Lineárna a celočíselná optimalizácia

Celočíselné programovanie – vlastnosti úlohy CLP

Úloha celočíselného lineárneho programovania

$$c^T x \to \min$$

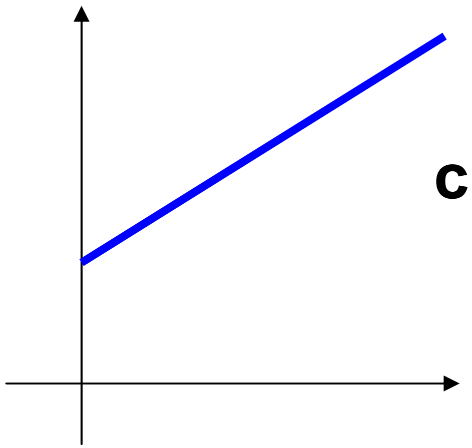
$$A\,x = b$$

$$x \geq 0, \text{ celé}$$

Ak nie všetky premenné musia byť celočíselné – zmiešaná úloha

Vyjadrenie nelinearít

- sadzba za spotrebu energie: pevný poplatok + lineárna cena



$$c(x) = \begin{cases} ax+b & \text{ak } x>0 \\ 0 & \text{ak } x=0 \end{cases}$$

Zavedieme binárnu premennú δ

Pridáme ohraničenia:

$0 \leq \delta \leq 1$, $\delta \leq x / U$, kde U je najmenšia jednotka spotreby

$$\boxed{c(x,\delta) = ax + b\delta}$$

Vyjadrenie alternatívy a implikácie

- alternatíva $x \geq a$ alebo $y \geq b$

kde a,b sú dané konštanty a $x \geq 0$

- zavedieme binárnu premennú δ a nerovnosti

$$x \geq \delta a$$

$$y \geq (1-\delta) b$$

- implikácia ak $x > a$ tak $y \geq b$
- implikácia je ekvivalentná s alternatívou

$$x \leq a \text{ alebo } y \geq b$$

Vyjadrenie diskrétnej premennej

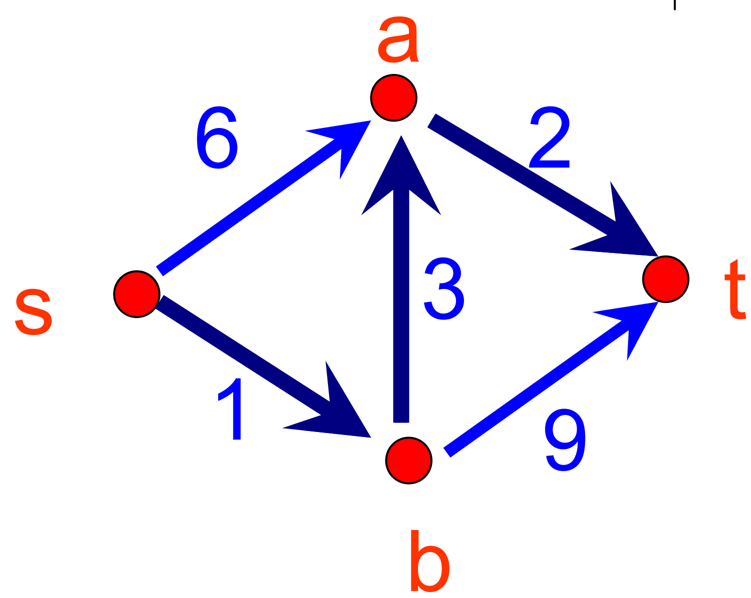
- premenná x nadobúda iba niektorú z daných hodnôt $s_1, s_2, \ldots, s_m$
- zavedieme m binárnych premených $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$, t.j. $0 \leq \delta_j \leq 1$, δ_j celé

$$x = s_1 \delta_1 + s_2 \delta_2 + \ldots + s_m \delta_m$$

$$\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_m = 1$$

Úlohy na grafoch – problém najkratšej cesty

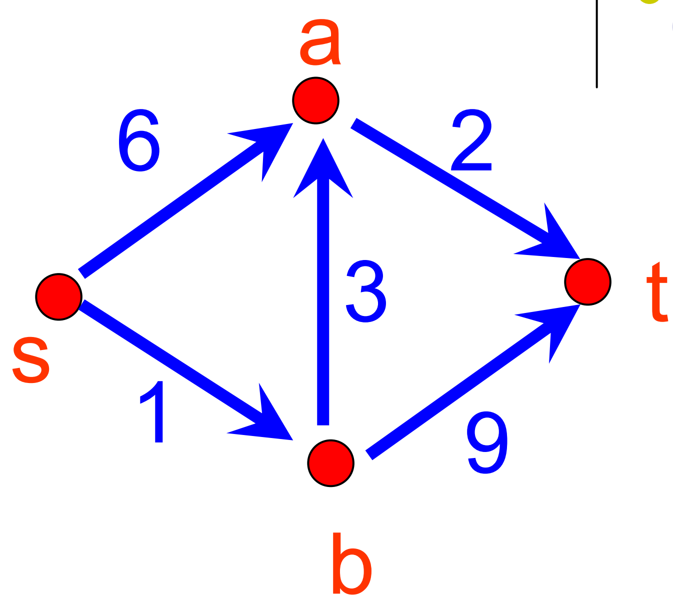
- daný digraf $G=(V,H)$
- dva vrcholy s,t
- váhy (dĺžky) hrán c_j
- nájdite najkratšiu cestu z vrchola s do vrchola t



Najkratšia cesta je s-b-a-t dĺžky 6

Problém najkratšej cesty – incidenčná matica

- vrcholovo-hranová incidenčná matica
- riadky = vrcholy
- stĺpce = hrany
- ak hrana $e_j=(v_i,v_k)$, tak $a_{ij}=1$ $a_{kj}= -1$



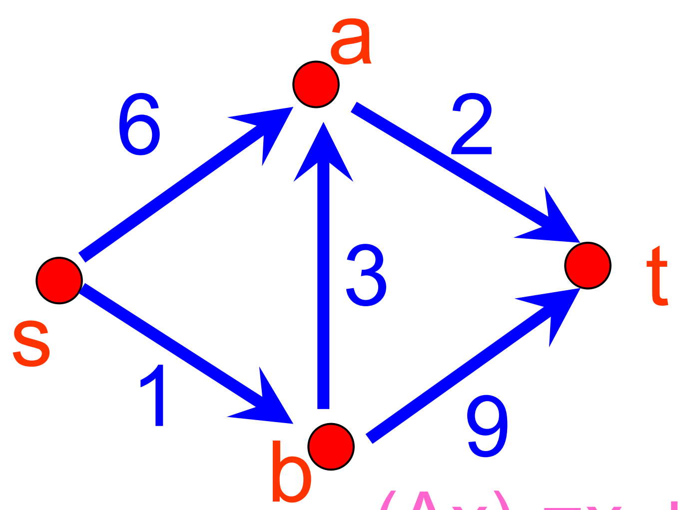
$$A=\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{rrrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) & \begin{array}{c} s \\ a \\ b \\ t \end{array} \end{array}$$

Problém najkratšej cesty ako úloha CLP

- premenné x_j

=1 ak hrana j leží na najkratšej ceste

=0 inak



$(Ax)_s = x_1 + x_2 = 1$

$(Ax)_b = -x_2 + x_3 + x_5 = 0$

ohraničenia: $Ax = (1,0,0,\ldots,-1)^T$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} s \\ a \\ b \\ t \end{array}$$

Problém najkratšej cesty – formulácia úlohy CLP

- Úloha CLP:

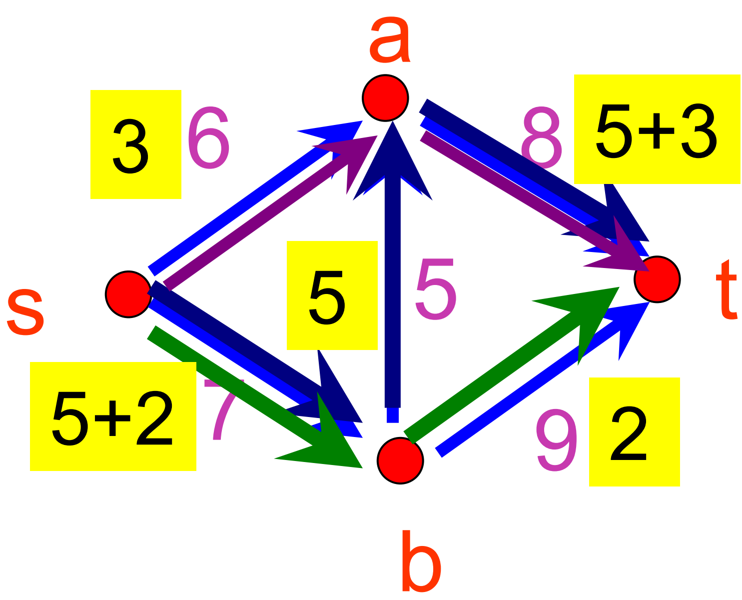
$$c^T x \to \min$$
$$Ax = (1,0,0,\ldots,-1)^T$$
$$x_j \geq 0,\ \text{celé}$$

Pozor: incidenčná matica digrafu má v každom stĺpci
• presne jeden prvok +1
• presne jeden prvok -1

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Úlohy na grafoch – problém maximálneho toku

- daná sieť G=(V,H)
- dva vrcholy s,t
- kapacity hrán b_j
- nájdite maximálny tok z vrchola s do vrchola t



Tok sa sčíta po cestách:

s-b-a-t: tok veľkosti 5

s-b-t: tok veľkosti 2

s-a-t: tok veľkosti 3

Veľkosť toku= súčet tokov po hranách idúcich z s

U nás: veľkosť toku = 10

Je to maximálny tok?

Problém maximálneho toku ako úloha CLP

premenné x_j=veľkosť toku po hrane j

Úloha CLP:

$$v \to max$$

$$Ax=(v,0,0,...,-v)^T$$

$$x_j \leq b$$

$$x_j \geq 0$$

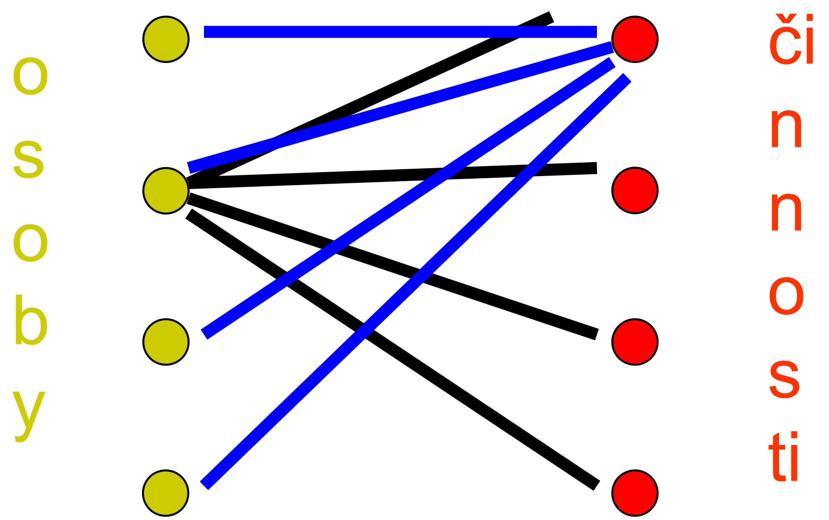
Interpretácia ohraničení:

- čo pritečie do vrchola, to z neho aj vytečie
- z vrchola s vytečie v, do vrchola t pritečie v

Priraďovací problém - zadanie

- n osôb, n činností
- c_{ij}=výkon osoby i v činnosti j
- priradiť osoby na činnosti tak, aby sa maximalizoval celkový výkon a každú činnosť vykonával práve jeden človek

Reprezentácia: bipartitný graf



Priraďovací problém – formulácia LP

- zavedieme premenné:

x_{ij} = 1 ak osoba i robí činnosť j

= 0 inak

Incidenčná matica bipartitného grafu:

• riadky = osoby a činnosti

• stĺpce = dvojice osoba-činnosť

Úloha CLP:

$c^T x \to \max$

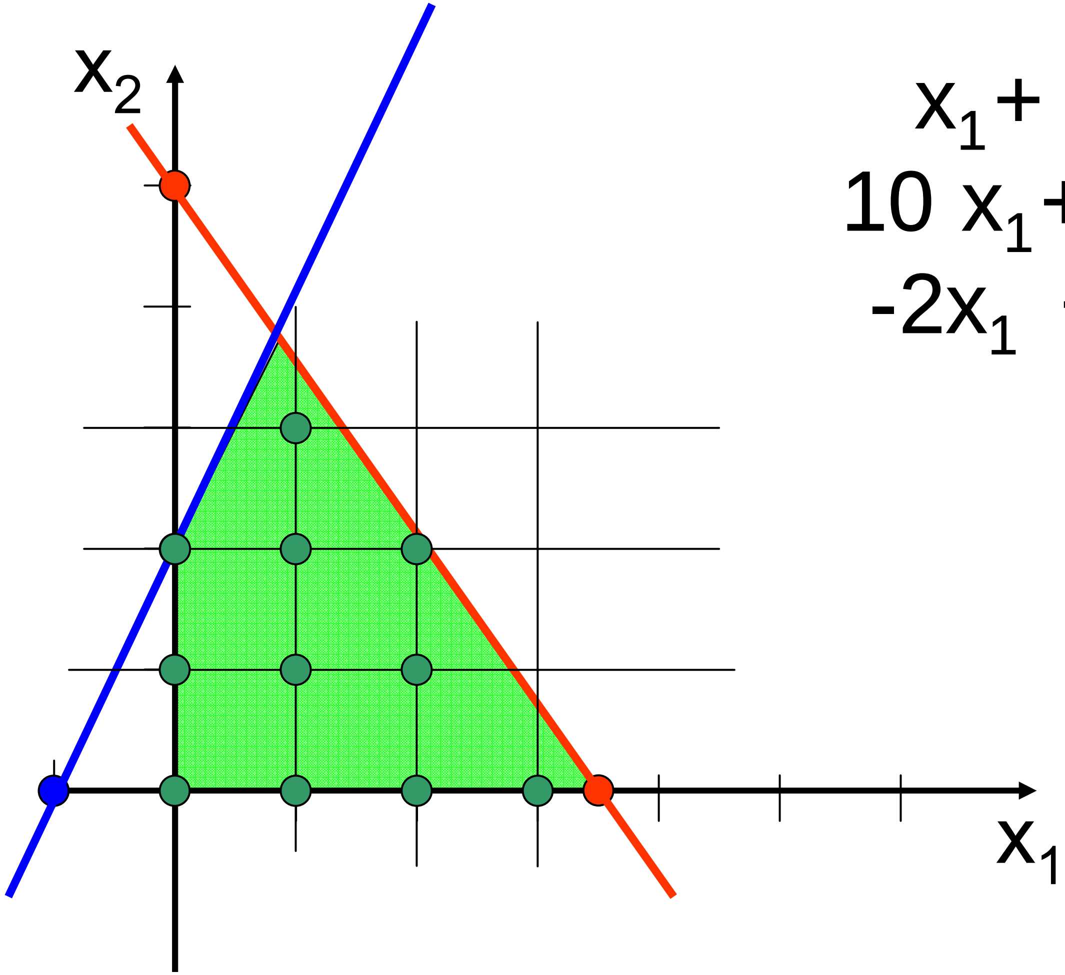
$Ax = (1,...,1)^T$

$x_{ij} \geq 0$, celé

Pozor: incidenčná matica grafu má v každom stĺpci

• presne dva prvky +1

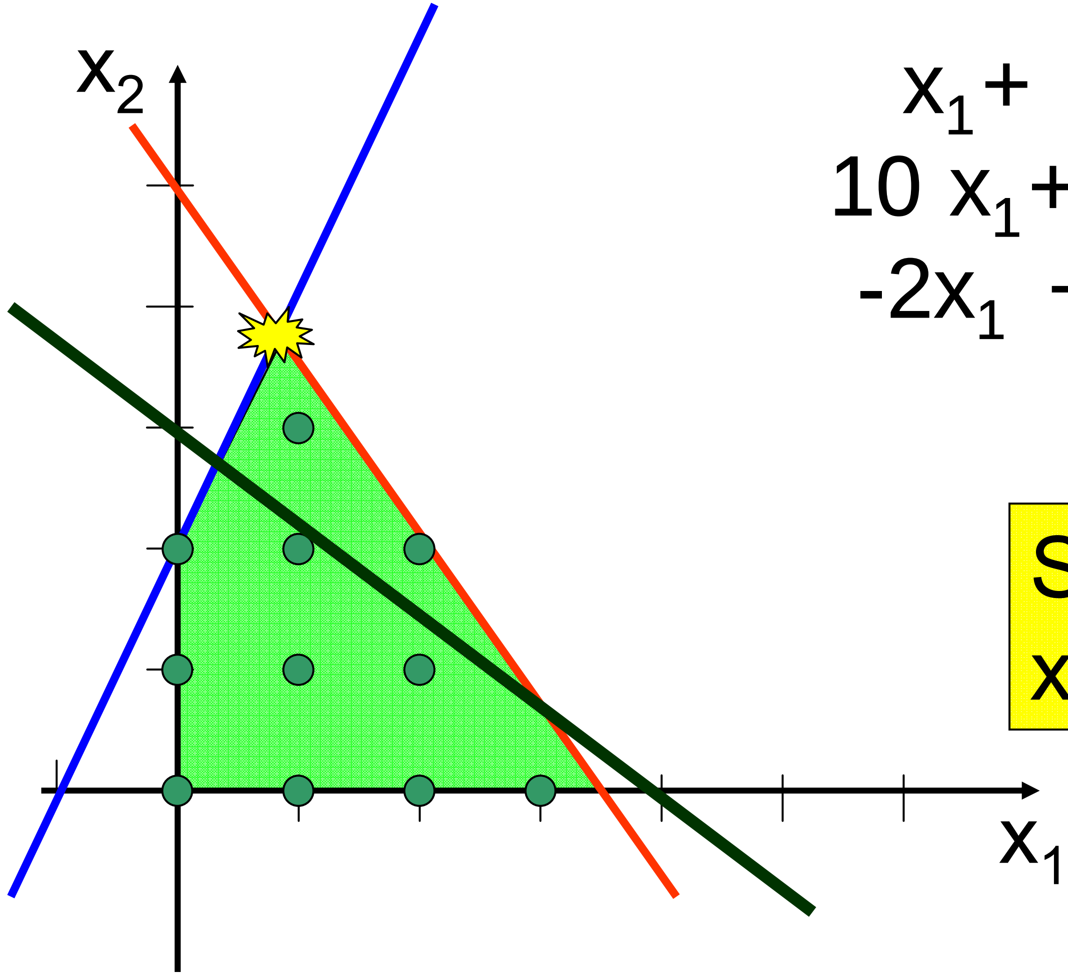
Úloha CLP – grafické riešenie



$$x_1 + x_2 \to \max$$
$$10x_1 + 7x_2 \le 35$$
$$-2x_1 + x_2 \le 2$$
$$x_1, x_2 \ge 0, \text{ celé}$$

Podmienka celočíselnosti: prípustné sú len mrežové body

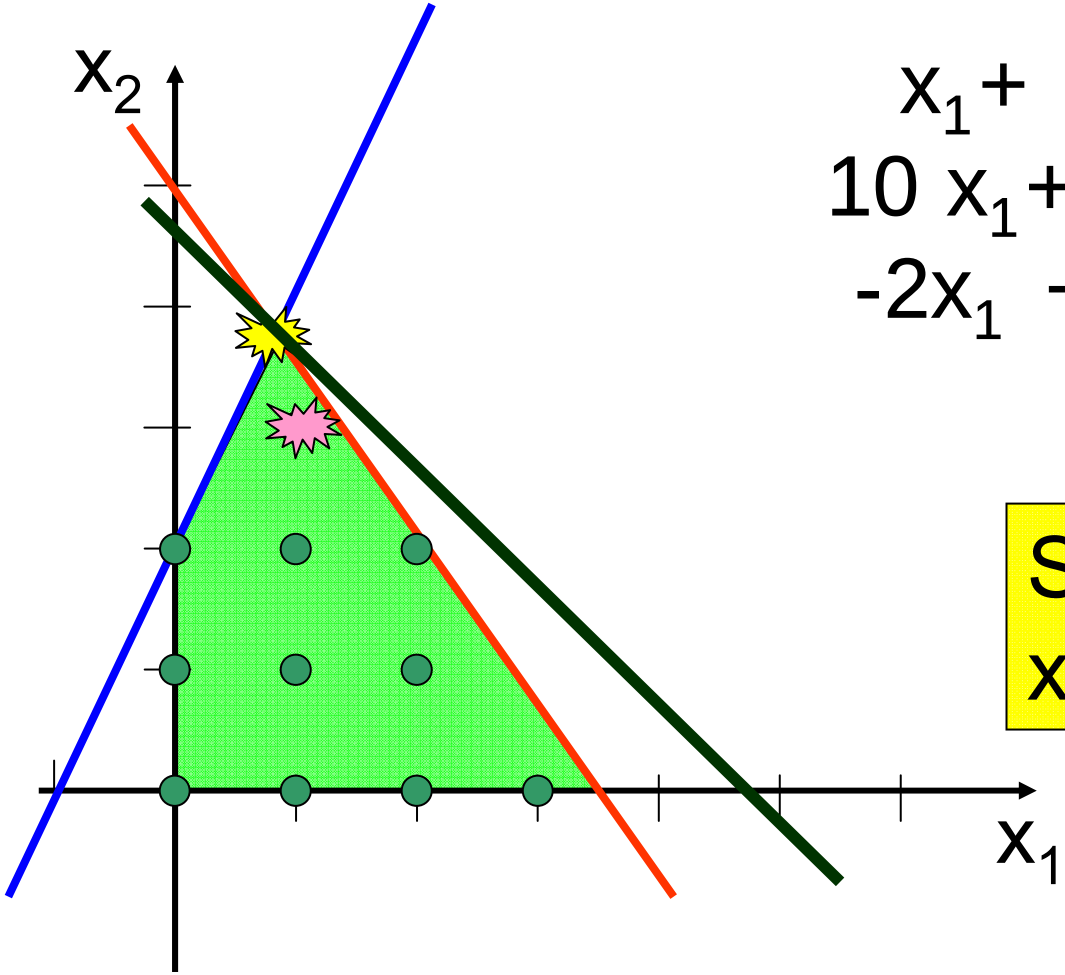
Úloha CLP – grafické riešenie



$$x_1 + \quad x_2 \to \max$$
$$10\,x_1 + 7x_2 \leq 35$$
$$-2x_1 \;+\; x_2 \leq 2$$
$$x_1, x_2 \geq 0, \text{ celé}$$

Spojité optimum:
$x^*_L = (15/4, 7/8)$

Úloha CLP – grafické riešenie



$$x_1 + x_2 \rightarrow \max$$
$$10x_1 + 7x_2 \leq 35$$
$$-2x_1 + x_2 \leq 2$$
$$x_1, x_2 \geq 0, \text{ celé}$$

Spojité optimum: $x^*_L = (15/4, 7/8)$

Celočíselné optimum: $x^*_L = (1,4)$

Úloha celočíselného lineárneho programovania

$c^T x \to \min$

$A\,x = b$

$x \geq 0$, celé

(C)

Ak vynecháme podmienku celočíselnosti: úloha LP

$c^T x \to \min$

$A\,x = b$

$x \geq 0$

(L)

relaxácia úlohy CLP

Prípustná množina: F_C, F_L

Množina optimálnych riešení: F^*_C, F^*_L

Optimálna hodnota účelovej funkcie: f^*_C, f^*_L

Aký je vzťah úlohy CLP a jej relaxácie ?

Vzťah úlohy CLP a jej relaxácie

Veta. $F_C \subseteq F_L$.

- Pozor! Vo všeobecnosti neplatí $F^*_C \subseteq F^*_L$.
- Ak $F^*_L \neq \emptyset$, musí byť aj $F^*_C \neq \emptyset$?
- Ak $F^*_L \neq \emptyset$ a pritom $F_C \neq \emptyset$, musí byť aj $F^*_C \neq \emptyset$?

Urobte si tabuľku:

Riadky: CLP neprípustná, neohraničená, optimálna

Stĺpce: LP neprípustná, neohraničená, optimálna

Vzťah úloh (C) a (L) 1.

Veta. Ak optimálne riešenie relaxácie (L) úlohy (C) je celočíselné, tak je to zároveň aj optimálne riešenie úlohy (C).

Dôkaz: Keďže $F_C \subseteq F_L$, je , $f^*_C \geq f^*_L$.

Ale ak $x^*_L \in F_C$, tak máme prípustné riešenie úlohy (C), ktoré spĺňa

$$f(x^*_L) \leq f(x) \text{ pre každé } x \in F_L \ ,$$

a teda aj $f(x^*_L) \leq f(x)$ pre každé $x \in F_C$,

preto je to optimum úlohy (C).

Vzťah úloh (C) a (L) 2.

Veta. Nech všetky prvky matice A a vektora b sú celočíselné. Ak (L) je neohraničená a $F_C \neq \emptyset$, tak aj (C) je neohraničená.

Lema: Ak (L) je neohraničená, tak existuje racionálny vektor u taký, že

- $c^T u < 0$
- $x + ku \in F_L$ pre všetky $k>0$.

Dôkaz vety: nech P je súčin menovateľov u. Vezmime ľubovoľné $x \in F_C \subseteq F_L$. Potom $\{ y_k = x + k.P.u \in F_C \} \subseteq F_C$ ale $f(y_k) \to -\infty$.

Dôkaz lemy.

- neohraničenosť (L) sa prejaví v simplexovej tabuľke

		$\chi_{m+1}<0$	
x_0	I	$x_{i,m+1}\leq 0$	...

BUNV:

- najprv m stĺpcov bázy
- neohraničenosť vidno v stĺpci m+1
- všetky prvky tabuľky sú racionálne

Stĺpec A_{m+1} je LK bázických stĺpcov:

$$A_{m+1}= x_{1m+1}A_1+x_{2m+1}A_2+\dots+x_{mm+1}A_m$$

- Stĺpec A_{m+1} je LK bázických stĺpcov:

$$A_{m+1}= x_{1m+1}A_1+x_{2m+1}A_2+\ldots+x_{mm+1}A_m$$

- vezmime vektor u:

$$u =(-x_{1m+1},-x_{2m+1},\ldots,-x_{mm+1},1,0,\ldots,0)$$

- u je racionálny a Au =0, lebo

$$Au= -x_{1m+1}A_1-x_{2m+1}A_2-\ldots-x_{mm+1}A_m+A_{m+1}$$

Takže pre ľubovoľné $x \in F_L$ a $k \in N$ je

- $x+ ku \geq 0$, lebo $ku \geq 0$
- $A(x+ku)=Ax+0=b$, teda $x+ku\in F_L$

- navyše, $c^Tu<0$, lebo

$$c^Tu = -c_1x_{1m+1}- c_2x_{2m+1}-\ldots- c_mx_{mm+1}+c_{m+1}$$
$$= c_{m+1}-z_{m+1}=\chi_{m=1}<0.$$

Totálna unimodularita

- Definícia. Celočíselná matica B sa volá unimodulárna, ak det(B)=±1,0.
- Definícia. Celočíselná matica A sa volá totálne unimodulárna, ak jej každá štvorcová podmatica je unimodulárna.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$ je unimodulárna, lebo det A=1, ale nie je TUM, lebo det B=2 pre $$B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

Význam totálnej unimodularity

Veta (Veinott & Dantzig, 1968). Nech A je celočíselná matica s lineárne nezávislými riadkami. Potom NTSE:

i. A je TUM
ii. Krajné body polytopu $S = \{ x; Ax=b, x\geq 0\}$ sú celočíselné pre ľubovoľné celočíselné pravé strany b
iii. Každá bázická podmatica B matice A má celočíselnú inverziu B^{-1}.

Dôkaz vety.

- i $\Rightarrow$ ii
  - každý krajný bod S zodpovedá BPR $x=(x^B,x^N)$:
    - $x^N=0$ a
    - $Bx^B=b$, kde B je bázická podmatica.
  - Cramerovo pravidlo:

$$x_j^B = \det(B,b) / \det B$$

  - pričom hore je celočíselná matica a dole ± 1.

Dôkaz vety.

- ii $\Rightarrow$ iii
  - bázická podmatica B je regulárna, preto B^{-1} existuje - ukážeme celočíselnosť stĺpcov B^{-1}
  - zvoľme celočíselný vektor u tak, aby $v=u+ B^{-1}e^j \geq 0$
  - ak položíme $b=Bu+e^j$, tak $Bv=b$, $v\geq 0$
  - v je BPR, teda podľa (ii) celé
  - potom je celočíselný aj vektor

$$v-u= B^{-1}e^j$$

Dôkaz vety.

- iii $\Rightarrow$ i
  - ak B je bázická podmatica, podľa (iii) je B^{-1} celočíselná
  - potom

    $$1 = \det(I) = \det(B\,B^{-1}) = \det(B)\det(B^{-1})$$
  - a keďže B aj B^{-1} sú celočíselné, oba determinanty sú ± 1

Dôsledok

Veta. Nech A je celočíselná matica s lineárne nezávislými riadkami. Potom NTSE:

i. A je TUM
ii. Krajné body polytopu $S^{\leq} = \{ x; Ax \leq b, x \geq 0\}$ sú celočíselné pre ľubovoľné celočíselné pravé strany b
iii. Každá bázická podmatica B matice A má celočíselnú inverziu B^{-1}.

Dôkaz: DÚ

Príklady TUM matíc

Veta. Celočíselná matica A s prvkami $0,\pm 1$ je TUM, ak v každom stĺpci sú najviac dva nenulové prvky a riadky A sa dajú rozdeliť do dvoch množín K a L tak, že

- Ak sú v stĺpci dva prvky toho istého znamienka, tak ich riadky patria do rôznych množín
- Ak sú v stĺpci dva prvky opačného znamienka, tak ich riadky patria do tej istej množiny.

Dôkaz indukciou podľa n=veľkosť podmatice B

- n=1 jasné
- Nech rád B=k.
  - Ak B obsahuje nulový stĺpec, det B=0
  - Ak B obsahuje stĺpec s jedinou nenulou – rozvoj determinantu a indukčný predpoklad
  - Ak B má dve nenuly v každom stĺpci:
    - z podmienok vety: $\sum^{j \in K} a_{ij} = \sum^{j \in L} a_{ij}$ pre všetky j
    - takže riadky B sú LN, teda det B=0

Grafové matice

Veta. Každá úloha LP v štandardnom alebo kanonickom tvare, ktorej matica ohraničení je alebo

- vrcholovo-hranová incidenčná matica orientovaného grafu alebo
- vrcholovo-hranová incidenčná matica bipartitného grafu

má iba celočíselné bázické prípustné riešenia.

Dôsledky pre kombinatorické úlohy

Nasledujúce úlohy možno riešiť ako úlohy LP bez explicitnej podmienky celočíselnosti:

- problém najkratšej cesty v grafe
- problém maximálneho toku v sieti
- priraďovací problém
- dopravný problém