Suble(t, x, φ) je primitívne rekurzívny predikát

Róbert Novotný, Michal Mati

Abstrakt

Cieľom článku je ukázať, že predikát substituovateľnosti premennej v predikátovom počte je primitívne rekurzívny. Konštrukcia spočíva v jednoznačnom zobrazení „podpredikátov“ na prirodzené čísla funkciami, ktoré zachovávajú primitívnu rekurziu.

Motto

„Keď hvezdár takúto planétu objaví, dá jej miesto mena číslo.”
— *Exupéry: Malý princ*

V jazyku predikátového počtu máme atribúty (metadáta), premenné (ozn. Var), konštanty $\mathcal{C}$, funkčné symboly $\mathcal{F}$, predikátové symboly $\mathcal{P}$. Pri očíslovávaní budeme využívať párujúcu funkciu

$$\pi(x, y) = \frac{1}{2}(x + y)(x + y + 1) + y$$

Čiastkové funkcie λ, ρ sú definované nasledovne:

$$\forall x \in \mathbb{N} : \pi(\lambda(x), \rho(x)) = x$$

Táto funkcia zachováva primitívnu rekurziu (pozri napr. [1]). Budeme ďalej predpokladať, že sčítanie, násobenie a používanie logických spojok zachováva primitívnu rekurziu (príslušné overenia možno nájsť opäť v [1]).

Nech $\bigcup \mathcal{A} = \{A_0, \ldots, A_n, \ldots\}$ je množina atribútov, $\bigcup \mathrm{Var} = \{v_0, \ldots, v_n, \ldots\}$ je množina premenných, $\bigcup \mathcal{C} = \{c_0, \ldots, c_n, \ldots\}$ je množina konštánt, atď.

Očíslovanie zavedieme nasledovne:

$$\begin{array}{lcl} A_i & \to & \pi(0, i) \\ c_i & \to & \pi(1, i, j), \text{ kde } A_{\rho(j)} \in \mathcal{A} \\ v_i & \to & \pi(2, i, j), \text{ kde } A_{\rho(j)} \in \mathcal{A} \\ f_i & \to & \pi(3, i, p_0^{j_0} \cdot p_1^{j_i} \cdot \ldots \cdot p_{n-1}^{j_{n-1}} \cdot p_n^{j_n}) \end{array}$$

V poslednom riadku je $\mathrm{typ}(f_i) = \langle A_0, \ldots, A_{n-1}; A_n \rangle$ a $j_0, \ldots, j_n$ sú zodpovedajúce čísla typov. Ešte potrebujeme zaviesť očíslovanie predikátových symbolov:

$$p_i \quad \to \quad \pi(4, i, \prod_{i=0}^{n-1} p_i^{j_i}), \text{ kde } \mathrm{typ}(p_i) = \langle A_0, \ldots, A_n \rangle$$

Teraz zavedieme predikáty:

- x je číslo atribútu: $\check{\mathrm{C}}\mathrm{A}(x) \equiv \lambda(x) = 0$
- x je číslo premennej: $\check{\mathrm{C}}\mathrm{P}(x) \equiv \lambda(x) = 1$

analogicky definujeme predikáty pre číslo konštantný, funkčného symbolu a predikátového symbolu.

Definíciu párujúcej funkcie môžeme veľmi jednoducho rozšíriť na viac premenných. Potom budeme pre jednoduchosť označovať

$$\pi(x_1, \ldots, x_n) = [x_1, \ldots, x_n]$$

Ďalej označíme

$$\langle\!\langle x_1, \ldots, x_n \rangle\!\rangle = \prod_{i=1}^{n} p_i^{x_i}$$

Prejdime ku kódovaniu stromov. Vrcholy zakódujeme ako $[10, o]$, kde o je príslušné Gödelovo číslo ohodnotenia vrcholu syntaktického stromu formuly. Hranu (a, b), kde a a b sú poradové čísla vrcholov budeme zase reprezentovať ako

$$[11, \langle\!\langle a, b \rangle\!\rangle].$$

Pozorný čitateľ si iste všimol, že potrebujeme ešte zadefinovať funkciu, ktorá nám vrcholy stromu usporiada (napríklad lexikograficky). Nech je to bijekcia $\xi : V \to \{1, \ldots, \ell\}$, kde V je vrcholová množina stromu.

Týmto sme si nadefinovali stavebné kamene našich stromov. Strom vyzerá nasledovne: utvoríme postupnosť vrcholov, ktorú zreťazíme s postupnosťou hrán. Ďalej potrebujeme usporiadať hrany, to urobíme jednoduchou konštrukciou zobrazenia $\zeta : E \to \{1, \ldots, m\}$, kde E je množina hrán.

$$\begin{gathered}\langle\!\langle [10, \Upsilon(\xi^{-1}(1))], [10, \Upsilon(\xi^{-1}(2))], \ldots, [10, \Upsilon(\xi^{-1}(\ell))], \\ [11, \tilde{\pi}(\zeta^{-1}(1))], [11, \tilde{\pi}(\zeta^{-1}(2))], \ldots, [11, \tilde{\pi}(\zeta^{-1}(m))] \rangle\!\rangle\end{gathered}$$

kde Υ je zobrazenie z množiny vrcholov V do zjednotenia čísel konštánt, termov, predikátových a funkčných symbolov. V uvedenom výraze sme použili ďalšie zobrazenie $\tilde{\pi}$. Toto zobrazenie je však jednoduchým rozšírením párujúcej funkcie na usporiadané dvojice, presnejšie:

$$\tilde{\pi}(\langle a, b \rangle) = [a, b]$$

Po definovaní očíslovaní stromu prejdeme k zavedeniu príslušných predikátov. Číslo vrcholu

$$\check{\mathrm{C}}\textsc{Vrch}(x) \quad \equiv \quad (\lambda(x) = 10) \wedge (\check{\mathrm{C}}\mathrm{C}(x) \vee \check{\mathrm{C}}\mathrm{A}(x) \vee \check{\mathrm{C}}\mathrm{P}(x) \vee \check{\mathrm{C}}\mathrm{F}(x))$$

Číslo hrany ČHRAN(x) možno zostrojiť analogicky. Ak máme definované tieto dva predikáty, môžeme pristúpiť k najdôležitejšiemu predikátu ČSTROM. Ten však nebudeme konštruovať do detailov, pretože by bolo potrebné vyriešiť mnoho technických záležitostí (napr. či zadaný strom neobsahuje kružnice). Zvedavý čitateľ si tento predikát iste skonštruuje sám.

Od cieľa nás delia už len dva čiastkové predikáty – to, že vrchol x sa v strome nachádza nad vrcholom y VRCHOLJENAD(x, y) (v zmysle syntaktickej evaluácie). Čitateľa navnadíme na jeho konštrukciu: musí (rekurzívne) overiť všetky vrcholy nad vrcholom y, čo zistíme prechádzaním stromu (či už do šírky alebo hĺbky). A konečne, predikát hovoriaci, že „x má voľný výskyt vo formule φ“ vyriešime takto: stačí sa pozrieť na vrcholy nad vrcholom s ohodnotením x a zistiť, či nie sú kvantifikované.

Tu nastáva moment, keď sa dostávame k finálnemu výsledku. Povieme, že term t je substituovateľný za premennú x vo formule φ, ak pre každé vrcholy u, v také, že u má voľný výskyt vo v také, že ohodnotením u je premenná x a v je v strome nad u a vrchol v má ohodnotenie $\forall y$ platí, že y nepatrí do množiny premenných termu t. Priamym overením podľa uvedenej definície a podľa vyššie uvedených predikátov dostávame želaný výsledok.

Literatúra

[1] Lev Bukovský, Teória algoritmov, skriptum PF UPJŠ, 1999

[2] Antoine de Saint Exupèry, Malý princ, Mladé letá, 1985