením. Testové kritérium a kritický obor bude:

$$\begin{aligned} g &= \frac{(\bar{\mathbb{X}}_1 - \bar{\mathbb{X}}_2) - (a_1 - a_2)}{\sqrt{n_2 S_{1_1}^2 + n_1 S_{1_2}^2}} \cdot \sqrt{n_1 n_2} \sim \mathsf{N}(0,1) \\ W_0 &= \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 : |g| \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\} \end{aligned}$$

ii. Ak $n_1 \leq 30$, $n_2 \leq 30$, použijeme testové kritérium:

$$g = \frac{(\bar{\mathbb{X}}_1 - \bar{\mathbb{X}}_2) - (a_1 - a_2)}{\sqrt{n_2 S_{1_1}^2 + n_1 S_{1_2}^2}} \cdot \sqrt{n_1 n_2} \sim t(\gamma).$$

kde γ je „neznámy“ počet stupňov voľnosti t-rozdelenia. Určíme ho nasledovne:

$$t_\alpha(\gamma) = \frac{t_\alpha(n_1 - 1) \cdot \frac{S_{1_1}^2}{n_1} + t_\alpha(n_2 - 1) \cdot \frac{S_{1_2}^2}{n_2}}{\frac{S_{1_1}^2}{n_1} + \frac{S_{1_2}^2}{n_2}}$$

Kritický obor:

$$W_0 = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 : |g| \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$$

8.3.2 Testy zhody dvoch rozptylov

V tomto prípade ide o tzv. *F-testy*. Hypotézy položíme nasledovne:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2, \qquad H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

1. ak a_1, a_2 sú známe, použijeme nasledovné testové kritérium a kritický obor:

$$\begin{aligned} g &= \frac{\frac{n_1 S_{0_1}^2}{\sigma_1^2}}{\frac{n_2 S_{0_2}^2}{\sigma_2^2}} = \frac{S_{0_1}^2 \sigma_2^2}{S_{0_2}^2 \sigma_1^2} \sim F(n_1, n_2) \\ W_0 &= \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 : g \leq F_{\alpha/2}(n_1, n_2) \vee g \geq F_{1-\alpha/2}(n_1, n_2)\} \end{aligned}$$

2. ak a_1, a_2 sú neznáme, použijeme toto testové kritérium a kritický obor:

$$\begin{aligned} g &= \frac{\frac{(n_1-1) S_{1_1}^2}{\sigma_1^2}}{\frac{(n_2-1) S_{1_2}^2}{\sigma_2^2}} = \frac{S_{1_1}^2 \sigma_2^2}{S_{1_2}^2 \sigma_1^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1) \\ W_0 &= \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 : g \leq F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1) \vee g \geq F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)\} \end{aligned}$$

Pri testovaní zhody dvoch stredných hodnôt pre σ_1^2, σ_2^2 neznáme musíme najprv otestovať zhodu dvoch rozptylov!

Register

Zoznam definícií

Dôležité vety a tvrdenia