Kľúče k matematickej analýze II.

PRÍRODOVEDECKÁ FAKULTA UPJŠ KOŠICE

Predmety: KMA/MA1c/99, KMA/MA1b/01 **Prednáša:** RNDr. Štefan Kulcsár, CSc.
Obsah: Definície, vety, lemy a poznámky k predmetu
ZTEXoval: Róbert Novotný, r.novotny@szm.sk **Vydané:** 14. 3. 2002.

Diferenciálny počet

DEF (derivácia funkcie)
Nech f je definovaná na $\mathcal{U}(\mathrm{a})$, $a \in \mathbb{R}$. Funkcia má v bode a vlastnú deriváciu rovnú číslu $A \in \mathbb{R}$, keď existuje limita

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = A$$

V (vzťah medzi spojitosťou a deriváciou funkcie)
Ak f má v bode a vlastnú deriváciu, tak f je spojitá v bode a.

V (o derivácii súčtu, súčinu, podielu 2 funkcií)
Nech f, g majú v $a \in \mathbb{R}$ vlastnú deriváciu. Potom aj $f + g$, $f \cdot g$, f/g majú vlastnú deriváciu a platí:

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$
$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$$
$$(f/g)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}$$

(analogicky pre jednostranné derivácie).

V Ak f má v bode a vlastnú deriváciu a nech $c \in \mathbb{R}$. Potom $c \cdot f$ má v a vlastnú deriváciu:

$$(c \cdot f)'(a) = c \cdot f'(a)$$

V Nech f_k, $k = 1, 2, \dots, n$ má vlastnú deriváciu v $a \in \mathbb{R}$, a nech $c_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Potom:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} c_k \cdot f_k \right)'(a) = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot (f_k)'(a)$$

V (derivácia zloženej funkcie)
Nech pre f, g existuje zložená funkcia $f \circ g$ definovaná na $\mathcal{U}(\mathrm{a})$, $a \in \mathbb{R}$. Nech f má v a vlastnú deriváciu $f'(a)$ a nech g má v $A = f(a)$ vlastnú deriváciu $\dot{g}$. Potom $g \circ f$ má vlastnú deriváciu v bode a a platí:

$$(g \circ f)'(a) = [g(f)]'(a) = \dot{g}(A) \cdot f'(a)$$

V (o derivácii inverznej funkcie)
Nech f je spojitá a rýdzomonotónna na $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Nech f má v $x_0 \in (a, b)$ vlastnú deriváciu $f'(x_0) \neq 0$.

Potom $\bar{f}$, pre ktorú platí $\bar{f}(y_0) = x_0$, má vlastnú deriváciu v x_0.
Pre túto deriváciu platí:

$$\bar{f}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \text{ resp. } \bar{f}(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

V (o derivácii funkcie určenej parametricky)
Nech f je určená parametricky funkciami φ_1, φ_2, kde φ_1 je prostá. Ak majú φ_1, φ_2 vlastnú deriváciu v t_0, pričom $\varphi_1'(t_0) \neq 0$, tak f má vlastnú deriváciu v x_0, kde $x_0 = \varphi_1(t)$ a platí:

$$f'(x_0) = \frac{\varphi_2(t_0)}{\varphi_1'(t_0)}$$

DEF
Nech f má deriváciu v γ-okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ a nech jej derivácia f' má deriváciu $(f')'(a) = A, A \in \mathbb{R}$. Potom A nazývame druhou deriváciu funkcie f v bode a.

$$\text{Značenie:} \quad f''(a) \quad \frac{d^2 f}{dx^2}$$

DEF
Nech f má na intervale I derivácie f', f'' $\ldots f^{(n-1)}$, $n \in \mathbb{N}$ a nech $f^{(n-1)}$ je diferencovateľná v bode $a \in I$. Potom jej deriváciu nazývame n-tá derivácia funkcie f v bode a.

$$\text{Značenie:} \quad f^{(n)}(a) \quad \frac{d^n f}{dx^n}$$

POZN
Ak f má v bode a n-tú deriváciu (vlastnú), tak existuje $\delta > 0$, že:

1. pre $0 \leq k \leq n-1$ sú $f^{(k)}$ definované na $\mathcal{U}$(a).
2. pre $0 \leq k < n-1$ sú $f^{(k)}$ spojité na $\mathcal{U}$(a).
3. ak $f^{(n)}$ je vlastná, tak $f^{(n-1)}$ je spojitá v a.

DEF
Funkciu, ktorá má v $a \in I$ n-tú deriváciu vlastnú, nazývame n-krát diferencovateľnou v bode a.
Ak je f n-krát diferencovateľná v každom bode intervalu I, tak f je n-krát diferencovateľná na intervale I.
Ak f má na intervale I deriváciu každého rádu ($\forall n \in \mathbb{N}\ \exists f^{(n)}(a)$ vlastná) tak f je nekonečne diferencovateľná na intervale I.

V
Nech $m, n \in \mathbb{N}$, nech f, g sú diferencovateľné na I do takého rádu, aby derivácie vystupujúce v tvrdení existovali. Potom:

1. $[f^{(n)}(x)]^{(m)} = f^{(n+m)}(x)$
2. $(f+g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)$
3. $c \cdot f^{(n)}(x) = c \cdot f^{(n)}(x)$

pre $x \in I$, keď pravé strany majú zmysel.

V (Leibnizov vzorec)
Nech f, g majú vlastné derivácie až n-tého rádu v $a \in \mathbb{R}$ vrátane n-tého rádu. Potom súčin funkcií $f \cdot g$ má vlastnú deriváciu n-tého rádu a platí:

$$(f \cdot g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) \cdot g^{(n-k)}(a)$$

POZN
Vo všeobecnosti pre nejaké $n \in \mathbb{N}$ pre deriváciu n-tého rádu funkcie f určenej parametricky platí:

$$x = \varphi_1(t)$$

$$y = f^{(n)}(x) = \frac{\frac{d \quad \frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

DEF (o, O)
Budeme písať:

f je "malé o gé v bode a"	$f = o(g),\ x \to a$	$\lim\limits_{x \to a} \frac{f}{g} = 0$
f je "veľké o gé v bode a"	$f = O(g),\ x \to a$	$\frac{f}{g}(x)$ je ohraničená na nejakom $\mathcal{U}$(a)
f je rovnakého rádu ako g	$f \sim g,\ x \to a$	$\lim\limits_{x \to a} \frac{f}{g} = A, A \in \mathbb{R} - \{0\}$, pričom f, g sú definované na $\mathcal{U}$(a)
f, g sú ekvivalentné (asymptoticky rovné)	$f \approx g,\ x \to a$	$\lim\limits_{x \to a} \frac{f}{g} = 1$

V
Nech $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0\ [+\infty, -\infty] = \lim\limits_{x \to a} g(x)$, pričom $f \approx \tilde{f}, g \approx \tilde{g}, x \to a$. Potom

$$\lim_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = \lim_{x \to a} \frac{\tilde{f}}{\tilde{g}}(x)$$

V
Nech $g \approx \tilde{g}, x \to a$. Potom

1. $\lim\limits_{x \to a} (f \cdot g)(x) = \lim\limits_{x \to a} (f \cdot \tilde{g})(x)$
2. $\lim\limits_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f}{\tilde{g}}(x)$

V Nech f má v bode a vlastnú deriváciu. Potom platí:

$$f(x) = f(a) + A(x - a) + o(x - a)$$

$$f(a + t) - f(a) = A \cdot t + o(t), t \to 0$$

$$f(a + t) - f(a) = A \cdot t + t \cdot \omega(t)$$

$\boxed{\text{DEF}}$ (rovnomerná spojitosť funkcie)
Hovoríme, že funkcia je rovnomerne spojitá na $I \subset \mathbb{R}$, ak platí:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in I : |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

$\boxed{\text{V}}$ (Cantorova o rovnomernej spojitosti)
Ak f je spojitá na uzavretom ohraničenom intervale, tak f je rovnomerne spojitá na tomto intervale.

$\boxed{\text{V}}$ (Fermat)
Nech f v $a \in \mathbb{R}$ má vlastnú/nevlastnú deriváciu. Potom platí:

1. keď $f'(a) > 0$, potom f je rastúca
2. keď má f v bode a lokálny extrém, potom f'(a)=0 (Fermat)

$\boxed{\text{V}}$ (Rolle)
Nech pre f na $\langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$ platí:

1. $f \in \mathfrak{C}(\langle a, b \rangle)$
2. $f \in \mathfrak{D}((a, b))$
3. $f(a) = f(b)$

Potom existuje aspoň 1 bod $\xi \in (a, b)$, že $f'(\xi) = 0$

$\boxed{\text{V}}$ (Lagrange, o strednej hodnote diferenciálneho počtu, o prírastku)
Nech pre f na $\langle a, b \rangle$ platí:

1. $f \in \mathfrak{C}(\langle a, b \rangle)$
2. $f \in \mathfrak{D}((a, b))$

Potom existuje aspoň 1 bod $\xi \in (a, b)$, že $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, resp., že platí:

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

$\boxed{\text{DÔSL}}$ (1)
Nech pre f na (a, b) platí:

1. f je diferencovateľná na $(a, b) \subseteq \mathbb{R}^*$
2. $\forall x \in (a, b) : f'(x) = 0.$

Potom f je konštatná na (a, b).

$\boxed{\text{DÔSL}}$ (2)
Nech $f, g \in \mathfrak{D}((a, b))$ a zároveň $f'(x) = g'(x)$ na (a, b). Potom:

$$\forall x \in (a, b) : f(x) = g(x) + c, c \text{ je konšt}, c \in \mathbb{R}$$

$\boxed{\text{DÔSL}}$ (3)
Nech f, g sú diferencovateľné pre $x \geq x_0$ a nech $f(x_0) = g(x_0)$. Ak $\forall x > x_0$ je $f'(x) > g'(x)$, tak $\forall x > x_0$ je $f(x) > g(x)$.

$\boxed{\text{L}}$
Nech f spĺňa všetky predpoklady Lagrangeovej vety na $\langle a,b\rangle \in \mathbb{R}$. Funkcia f je lineárna na $\langle a,b\rangle$ práve vtedy, ak
$$\forall x \in \langle a,b\rangle : f'(x) = k \ldots \text{konšt.}, k \in \mathbb{R}$$

$\boxed{\text{V}}$ (Cauchyho o strednej hodnote)
Nech f, g sú:

1. spojité,
2. diferencovateľné na (a,b),
3. $\forall x \in (a,b) : g'(x) > 0$.

Potom existuje aspoň 1 bod $\xi \in (a,b)$ taký, že platí:
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$\boxed{\text{V}}$ (L'Hôspital, ľahké pravidlo)
Nech $f = o(1), g = o(1)$, pre $x \to a, a \in \mathbb{R}$. Nech f, g sú definované na $\mathcal{U}^*(\text{a})$. Ďalej nech f, g majú vlastnú deriváciu na $\mathcal{U}^*(\text{a})$ a nech $\forall x \in \mathcal{U}^*(a) : g'(x) \neq 0$. Ak existuje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}^*$, tak existuje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ a tieto limity sa rovnajú.

$\boxed{\text{V}}$ (L'Hôspital, ťažké pravidlo)
Nech $a \in \mathbb{R}^*, f, g$ sú definované na $\mathcal{U}(\text{a})$ a spĺňajú nasledovné podmienky:
1.) $\lim\limits_{x\to a} |g(x)| = +\infty$
2.) f, g majú vlastné deriváciu na $\mathcal{U}(\text{a})$, pričom $\forall x \in \mathcal{U}(a) : g'(x) \neq 0$,
Ak existuje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}^*$, tak existuje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ a tieto limity sa rovnajú.

$\boxed{\text{V}}$ (nutná a postačujúca podmienka monotónnosti funkcie)
Nech $f \in \mathfrak{D}((a,b))$.
$$f \text{ je neklesajúca na } (a,b) \Leftrightarrow (\forall x \in (a,b) : f'(x) \geq 0)$$

$\boxed{\text{V}}$ (postačujúca podmienka rýdzomonotónnosti)
Nech $f \in \mathfrak{D}((a,b))$.
$$(\forall x \in (a,b) : f'(x) > 0) \Rightarrow f \text{ je rastúca na } (a,b)$$

$\boxed{\text{DEF}}$
Bod, v ktorom $f'(x_0) = 0$ sa nazýva stacionárny bod.

$\boxed{\text{V}}$ (o lokálnom extréme)
Nech f je spojitá v x_0 a je diferencovateľná na $\mathcal{U}(x_0)$. Nech $\forall x \in \mathcal{U}^*_-(x_0) : f'(x) \geq 0$ a $\forall x \in \mathcal{U}^*_+(x_0) : f'(x) \leq 0$
Potom má f v bode x_0 lokálne maximum.

$\boxed{\text{V}}$ (postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému)
Nech pre f platí:

1. $f'(x_0) = 0$

2. $f''(x_0) \neq 0; \quad x_0 \in D(f)$

Potom ak $f''(x_0) > 0$, potom f má v bode x_0 ostré lokálne minimum.

V

Nech f má v bode $x_0 \in \mathbb{R}$ prvých n derivácií.
Nech pre $n \geq 2$ platí:

1. $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$
2. $f^{(n)}(x_0) \neq 0$

Potom:

1. ak n je párne a $f^{(n)}(x_0) > 0$, potom f má v x_0 ostré lokálne minimum.
2. ak n je nepárne a $f^{(n)}(x_0) > 0$, potom f v x_0 rastie.

V (nutná a postačujúca podmienka konvexnosti)

Nech $f \in \mathfrak{D}((a,b))$.

$$f \text{ je konvexná na } \langle a,b\rangle \Leftrightarrow f \text{ je neklesajúca na } (a,b)$$

V

Nech $f \in \mathfrak{C}(\langle a,b\rangle)$ a nech je na (a,b) dvakrát diferencovateľná. Potom platí:

$$f \text{ je konvexná na } \langle a,b\rangle \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \text{ na } (a,b)$$

$$(\forall x \in (a,b) : f''(x) > 0) \Rightarrow f \text{ je rýdzokonvexná na } \langle a,b\rangle$$

DEF

Nech f je definovaná na $\mathcal{U}(x_0), x_0 \in \mathbb{R}$. Priamka daná rovnicou

$$y = f(x_0) + k \cdot (x - x_0)$$

je dotyčnicou ku grafu v bode x_0, ak platí:

$$f(x) - [f(x_0) + k \cdot (x - x_0)] = o(x - x_0), x \to x_0$$

DEF

Nech f má v x_0 vlastnú deriváciu.

1. nech $\exists \delta > 0 : \forall x \in \mathcal{U}^*(x_0) : f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Potom je f rýdzokonvexná v x_0.
2. keď v $\mathcal{U}^*_{\delta+}(x_0)$ platí jedna z nerovností v 1.) a v $\mathcal{U}^*_{\delta-}(x_0)$ platí opačná nerovnosť, potom x_0 je inflexným bodom funkcie f.

DEF

Nech na nejakom $\mathcal{U}^*_{\delta}(x_0)$ je funkcia definovaná a diferencovateľná. Ak na $\mathcal{U}^*_{\delta-}(x_0)$ je funkcia konvexná a na $\mathcal{U}^*_{\delta+}(x_0)$ je konkávna, potom x_0 je inflexným bodom.

V (postačujúca rýdzokonkávnosti, nutná inflexného bodu)

Nech f je dvakrát diferencovateľná v x_0.

$$f''(x_0) > 0 \Rightarrow f \text{ je rýdzokonkávna v } x_0$$

$$x_0 \text{ je inflexný bod} \Rightarrow f''(x_0) = 0$$

$\boxed{\text{V}}$ (postačujúca inflexného bodu)
Nech $f \in \mathfrak{C}(x_0)$ a je 2-krát diferencovateľná na $\mathcal{U}^*(x_0)$.
Ak $\forall x \in \mathcal{U}^*_{\delta-}(x_0) : f''(x) > 0$
a $\forall x \in \mathcal{U}^*_{\delta+}(x_0) : f''(x) < 0$
tak x_0 je inflexným bodom funkcie f.

$\boxed{\text{V}}$ (postačujúca inflexného bodu)
Nech $f \in \mathfrak{C}(x_0)$ a je 2-krát diferencovateľná na $\mathcal{U}^*(x_0)$, pričom $f''(x_0) = 0$ a $f'''(x_0) \neq 0$. Potom f má v x_0 inflexný bod.

$\boxed{\text{V}}$
Nech:

1. f je n-krát diferencovateľná v $x_0, n \in \mathbb{N}, n > 2$
2. $f''(x_0) = f'''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$
3. $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

Potom:

1. pre n nepárne je x_0 inflexným bodom
2. pre n párne nie je x_0 inflexným bodom a
   ak $f^{(n)}(x_0) > 0\,[< 0]$, potom f je rýdzokonvexná [rýdzokonkávna].

$\boxed{\text{DEF}}$
Nech f je definovaná na $(a, \infty), a \in \mathbb{R}$.
Funkcia $y = kx + q$ je asymptotou so smernicou ku grafu funkcie f pre $x \to +\infty$ $[-\infty]$, keď platí:

$$\lim_{x \to \substack{-\infty \\ +\infty}} (f(x) - (kx + q)) = 0$$

$\boxed{\text{V}}$ (o asymptote so smernicou)
Priamka $y = kx + q$ je ASS pre $x \to \infty$ práve vtedy, keď platí:
1.) $\lim\limits_{x \to \substack{-\infty \\ +\infty}} \frac{f(x)}{x} = k, k \in \mathbb{R}$
2.) $\lim\limits_{x \to \substack{-\infty \\ +\infty}} (f(x) - kx) = q, q \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{DEF}}$
Nech f je definovaná na (a, ∞), resp. na $(-\infty, b), a, b \in \mathbb{R}$ a platí

$$\lim_{x \to b-} f(x) = \pm\infty \qquad\qquad \lim_{x \to a+} f(x) = \pm\infty$$

Potom priamka $x = a$, resp. $x = b$ je asymptota bez smernice ku grafu funkcie f.

$\boxed{\text{V}}$ (Taylorova)
Nech f je v x_0 a nejakom $\mathcal{U}(x_0)$ $(n+1)$-krát diferencovateľná (vrátane). Ak $x \in \mathcal{U}^*(x_0)$, tak medzi bodmi x_0, x, resp. x, x_0 existuje taký bod ξ, že platí:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},\ \xi \in (x_0, x)$$

$\boxed{\text{POZN}}$

$$\text{zvyšok v Lagrangeovom tvare: } R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\ \xi \in (x_0, x)$$

$$\text{zvyšok v Cauchyho tvare: } R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \Theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$$\text{zvyšok v Cauchyho tvare: } R_{n+1}(x) = o((x-x_0)^n), x \to x_0$$

Teória určitého integrálu

$\boxed{\text{DEF}}$
Nech $f(x)$ je definovaná na $\langle a, b\rangle$, pričom $a = x_0, b = x_n$
$D = x_0, x_1, \ldots, x_n$ je delenie intervalu $\langle a, b\rangle$
$\nu(D) = \max\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ je norma delenia D intervalu $\langle a, b\rangle$

$\boxed{\text{L}}$ (1)
Nech f je ohraničená na $\langle a, b\rangle$ a nech $m = \inf\limits_{\langle a,b\rangle} f$, $M = \sup\limits_{\langle a,b\rangle} f$. Potom platí:

$$m(b-a) \leq s(f, D) \leq S(f, D) \leq M(b-a)$$

$\boxed{\text{L}}$ (2)
Nech f je ohraničená na $\langle a, b\rangle$ a $D' \prec D$, $(D', D \in \mathbb{D}(\langle a, b\rangle)$. $D \subset D'$ Potom platí:

$$s(f, D) \leq s(f, D') \qquad S(f, D') \leq S(f, D)$$

$\boxed{\text{L}}$ (3)
Nech f je ohraničená na $\langle a, b\rangle$ a D_1, D_2 sú ľubovoľné delenia z $\mathbb{D}(\langle a, b\rangle)$. Potom

$$s(f, D_1) \leq S(f, D_2)$$

$\boxed{\text{L}}$ (4 - nutná a postačujúca podmienka integrovateľnosti na $\langle a, b\rangle$)
Nech f je ohraničená na $\langle a, b\rangle$. Potom:

$$f \in \mathfrak{R}(\langle a, b\rangle) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists D_\varepsilon \in \mathbb{D}(\langle a, b\rangle) : S(f, D_\varepsilon) - s(f, D_\varepsilon) < \varepsilon$$

$\boxed{\text{V}}$ (nutná a postačujúca podmienka pre existenciu $\int$)
Ak f je spojitá na $\langle a, b\rangle$, potom f je riemannovsky integrovateľná na $\langle a, b\rangle$.

$$f \in \mathfrak{C}(\langle a, b\rangle) \Rightarrow f \in \mathfrak{R}(\langle a, b\rangle)$$

$\boxed{\text{DEF}}$

$$\Omega(f, D) = S(f, D) - s(f, D) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\delta x$$

$\boxed{\text{DEF}}$
Oscilácia funkcie f na $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ je číslo

$$\omega_i = \sup |f(x') - f(x'')| = M_i - m_i$$

$\boxed{\text{V}}$
Nech F je ohraničená na $\langle a, b\rangle$. Ak f je monotónna na $\langle a, b\rangle$, tak f je integrovateľná na $\langle a, b\rangle$.

$\boxed{\text{DEF}}$
Postupnosť delení D_n nazývame normálnou, keď

$$\lim_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$$

DEF
σ_n je prípustná postupnosť Riemannových integrálnych súčtov prislúchajúca deleniu D_n a výberu ξ z intervalov $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$.

DEF
Nech f je ohraničená na $\langle a, b\rangle$. Hovoríme, že postupnosť integrálnych súčtov $\sigma(f, D, \xi)$ má limitu $I \in \mathbb{R}$ podľa normy delenia a píšeme

$$\lim_{\nu(D)\to 0} \sigma(f, D, \xi) = I$$

práve vtedy, keď

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall D_\varepsilon \in \mathbb{D}(\langle a, b\rangle) : \nu(D) < \delta$$

a pre každý výber ξ v D platí:

$$\sigma(f, D, \xi) < \varepsilon$$

V (nutná integrovateľnosti)
Ak f je integrovateľná na $\langle a, b\rangle$, tak f je ohraničená na $\langle a, b\rangle$.

V
Nech $f, g \in \mathfrak{R}(\langle a, b\rangle)$, nech $\alpha \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$. Potom aj $f + g, f \cdot g, \alpha \cdot f, |f|^\gamma, \frac{1}{f}$ sú na $\langle a, b\rangle$ integrovateľné a definované.

V (linearita určitého integrálu)
Nech $f, g \in \mathfrak{R}(\langle a, b\rangle)$. Potom aj $f + g$, $\alpha \cdot f \in \mathfrak{R}(\langle a, b\rangle)$ a platí:

$$\int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$$

V
Nech $f, g \in \mathfrak{R}(\langle a, b\rangle)$. Potom aj $f \cdot g \in \mathfrak{R}(\langle a, b\rangle)$.

V
Nech $f \in \mathfrak{R}(\langle a, b\rangle)$. Potom aj $|f| \in \mathfrak{R}(\langle a, b\rangle)$.

V
Ak $f \in \mathfrak{R}(\langle a, b\rangle)$, aj $|f| \in \mathfrak{R}(\langle a, b\rangle)$ a platí:

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

V (o monotónnosti)
1.) nech $f \in \mathfrak{R}(\langle a, b\rangle)$.

$$\forall x \in \langle a, b\rangle : f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

2.) nech $f, g \in \mathfrak{R}(\langle a, b\rangle)$.

$$\forall x \in \langle a, b\rangle : f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

$\boxed{\text{V}}$ (aditívnosť)
Nech $f \in \Re(\langle a, c\rangle)$ a zároveň $f \in \Re(\langle c, b\rangle)$. Potom $f \in \Re(\langle a, b\rangle)$ a platí:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$\boxed{\text{V}}$ (integrál na podintervaloch)
Nech $f \in \Re(\langle a, b\rangle)$. Potom:

$$\forall\langle \alpha, \beta\rangle \subset \langle a, b\rangle : f \in \Re(\langle \alpha, \beta\rangle)$$

$\boxed{\text{V}}$ (o nezávislosti konečného počtu bodov)
(Integrál funkcie sa nezmení, ak zmeníme hodnoty funkcie v konečnom počte bodov.)
Nech $f \in \Re(\langle a, b\rangle)$ a $\forall x \in \langle a, b\rangle - \{x_0, \ldots, x_k\} : f(x) = g(x)$. Potom aj $g \in \Re(\langle a, b\rangle)$ a

$$\forall\langle \alpha, \beta\rangle \subset \langle a, b\rangle : \int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta g(x)dx$$

$\boxed{\text{V}}$ (postačujúca integrovateľnosti)
Ohraničená funkcia, ktorá je až na konečný počet bodov spojitá, je integrovateľná.

$\boxed{\text{DEF}}$ (integrál ako funkcia hornej hranice)
Nech $f \in \Re(\langle a, b\rangle)$. Nech $c \in \langle a, b\rangle$ je pevný bod. Potom

$$\forall x \in \langle a, b\rangle : F_c(x) = \int_c^x f(t)dt$$

$\boxed{\text{V}}$ (fundamentálna veta integrálneho počtu)
Nech $f \in \Re(\langle \alpha, \beta\rangle \subset I)$. Nech c je pevný bod z I. Potom $F_c(x) = \int_c^x f(t)dt$ je:

1. spojitá na I
   $F_c(0) = 0$
2. ak je f spojitá v $x_0 \in I$, potom $F_c'(x_0) = f(x_0)$
3. $F_{c_1}(x) - F_{c_2}(x) = \text{konšt} = \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx, \forall c_1, c_2 \in I$

$\boxed{\text{V}}$ (metóda *per partes* pre určité integrály)
Nech f, f', g, g' sú spojité na $\langle a, b\rangle$. Potom

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_b^a - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

$\boxed{\text{V}}$ Nech φ má na $\langle a, b\rangle$ spojitú deriváciu a nech f je spojitá na $\varphi(\langle \alpha, \beta\rangle)$. Potom

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)).\varphi'(t)dt$$

$\boxed{\text{V}}$ (1. veta o strednej hodnote)
Nech $f \in \Re(\langle a, b\rangle)$, nech $m = \inf\limits_{\langle a, b\rangle} f, M = \sup\limits_{\langle a, b\rangle} f$. Potom

$$\exists\, c \in \langle m, M\rangle : \int_a^b f(x)dx = c(b - a)$$

Ak $f \in \mathfrak{C}(\langle a,b\rangle)$, tak

$$\exists\, \xi \in (a,b) : \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

$\boxed{\mathsf{V}}$ (zovšeobecnená 1.V)
Nech $f,g \in \mathfrak{R}(\langle a,b\rangle)$, nech $\forall x \in \langle a,b\rangle : g(x) \leq 0 [g(x) \geq 0]$. Potom

$$\exists\, c \in \langle m,M\rangle : \int_a^b f(x)g(x)dx = c\int_a^b g(x)dx$$

Ak $f \in \mathfrak{C}(\langle a,b\rangle)$, potom

$$\exists\, \xi \in \langle a,b\rangle : \int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b f(x)dx$$

$\boxed{\mathsf{V}}$ (2. o strednej hodnote)
Nech $f,g \in \mathfrak{R}(\langle a,b\rangle)$. Nech g je monotónna na $\langle a,b\rangle$. Potom

$$\exists\, \xi \in (a,b) : \int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx$$