Kľúče k matematickej analýze III.

Prírodovedecká fakulta UPJŠ Košice

Predmety: KMA/MMA2a/01, KMA/MA1b/01 **Prednáša:** doc. RNDr. Jozef Džurina, CSc.
Obsah: Definície, vety, lemy a poznámky k predmetu
ZTEXoval: Róbert Novotný, r.novotny@szm.sk **Vydané:** 14. 3. 2002.

1 Funkcia jednej premennej

1.1 Nevlastný integrál

Definícia 1.1.1 (Integrál ohraničenej funkcie na nekonečnom intervale)
Nech f je funkcia ohraničená na intervale (a,∞) a nech f je integrovateľná na každom intervale $\langle a,b\rangle, b>a$. Ak existuje vlastná limita $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, tak túto limitu nazývame ***nevlastný integrál funkcie*** f ***na*** $\langle a,\infty)$.

$$\text{Označujeme:}\quad \int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

Teda:

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Nech existujú nevlastné integrály $\int_{-\infty}^c f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_c^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$. Potom ich súčet

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := \int_{-\infty}^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

Poznámka 1.1.2
Ak $f(x)\geq 0, x\in\langle a,\infty)$, tak $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ predstavuje obsah plochy určenej funkciou $f(x)$ a osi x.

Definícia 1.1.3 (Integrál neohraničenej funkcie na intervale $\langle a,b\rangle$)
Nech funkcia f je definovaná na $\langle a,b)$, nech je neohraničená v každom ľavom okolí bodu b. Nech f je integrovateľná na každom $\langle a,z\rangle, z\in(a,b)$. Ak existuje vlastná limita

$$\lim_{z\to b^-}\int_a^z f(x)\,\mathrm{d}x$$

tak túto limitu nazývame ***nevlastným integrálom z neohraničenej funkcie na*** $\langle a,b\rangle$.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{z\to b^-}\int_a^z f(x)\,\mathrm{d}x$$

1.1.1 Cauchyho nerovnosti

Lemma 1.1.4 (Buňakovského nerovnosť)
Nech f,g sú také, že uvedené integrály existujú. Potom platí:

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}\sqrt{\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x}$$

Poznámka 1.1.5 (Cauchyho nerovnosť)
Ak si za $f(x), g(x)$ zvolíme vhodné funkcie, získame špeciálny prípad Buňakovského nerovnosti pre prirodzené čísla:

$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$$

2 Diferenciálny počet funkcie viacerých premenných

2.1 Metrika

Definícia 2.1.1 (metrika)
Nech $\emptyset \neq \mathbb{M} \subset \mathbb{R}_n, A = (a_1, \ldots, a_n), B = (b_1, \ldots, b_n)$. Funkcia ϱ spĺňajúca:

1. $\varrho(A, B) \geq 0$, pričom $\varrho(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \equiv B$
2. $\varrho(A, B) = \varrho(B, A)$
3. $\varrho(A, B) \leq \varrho(A, C) + \varrho(B, C)$

sa nazýva ***metrika na množine*** $\mathbb{M}$. Dvojicu $(\mathbb{M}, \varrho)$ nazývame ***metrický priestor***.

2.2 Základné pojmy

Definícia 2.2.1
Množinu $\{X \in \mathbb{E}_n; \varrho(X, A) \leq \delta\}$, kde ϱ je euklidovská metrika nazývame ***guľa*** (v priestore $\mathbb{E}_n$) so stredom v bode A a polomerom δ.

Definícia 2.2.2
Množinu $\{X \in \mathbb{E}_n; \varrho(X, A) < \delta\}$ nazývame ***vnútro gule*** (v priestore $\mathbb{E}_n$) so stredom v bode A a polomerom δ.

Definícia 2.2.3
Okolím bodu A nazývame vnútro každej gule so stredom A. Označujeme $O(A)$.

Definícia 2.2.4
δ***-okolím bodu*** A nazývame vnútro gule so stredom v bode A a polomerom δ. Označujeme $O_\delta(A)$.

Definícia 2.2.5
Prstencovým okolím bodu A nazývame δ-okolie bodu A bez bodu A. Označujeme $O^*_\delta(A)$

Definícia 2.2.6
Uzavretým intervalom nazývame $\langle A, B\rangle = \langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle \times \ldots \times \langle a_n, b_n\rangle$.

Definícia 2.2.7
Otvoreným intervalom nazývame $(A, B) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_n, b_n)$.

Definícia 2.2.8
Nech $\mathbb{M} \subset \mathbb{E}_n$. Bod Z nazývame ***bodom zhustenia*** množiny $\mathbb{M}$, ak každé $O(Z)$ obsahuje aspoň jeden bod množiny $\mathbb{M}$ rôzny od Z.

Veta 2.1 (o bode zhustenia)
Bod Z je bodom zhustenia množiny $\mathbb{M}$ $\Leftrightarrow$ každé $O(Z)$ obsahuje nekonečne veľa bodov množiny $\mathbb{M}$.

Definícia 2.2.9
Množina všetkých bodov zhustenia množiny $\mathbb{M}$ sa nazýva ***uzáver*** množiny $\mathbb{M}$.

Definícia 2.2.10
Množina $\mathbb{M}$, ktorá obsahuje všetky svoje body zhustenia sa nazýva ***uzavretá***.

Definícia 2.2.11
Nech $\mathbb{M} \subset \mathbb{E}_n$. Bod $A \in \mathbb{M}$ nazývame ***vnútorným bodom*** množiny $\mathbb{M}$, ak existuje také okolie $O(A)$, že $O(A) \subset \mathbb{M}$.

Definícia 2.2.12
Množina všetkých vnútorných bodov množiny $\mathbb{M}$ sa nazýva ***vnútro množiny*** $\mathbb{M}$.

Definícia 2.2.13
Množinu, ktorej každý bod je vnútorným bodom nazývame ***otvorená***.

Definícia 2.2.14
Bod B nazývame ***hraničným bodom*** množiny $\mathbb{M}$, ak každé jeho okolie obsahuje aspoň jeden bod, ktorý do množiny patrí a aspoň jeden bod, ktorý do množiny nepatrí.

Definícia 2.2.15
Množinu všetkých hraničných bodov množiny $\mathbb{M}$ nazývame ***hranicou množiny*** $\mathbb{M}$.

Definícia 2.2.16
Nech $\mathbb{M} \subset \mathbb{E}_n$. Množina $\mathbb{M}$ je ***ohraničená***, ak $\exists k > 0, P \in \mathbb{E}_n$ také, že $\mathbb{M} \subset O_k(P)$.

Veta 2.2
Každá nekonečná ohraničená množina bodov má aspoň jeden bod zhustenia.

Definícia 2.2.17
Úsečkou AB nazývame množinu $\overline{AB} = \{X \in \mathbb{E}_n; X = A + t(B - A), t \in \langle 0, 1\rangle\}$.

Definícia 2.2.18
Nech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sú navzájom rôzne body priestoru $\mathbb{E}_n$. ***Lomenou čiarou*** spájajúcou body $X_1, X_2, \ldots, X_k$ nazývame množinu úsečiek $\overline{X_1X_2}, \overline{X_2X_3}, \overline{X_{k-1}X_k}$.

Definícia 2.2.19
Otvorená množina $\mathbb{M}$, ktorej každé dva body vieme spojiť lomenou čiarou, ktorá celá leží v $\mathbb{M}$, sa nazýva ***oblasť***.

2.3 Postupnosti bodov v $\mathbb{E}_n$

Definícia 2.3.1
Nech $\{X_k\}_1^\infty$ je postupnosť bodov v $\mathbb{E}_n$. Hovoríme, že $\{X_k\}_1^\infty$ ***konverguje*** k $L \in \mathbb{E}_n$, ak postupnosť vzdialeností $\varrho(X_k, L)$ konverguje k 0.

Veta 2.3 (o jednoznačnosti limity)
Konvergentná postupnosť má jedinú limitu.

Veta 2.4 (o výpočte limity)
Nech Z_k je postupnosť bodov v $\mathbb{E}_2$; $Z_k = (x_k, y_k)$.
Postupnosť bodov $\{Z_k\}$ konverguje k $A = [a, b] \Leftrightarrow ((x_k \to a) \wedge (y_k \to b))$.

Veta 2.5
Nech $\{X_k\}, \{Y_k\}$ sú konvergentné postupnosti. Potom

1. $\lim\limits_{k\to\infty} (X_k + Y_k) = \lim\limits_{k\to\infty} X_k + \lim\limits_{k\to\infty} Y_k$
2. $\lim\limits_{k\to\infty} c \,.\, X_k = c \,.\, \lim\limits_{k\to\infty} X_k$

Definícia 2.3.2
Postupnosť $\{X_k\}$ sa nazýva ***ohraničenou***, ak je ohraničená množina bodov tejto postupnosti.

Lemma 2.3.3
Ak $Z_k = (x_k, y_k)$ je ohraničená, tak je ohraničená $\{x_k\}$ aj $\{y_k\}$.

Definícia 2.3.4 (vybraná postupnosť)
analogicky ako pri postupnostiach nad $\mathbb{N}$.

Veta 2.6
Z každej ohraničenej postupnosti $\{Z_k\}_1^\infty, Z_k \in \mathbb{E}_n$, sa dá vybrať konvergentná postupnosť.

Veta 2.7
Nech postupnosť $\{Z_k\}_1^\infty$ konverguje k A. Potom každá z nej vybraná postupnosť konverguje k A.

Veta 2.8 (kritérium pre uzavreté množiny)
Množina $\mathbb{M} \subset \mathbb{E}_n$ je uzavretá $\Leftrightarrow$ limita každej konvergentnej postupnosti bodov z $\mathbb{M}$ patrí do $\mathbb{M}$.

2.4 Funkcie viacerých premenných

Definícia 2.4.1
Nech $\emptyset \neq \mathbb{M} \subset \mathbb{E}_n$. ***Funkcia*** n ***premenných*** s definičným oborom $\mathbb{M}$ je pravidlo, ktoré každému bodu priradí práve jedno reálne číslo.

Definícia 2.4.2
Číslo a voláme ***minimom funkcie*** $f(x_1, \ldots, x_k)$ na množine $\mathbb{M}$, ak

1. $\forall \mathbb{X} \in \mathbb{M}$ je $f(\mathbb{X} \geq a)$
2. $\exists A \in \mathbb{M} : f(A) = a$

Definícia 2.4.3 (zložená funkcia)
Nech funkcia $f(t_1, \ldots, t_m)$ je definovaná na $\mathbb{M} \subset \mathbb{E}_m$.
Nech funkcie $t_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots t_m = \varphi_m(x_1, \ldots, x_n)$ sú definované na $\mathbb{K} \subset \mathbb{E}_n$.
Nech pre každé $\mathbb{X} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}$ je $(\varphi_1(\mathbb{X}), \ldots, \varphi_m(\mathbb{X})) \in \mathbb{M}$.
Potom predpisom $F(\mathbb{X}) = f(\varphi_1(\mathbb{X}), \ldots, \varphi_m(\mathbb{X}))$ je na množine $\mathbb{M}$ definovaná ***zložená funkcia***.

2.5 Limita funkcie viacerých premenných

Definícia 2.5.1 (Cauchy)
Nech funkcia f je definovaná na $O^*(A), A \in \mathbb{E}_n$. Hovoríme, že f má v A limitu $l \in \mathbb{R}$, ak

$$\forall O_\varepsilon(l)\, \exists O_\delta(A) : \forall \mathbb{X} \in O_\delta(A) \text{ je } f(\mathbb{X}) \in O_\varepsilon(l),$$

teda:

$$\lim_{\mathbb{X} \to A} f(\mathbb{X}) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \forall \mathbb{X} \in O^*_\delta(A) \Rightarrow f(\mathbb{X}) \in O^*_\varepsilon(l)$$

Definícia 2.5.2 (Heine)
Nech funkcia f je definovaná na $O(A)$. Hovoríme, že funkcia má v A limitu $l \in \mathbb{R}$ ak pre každú postupnosť $\{\mathbb{X}_k\}_1^\infty, \mathbb{X}_k \in O^*(A)$ takú, že $\mathbb{X}_k \to A$ je $f(\mathbb{X}_k) \to l$.

Veta 2.9
Cauchyho a Heineho definície limity sú ekvivalentné.

Veta 2.10
Nech existuje $\lim\limits_{\mathbb{X} \to A} f(\mathbb{X}) = l, \lim\limits_{\mathbb{X} \to A} g(\mathbb{X}) = m$. *Potom*

1. $\lim\limits_{\mathbb{X} \to A} (f(\mathbb{X}) \pm g(\mathbb{X})) = l \pm m$
2. $\lim\limits_{\mathbb{X} \to A} (f(\mathbb{X}) \,.\, g(\mathbb{X})) = l \,.\, m$
3. $\lim\limits_{\mathbb{X} \to A} \frac{f(\mathbb{X})}{g(\mathbb{X})} = \frac{l}{m}; m \neq 0$

Poznámka 2.5.3
Ak dosadením hodnôt do funkcie nevznikne neurčitý výraz, limitou je funkčná hodnota v bode.

Veta 2.11
Nech $\lim\limits_{\mathbb{X} \to A} f(\mathbb{X}) = 0$. *Nech* $g(\mathbb{X})$ *je ohraničená v* $O^*(A)$. *Potom existuje* $\lim\limits_{\mathbb{X} \to A} \big((f(\mathbb{X}) \,.\, g(\mathbb{X})\big) = 0$.

Veta 2.12
Nech existuje $\lim\limits_{\mathbb{X} \to A} f(\mathbb{X}) = l, \lim\limits_{\mathbb{X} \to A} g(\mathbb{X}) = m$. *Nech* $l < m$. *Potom* $\exists O^*(A)$ *také, že* $\forall \mathbb{X} \in O^*(A)$ *je* $f(\mathbb{X}) < g(\mathbb{X})$.

Dôsledok 2.5.4
Nech existuje $\lim\limits_{\mathbb{X} \to A} f(\mathbb{X}) = l, \lim\limits_{\mathbb{X} \to A} g(\mathbb{X}) = m$.
Nech $\exists O^*(A)$ *také, že* $f(\mathbb{X}) \geq g(\mathbb{X});\quad \mathbb{X} \in O^*(A)$.
Potom $l \geq m$.

Dôsledok 2.5.5
Nech existuje $\lim\limits_{\mathbb{X}\to A} f(\mathbb{X}) = l > 0$.
Potom $\exists O^*(A) : f(\mathbb{X}) > 0; \mathbb{X} \in O^*(A)$

2.6 Spojitosť funkcie viacerých premenných

Definícia 2.6.1
Nech f je definovaná na množine $\mathbb{M}$, nech A je vnútorný bod tejto množiny. Hovoríme, že f je ***spojitá na v bode*** A, ak

$$\lim_{\mathbb{X}\to A} f(\mathbb{X}) = f(A)$$

Definícia 2.6.2
Nech množina $\mathbb{M}$ je otvorená. Funkcia f je ***spojitá na množine*** $\mathbb{M}$, ak je spojitá v každom bode tejto množiny.

Definícia 2.6.3 (Cauchy)
Hovoríme, že funkcia f je ***spojitá v bode*** $A \in \mathbb{M}$ ***vzhľadom na*** $\mathbb{M}$, ak

$$\exists \varepsilon > 0, \exists O_\delta(A) \cap \mathbb{M} \Rightarrow |f(\mathbb{X}) - f(A)| < \varepsilon$$

Definícia 2.6.4 (Heine)
Hovoríme, že funkcia f je ***spojitá v bode*** A ***vzhľadom na množinu*** $\mathbb{M}$, ak $\forall\{Z_k\}, Z_k \in \mathbb{M}, Z_k \to A$ platí, že $\{f(Z_k)\}$ je taká, že $\lim\limits_{\mathbb{X}\to A} f(Z_k) = f(A)$.

Veta 2.13
Nech f, g *sú spojité v* A. *Potom aj*

1. $|f(\mathbb{X})|$
2. $c_1 \,.\, f(\mathbb{X}) + c_2 \,.\, g(\mathbb{X}); \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
3. $f(\mathbb{X}) \,.\, g(\mathbb{X})$
4. $\frac{f(\mathbb{X})}{g(\mathbb{X})}; \quad g(A) \neq 0$

sú spojité v A.

Definícia 2.6.5
Pod ***polynómom*** n ***premenných*** budeme rozumieť každú funkciu, ktorá vznikne súčtom konečného počtu funkcií tvaru $c \,.\, x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_n^{p_n}; \; c \in \mathbb{R}; p_i \in \mathbb{N}_0$.

Veta 2.14 (spojitosť zloženej funkcie)
Nech $\varphi_1(x_1, x_2, x_3)$ *a* $\varphi_2(x_1, x_2, x_3)$ *sú spojité v* A.
Nech $f(t_1, t_2)$ *je spojitá v* $B = \varphi_1(A), \varphi_2(A)$.
Potom zložená funkcia

$$F(\mathbb{X}) = f(\varphi_1(\mathbb{X}), \varphi_2(\mathbb{X}))$$

je spojitá v A.

Poznámka 2.6.6
V predchádzajúcej vete sme od f žiadali: $\lim\limits_{T\to B} f(T) = f(B)$ a tvrdením bolo: $\lim\limits_{\mathbb{X}\to A} F(\mathbb{X}) = F(A) = f(B)$.
Ak v predchádzajúcej vete nahradíme: $\lim\limits_{T\to B} F(T) = l$, tak tvrdenie bude: $\lim\limits_{\mathbb{X}\to A} F(\mathbb{X}) = l$.

2.7 Vlastnosti spojitej funkcie na uzavretej a ohraničenej množine

Veta 2.15 (vlastnosti spojitých funkcií)
Nech f je spojitá na $\mathbb{M}$ vzhľadom na $\mathbb{M}$, nech $\mathbb{M}$ je uzavretá, ohraničená. Potom:

1. *f je ohraničená na $\mathbb{M}$*
2. *f nadobúda na $\mathbb{M}$ minimum aj maximum.*

Veta 2.16 (o nadobúdaní hodnôt)
Nech $f(\mathbb{X})$ je spojitá na oblasti $\mathbb{M}$.
Nech $A, B \in \mathbb{M}$ také, že $f(A) < f(B)$.
Potom f nadobúda na $\mathbb{M}$ každú hodnotu z intervalu $\langle f(A), f(B)\rangle$.

Dôsledok 2.7.1
Ak funkcia f je na oblasti $\mathbb{M}$ spojitá a nadobúda kladné aj záporné hodnoty, potom

$$\exists A \in D(F) \cap \mathbb{M} : f(A) = 0$$

2.8 Parciálne derivácie funkcie viacerých premenných

Definícia 2.8.1
Nech funkcia $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je definovaná na $O(A), A = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$. Potom pomocou funkcie f môžme definovať n funkcií jednej premennej:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= f(x, a_2, a_3, \ldots, a_n);\ na\ O(a_1) \\ g_2(x) &= f(a_1, x, a_3, \ldots, a_n);\ na\ O(a_2) \\ &\vdots \\ g_n(x) &= f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, x);\ na\ O(a_n) \end{aligned}$$

Takto definované funkcie nazývame ***parciálne funkcie k funkcii f a bodu A***.

Definícia 2.8.2
Nech parciálna funkcia $g_i(x)$ má deriváciu v a_i. Potom túto deriváciu nazývame ***parciálnou deriváciou*** funkcie f podľa premennej x_i v bode A.

$$\text{Označujeme:} \qquad f'_{x_i}(A) \qquad \frac{\partial f(A)}{\partial x_i}$$

Platí teda:

$$\frac{\partial f(A)}{\partial x_i} = g'_i(a_i) = \lim_{x \to a_i} \frac{g_i(x) - g_i(a_i)}{x - a_i} = \lim_{x_i \to a_i} \frac{f(a_1, \ldots, x_i, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{x_i - a_i}$$

Definícia 2.8.3
Funkcia, ktorá každému $\mathbb{X} \in D(f)$, pre ktoré existuje $\frac{\partial f(\mathbb{X})}{\partial x_i}$, priradí $\frac{\partial f(\mathbb{X})}{\partial x_i}$ sa nazýva ***parciálna derivácia*** funkcie f podľa x_i.

2.9 Parciálne derivácie vyšších rádov

Definícia 2.9.1
$A \in D(f'_{x_i})$. Ak existuje parciálna derivácia funkcie f'_{x_i} podľa premennej x_i, tak túto deriváciu nazveme ***druhou parciálnou deriváciou*** funkcie f podľa premennej x_i v bode A.

$$\text{Označujeme:} \qquad f''_{x_i x_i}(A) \qquad \frac{\partial^2 f(A)}{\partial x_i^2}$$

Veta 2.17 (Schwarz)
Nech funkcia má spojité parciálne derivácie $f''_{xy}(A)$, $f''_{yx}(A)$. Potom

$$f''_{xy}(A) = f''_{yx}(A)$$

Veta 2.18 (analógia Lagrange)
Nech $f(\mathbb{X})$ je definovaná na $O(A)$; $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$.
Nech f má v $O(A)$ parciálne derivácie prvého rádu podľa všetkých premenných a nech $B \in O(A)$.
Potom existujú

$$\begin{aligned} P_1 &= [\xi_1, b_2, \ldots, b_n] \\ P_2 &= [b_1, \xi_2, b_3, \ldots, b_n] \\ &\vdots \\ P_n &= [b_1, \ldots, b_{n-1}, \xi_n] \end{aligned}$$

$\xi_i \in (a_i, b_i)$ *také, že*

$$f(B) - f(A) = \frac{\partial f(P_1)}{\partial x_1}(b_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial f(P_n)}{\partial x_n}(b_n - a_n)$$

Naviac $\varrho(P_i, A) < \varrho(B, A)$.

Dôsledok 2.9.2
Nech f má na oblasti $\mathbb{M}$ parciálne derivácie podľa všetkých premenných, pričom na $\mathbb{M}$ platí:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

Potom f je konštantná funkcia.

Dôsledok 2.9.3
Nech $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existuje v $O(A)$, $i = 1, 2 \ldots, n$.
Nech tieto parciálne derivácie sú ohraničené na $O(A)$.
Potom f je spojitá v A.

Definícia 2.9.4
Nech $f(\mathbb{X})$ je definovaná v $O(A)$. Hovoríme, že f je ***diferencovateľná*** v A, ak:

1. existujú reálne konštanty $k_1, \ldots, k_n$
2. existuje funkcia $\omega(\mathbb{X})$:
   - definovaná v $O(A)$
   - spojitá v $O(A)$
   - $\omega(\mathbb{X}) = 0$

pričom

$$\forall \mathbb{X} \in O(A) : f(\mathbb{X}) - f(A) = \sum_{i=1}^{n} [k_i(x_i - a_i)] + \omega(\mathbb{X}) \, . \, \varrho(A, \mathbb{X})$$

Výraz

$$\mathrm{d}f(A, \mathbb{X}) = \sum_{i=1}^{n} k_i(x_i - a_i)$$

z definície diferencovateľnosti sa nazýva ***diferenciál***.

Veta 2.19
Ak f je diferencovateľná v A, tak f je spojitá v A.

Veta 2.20
Ak f je diferencovateľná v A, tak existujú parciálne derivácie $\frac{\partial f(A)}{\partial x_i}, i = 1, 2, \ldots, n$.
Naviac

$$\mathrm{d}f(A, \mathbb{X}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(A)}{\partial x_i}(x_i - a_i)$$

Veta 2.21 (postačujúca podmienka pre diferencovateľnosť v A)
Nech f má v $O(A)$ parciálne derivácie prvého rádu podľa všetkých premenných.
Ak sú tieto parciálne derivácie spojité v A, tak f je diferencovateľná v A.

2.10 Parciálne derivácie zloženej funkcie

Veta 2.22
Nech funkcie $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$ majú derivácie v a.
Nech $f(t_1, \ldots, t_m)$ je diferencovateľná v $B = [\varphi_1(a), \ldots, \varphi_m(a)]$.
Potom zložená funkcia $F(x) = f(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x))$ má deriváciu v a a platí:

$$F'(a) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(B)}{\partial t_i} \varphi_i'(a)$$

Veta 2.23
Nech funkcie $\varphi_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_k)$ majú v A parciálne derivácie podľa jednotlivých premenných.
Nech $f(t_1, \ldots, t_m)$ je diferencovateľná v $B = [\varphi_1(A), \ldots, \varphi_m(A)]$.
Potom zložená funkcia

$$F(x_1, \ldots, x_k) = f(\varphi_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_k))$$

má v A parciálnu deriváciu podľa $x_1, \ldots, x_k$ a platí:

$$\frac{\partial F(A)}{\partial x_1} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(B)}{\partial t_i} \frac{\partial \varphi_i(A)}{\partial x_1}$$

2.10.1 Taylorova veta pre funkcie viacerých premenných

Definícia 2.10.1

$$\mathrm{d}^2 f(A, \mathbb{X}) = \left[\frac{\partial \bullet}{\partial x_1}(x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial \bullet}{\partial x_n}(x_n - a_n)\right]^2 . f(A)$$

Výraz formálne umocníme a do výjduvšieho výrazu za $\bullet$ dosadíme $f(A)$. Pre funkciu dvoch premenných teda:

$$\mathrm{d}^2 f(A, \mathbb{X}) = \left[\frac{\partial \bullet}{\partial x}(x - a_1) + \frac{\partial \bullet}{\partial y}(y - a_2)\right]^2 . f(A) = \frac{\partial^2 f(A)}{\partial x^2}(x-a_1)^2 + 2\frac{\partial^2 f(A)}{\partial x \partial y}(x-a_1)(y-a_2) + \frac{\partial^2 f(A)}{\partial y^2}(y-a_2)^2$$

Veta 2.24 (Taylorova)
Nech f má v $O(A)$ spojité parciálne derivácie až $(k+1)$ rádu a nech $\mathbb{X} \in O(A)$. Potom

$$\exists \eta, 0 < \eta < 1 : f(\mathbb{X}) = f(A) + \frac{\mathrm{d} f(A, \mathbb{X})}{1!} + \frac{\mathrm{d}^2 f(A, \mathbb{X})}{2!} + \cdots + \frac{\mathrm{d}^k f(A, \mathbb{X})}{k!} + \frac{\mathrm{d}^{k+1} f(P, R)}{(k+1)!}$$

kde $P = A + \eta(\mathbb{X} - A)$
$R = \mathbb{X} + \eta(\mathbb{X} - A)$

2.11 Lokálne extrémy

Definícia 2.11.1
Hovoríme, že f má v A ***lokálne maximum*** [***lokálne minimum***], ak

$$\exists O(A), \text{že } \forall \mathbb{X} \in O(A) : \ f(\mathbb{X}) \leq f(A) \quad [f(\mathbb{X}) \geq f(A)]$$

Veta 2.25 (nutná podmienka pre lokálne extrémy)
Nech f má v A lokálny extrém.
Nech existujú parciálne derivácie f prvého rádu podľa všetkých premenných. Potom

$$\frac{\partial f(A)}{\partial x_i} = 0, \ i = 1, 2, \ldots, n$$

Definícia 2.11.2
Bod A, pre ktorý $\frac{\partial f(A)}{\partial x_i} = 0, \ i = 1, 2, \ldots, n$ nazývame ***stacionárny bod***.

Veta 2.26 (postačujúca podmienka pre lokálne extrémy)
Nech f má v $O(A)$ spojité parciálne derivácie druhého rádu, nech A je stacionárny bod. Potom:

1. *ak* $\forall \mathbb{X} \in O^*(A) : d^2 f(A, \mathbb{X}) > 0$, *tak f má v A lokálne minimum*
2. *ak* $\forall \mathbb{X} \in O^*(A) : d^2 f(A, \mathbb{X}) < 0$, *tak f má v A lokálne maximum*
3. *ak* $d^2 f(A, \mathbb{X})$, *mení znamienko, tak f nemá v A lokálny extrém.*

Poznámka 2.11.3
Ak $d^2 f(A, \mathbb{X}) \leq 0, d^2 f(A, \mathbb{X}) \geq 0$, tak nevieme povedať nič o výskyte extrému v A.

Veta 2.27 (postačujúca podmienka pre lokálne extrémy pre funkcie <u>dvoch</u> premenných)
Nech f má v $O(A)$ spojité parciálne derivácie druhého rádu, nech A je stacionárny bod. Označme

$$D = \begin{vmatrix} f''_{xx}(A) & f''_{xy}(A) \\ f''_{yx}(A) & f''_{yy}(A) \end{vmatrix}$$

Nech

1. $f''_{xx}(A) > 0 \wedge D > 0$ *potom f má v A lokálne minimum* $(d^2 f(A, \mathbb{X}) > 0,\ \mathbb{X} \in O(A))$
2. $f''_{xx}(A) < 0 \wedge D > 0$ *potom f má v A lokálne maximum* $(d^2 f(A, \mathbb{X}) < 0,\ \mathbb{X} \in O(A))$
3. $D < 0$ *potom f v A nemá lokálny extrém* ($\mathrm{d}^2 f(A, \mathbb{X})$ *mení na $O(A)$ znamienko).*

Veta 2.28 (postačujúca podmienka pre lokálne extrémy pre funkcie <u>troch</u> premenných)
Nech $f(x_1, x_2, x_3)$ má v $O(A)$ spojité parciálne derivácie druhého rádu. Nech A je stacionárny bod. Označme

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 f(A)}{\partial x_i \partial x_j}$$

1. *Ak* $(a_{11} > 0) \wedge \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \wedge \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0$, *tak f má v A lokálne minimum.*
2. *Ak* $(a_{11} < 0) \wedge \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \wedge \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0$, *tak f má v A lokálne maximum.*

2.12 Viazané lokálne extrémy

Definícia 2.12.1
Hovoríme, že funkcia $f(x, y)$ má v $A \in \mathbb{E}_2$ ***viazané lokálne minimum*** [***viazané lokálne maximum***] vzhľadom na množinu $\mathcal{N} = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : g(x, y) = 0\}$ ak

1. $A \in \mathcal{N}$
2. $\forall \mathbb{X} \in (O(A) \cap \mathcal{N}) : f(\mathbb{X}) \geq f(A)\ \ [f(\mathbb{X}) \leq f(A)]$

Poznámka 2.12.2 (ako hľadať viazané lokálne extrémy)
1. Ak je väzbou $g(x, y)$ určená jediná funkcia $y = \varphi(x), x \in I\ \ (x = \varphi(y), y \in J)$. Potom budeme počítať extrémy funkcie jednej premennej $h(x) = f(x, \varphi(x))$.
2. Ak sa nedá vyjadriť y, x, tak budeme uvažovať funkciu $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$ a budeme hľadať lokálne extrémy tejto funkcie.

Veta 2.29
Nech F má lokálny extrém v bode $A \in \mathbb{E}_2$. Potom funkcia f má v A viazaný lokálny extrém vzhľadom na $\mathcal{N} = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : g(x, y) = 0\}$.

3 Integrál funkcie dvoch premenných

3.1 Integrál na intervale

Určitý integrál funkcie jednej premennej je definovaný na intervale $\langle a, b\rangle$. Našou snahou je definovať integrál pre $f(x, y)$ na intervale $I = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$.
Postup:

1. Definujeme delenie intervalu I
2. Definujeme normálnu postupnosť delení intervalu I (NPD I)
3. Definujeme postupnosť integrálnych súčtov
4. Definujeme integrál na I

Postup v praxi:

1. Nech $D^{(1)}$ je delenie intervalu $\langle a, b\rangle$ s deliacimi bodmi $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{p_n} = b$.
   Nech $D^{(2)}$ je delenie intervalu $\langle c, d\rangle$ s deliacimi bodmi $c = y_0 < x_1 < \ldots < y_{q_n} = d$.
   Potom $D = D^{(1)} \times D^{(2)}$ je delenie intervalu I pozostávajúce z podintervalov
   $$I_{ij} = \langle x_{i-1,x_i}\rangle \times \langle y_{j-1}, y_j\rangle$$
   Ich počet je $p_n \,.\, q_n$.
   Niekedy je výhodnejšie používať $I_1, I_2, \ldots, I_{p_n . q_n}$.

2. ***Normou delenia*** D intervalu I rozumieme číslo
   $$D = \max\{D^{(1)}, D^{(2)}\},$$
   kde $D^{(1)}, D^{(2)}$ sú dĺžky najväčšieho intervalu príslušneho delenia.
   Hovoríme, že postupnosť delení $\{D_n\}$ intervalu I je ***normálna***, ak $\lim\limits_{n\to\infty} D_n = 0$
   Teda platí:
   Ak $\{D_n^{(1)}\}$ je NPD $\langle a, b\rangle$ a $\{D_n^{(2)}\}$ je NPD $\langle c, d\rangle$, tak $D_n = D_n^{(1)} \times D_n^{(1)}$ je NPD intervalu I.

3. Nech $\{D_n\}$, $D_n = D_n^{(1)} \times D_n^{(2)}$ je NPD I.
   Nech D_n-té delenie I pozostáva z $I_{11}, I_{12}, \ldots I_{p_n q_n}$ (resp. $I_1, I_2, \ldots I_{p_n . q_n}$).
   Nech f je definovaná a ohraničená na intervale I.
   Nech $T_{ij} \in I_{ij}$ (resp. $T_i \in I_i$) je ľubovoľný bod z $I_{i,j}$.
   Potom súčet
   $$S(f, D_n, T_{ij}) = \sum_{i=1}^{p_n} \sum_{j=1}^{q_n} f(T_{ij}) \,.\, P(I_{ij})$$
   kde $P(I_{ij})$ je plocha podintervalu I_{ij}, resp. súčet
   $$S(f, D_n, T_i) = \sum_{i=1}^{p_n . q_n} f(T_i) \,.\, P(I_i)$$
   nazývame integrálnym súčtom prislúchajúcim funkcii f s delením D_n na intervale I.

4. Nech pre ľubovoľnú NPD D_n intervalu I a pre ľubovoľný výber bodov $T_i \in I_i$ (resp. $T_{ij} \in I_{ij}$) má postupnosť integrálnych súčtov stále rovnakú limitu.
   Potom túto limitu nazveme dvojným integrálom funkcie f na intervale I. V tomto prípade funkciu f nazveme integrovateľnou na I, t.j.
   $$\iint\limits_I f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty} S(f, D_n, T_i)$$

Poznámka 3.1.1
Ak $I = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle \times \langle e, f\rangle$ a funkcia f je funkciou troch premenných, tak úplne analogicky definujeme trojný integrál
$$\iiint\limits_I f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty} S(f, D_n, T_i)$$

Podobným spôsobom môžme definovať aj n-ný integrál.

3.1.1 Základné vlastnosti

Veta 3.1
Konštantná funkcia $f(x, y) = c,\ c \in \mathbb{R}$ *je integrovateľná na každom intervale* $I \in \mathbb{E}_2,\ P(I) < \infty$ *a*

$$\iint\limits_I c\,.\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = c\,.\,P(I)$$

Veta 3.2
Nech $f(x, y), g(x, y)$ *sú integrovateľné na* I*.*
Nech $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$*.*
Potom aj $h(x) = c_1\,.\,f(x, y) + c_2\,.\,g(x, y)$ *je integrovateľná na* I *a platí:*

$$\iint\limits_I c_1\,.\,f(x, y) + c_2\,.\,g(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = c_1\,.\iint\limits_I f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + c_2\,.\iint\limits_I g(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Veta 3.3
Nech interval $J \subset I$*.*
Nech f *je definovaná na* I*, pričom* $f(x, y) \equiv 0$ *na* $I - J$*.*
Potom f *je integrovateľná na* $I \Leftrightarrow$*, ak* f *je integrovateľná na* J *a naviac*

$$\iint\limits_I f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_J f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

3.1.2 Nerovnosti pre dvojný integrál

Veta 3.4
Nech $f(x, y)$ *je integrovateľná na* I*.*
Nech $f(x, y) \geq 0$ *na* I*.*
Potom

$$\iint\limits_I f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \geq 0$$

Veta 3.5
Nech $f(x, y) \leq g(x, y)$ *na* I*.*
Nech f, g *sú integrovateľné na* I*.*
Potom

$$\iint\limits_I f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \iint\limits_I g(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Veta 3.6
Nech f *je integrovateľná na* I*.*
Nech $m \leq f(x, y) \leq M$ *na* I*.*
Potom

$$m\,.\,P(I) \leq \iint\limits_I f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq M\,.\,P(I)$$

Veta 3.7 (Výpočet dvojného integrálu na intervale)
Nech $f(x, y)$ *je integrovateľná (spojitá) na* $I = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$*.*
Nech $\forall x \in \langle a, b\rangle\ \exists \int_c^d f(x, y)\ \mathrm{d}y$*.*
Potom

$$\iint\limits_I f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

3.2 Integrál na množine

Predpokladajme, že f je ohraničená (t.j. aj definovaná) na množine $\mathbb{A}$ ($\mathbb{A}$ je tiež ohraničená). Chceme definovať dvojný integrál funkcie $f(x,y)$ na množine $\mathbb{A}$.

Poznámka 3.2.1
Funkciu $\mathrm{ch}_A(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{pre } (x,y) \in \mathbb{A} \\ 0 & \text{pre } (x,y) \notin \mathbb{A} \end{cases}$ nazývame ***charakteristická funkcia***[1] pre množinu $\mathbb{A}$.
Funkciu F_A môžeme tiež definovať nasledovne:

$$F_A(x,y) = f(x,y) \,.\, \chi_A(x,y)$$

Definícia 3.2.2
Definujme $F_A(x,y)$: funkcia prislúchajúca k funkcii f na $\mathbb{A}$ nasledovne:

$$F_A = \begin{cases} f(x,y) & \text{ak } (x,y) \in \mathbb{A} \\ 0 & \text{ak } (x,y) \notin \mathbb{A} \end{cases}$$

Definícia 3.2.3
Hovoríme, že f je integrovateľná na $\mathbb{A}$, ak funkcia $F_A(x,y)$ je integrovateľná na intervale I takom, že $A \subset I$, t.j.:

$$\iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y := \iint\limits_I F_A(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Definícia 3.2.4
Nech $\mathbb{A}$ je ohraničená množina. Ak existuje $\iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, tak $\mathbb{A}$ sa nazýva ***merateľná*** množina a

$$P(A) = \iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

pričom $P(A)$ je plocha.

Poznámka 3.2.5
Vety 4, 5, 6 ostávajú v platnosti aj pre dvojný integrál na množine.

Veta 3.8 (3.5')
Nech $f(x,y), g(x,y)$ sú integrovateľné na $\mathbb{A}$. Nech $f(x,y) \leq g(x,y)$ na $\mathbb{A}$. Potom

$$\iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \iint\limits_A g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Veta 3.9
Nech $\mathbb{C} = \mathbb{A} \cup \mathbb{B}$, pričom $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \emptyset$.
Nech f je integrovateľná na $\mathbb{A}$ aj na $\mathbb{B}$. Potom f je integrovateľná na $\mathbb{C}$ a platí:

$$\iint\limits_C f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint\limits_B f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Poznámka 3.2.6
Veta 8 ostáva v platnosti, aj keď $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} \neq \emptyset$, treba ale doplniť predpoklad:

$$P(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) = 0$$

(t.j. $\iint\limits_{A \cap B} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$).

[1] V literatúre sa častejšie používa χ na označenie charakteristickej funkcie, ale typografické dôvody nás nútia použiť iný symbol.

Poznámka 3.2.7
Zaveďme označenie:
Nech $\mathbb{A} \subset \mathbb{E}_2$.
Pre ľubovoľné $x \in \mathbb{R}$ definujme množinu

$$A(x) = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in \mathbb{A}\}$$

Množina $A(x)$ je spravidla interval, resp. zjednotenie viacerých intervalov. Pre $y \in \mathbb{R}$ definujme

$$A(y) = \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in \mathbb{A}\}$$

Veta 3.10 (výpočet dvojného integrálu)
Nech $f(x, y)$ je integrovateľná na $\mathbb{A} \subset I = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$.
Nech pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ existuje $\iint\limits_{A(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y = 0$.

Potom

$$\iint\limits_{A} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{A(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

Dôsledok 3.2.8
Ak množina $\mathbb{A}$ je elementárna oblasť typu (x, y), t.j.

$$\mathbb{A} = \{(x, y) : x \in \langle a, b\rangle, \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$$

tak

$$\iint\limits_{A} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

Poznámka 3.2.9
analogicky možno sformulovať:

$$\iint\limits_{A} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{A(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

Poznámka 3.2.10
V špeciálnom prípade:
Ak $\mathbb{A}$ je elementárna oblasť typu (y, x):

$$\mathbb{A} = \{(x, y) : \alpha(y) \le x \le \beta(y), c \le d\}$$

potom

$$A(x) = \langle \alpha(y), \beta(y)\rangle$$

3.3 Substitúcia v dvojnom integráli

Uvažujme transformáciu (substitúciu):

$$x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), \qquad (u, v) \in \mathbb{A} \qquad (1)$$

Nech $\mathbb{B} = \{(x, y) : x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v); (u, v) \in \mathbb{A}\}$.
Výraz (1) teda transformuje $\mathbb{A} \to \mathbb{B}$.
Nech (1) má vlastnosti:
(2) ak $T_1 \ne T_2 \Rightarrow (\varphi(T_1), \psi(T_2)) \ne (\varphi(T_2), \psi(T_2))$.
(3) $D_{\varphi,\psi}(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} \ne 0$ na $\mathbb{A}$

Veta 3.11
Nech substitúcia (1) spĺňa (2), (3).
Nech $\mathbb{A}$ je uzavretá a merateľná.
Nech $f(x, y)$ je spojitá na $\mathbb{B}$.
Potom

$$\iint\limits_{B} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{A} f(\varphi(u, v), \psi(u, v))\;.\;|D_{\varphi,\psi}|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

3.4 Polárne súradnice

Bod roviny možno v polárnych súradniciach vyjadriť nasledovne:

$$\begin{array}{rclll} x & = & \rho\cos\alpha & 0 \le \alpha < 2\pi \quad \text{resp.} & -\pi < \alpha < \pi \\ y & = & \rho\sin\alpha & 0 \le \rho < \infty & 0 < \rho < \infty \\ \hline \multicolumn{3}{c}{x^2 + y^2 = \rho^2} & & \end{array}$$

Potom determinant vo vete o substitúcii má tvar:

$$D = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\rho\sin\alpha \\ \sin\alpha & -\rho\cos\alpha \end{vmatrix}$$