Lineárna a celočíselná optimalizácia

Analýza senzitivity a postoptimalizačná anaýza. Parametrické programovanie.

Úloha o organizácii výroby 1

- Firma FarLak vyrába 2 druhy farieb: Z a V, ktoré predáva po 5 000 a 2 000 Sk/tonu
- používa 2 druhy surovín: A, B, zásoby 6t a 5t
- spotreba surovín na 1t farieb:

	Farba Z	Farba V
Surovina A	3	2
Surovina B	1	2

Úloha lineárneho programovania pre náš problém

$$5x_Z + 2x_V \to \max$$

$$3x_Z + 2x_V \leq 6$$

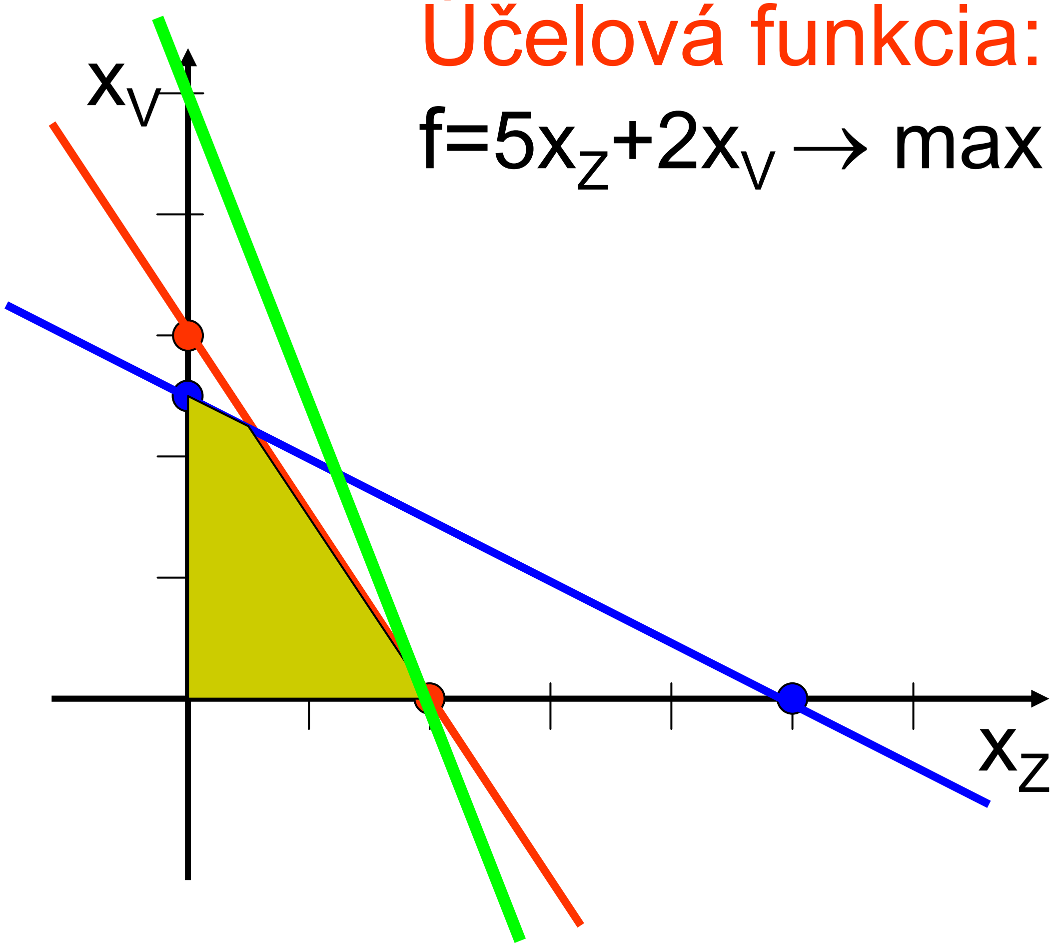
$$x_Z + 2x_V \leq 5$$

$$x_Z, x_V \geq 0$$

Riešenie úlohy LP5 – hľadanie optimálneho riešenia

Účelová funkcia:

$f = 5x_Z + 2x_V \rightarrow \max$

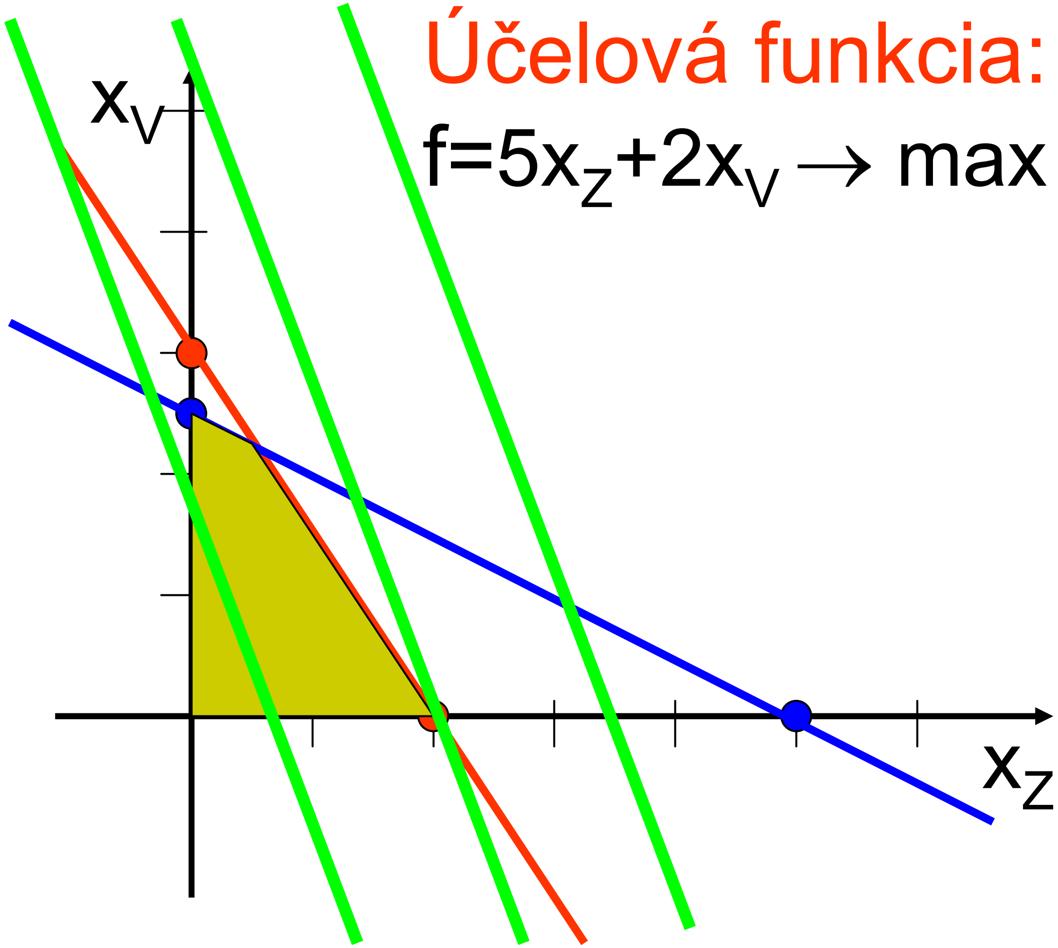


Body s tou istou hodnotou f ležia na priamke

p: $5x_Z + 2x_V = \text{konst}$

Keď sa mení f, p sa posúva rovnobežne

Riešenie úlohy LP6 – nájdenie optimálneho riešenia



Účelová funkcia:

$f = 5x_Z + 2x_V \rightarrow \max$

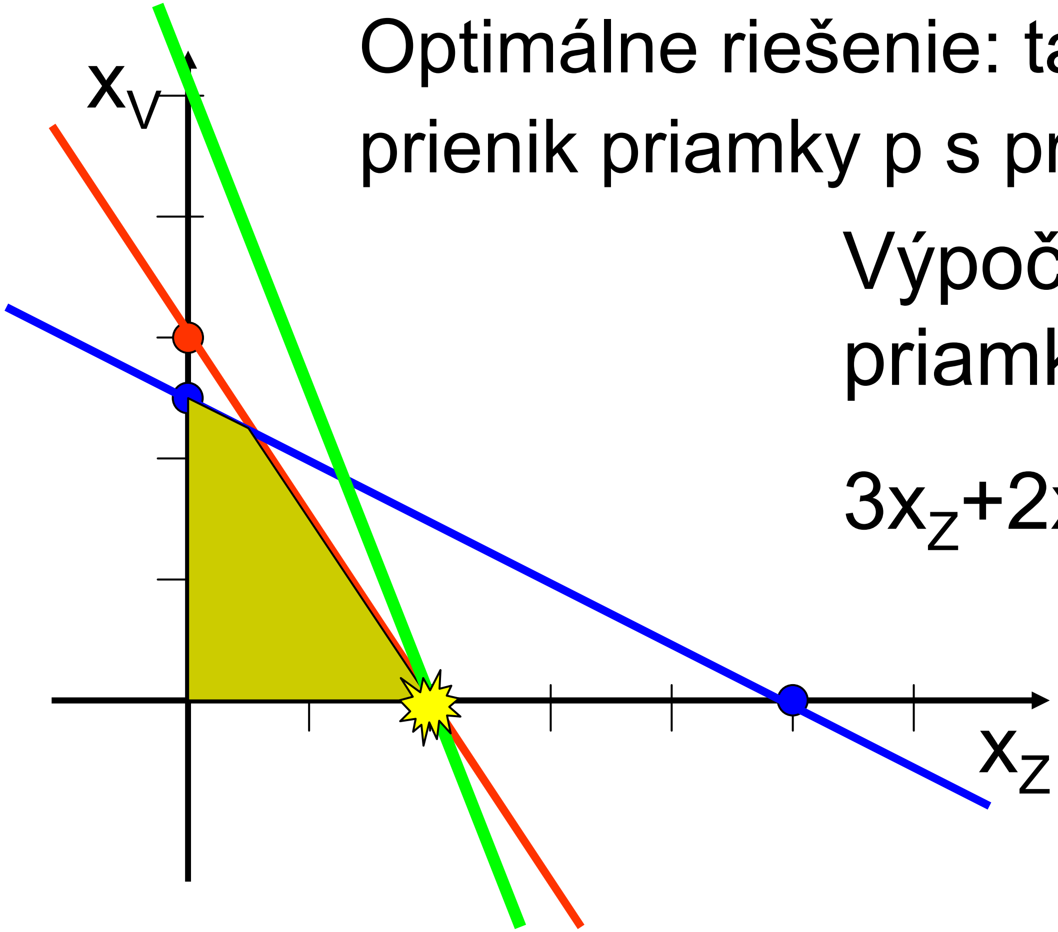
Hodnota f rastie smerom doprava

Neexistuje výrobný plán s takou hodnotou f

Oproti tejto hodnote sa f ešte môže zvýšiť

Optimálna f: posledný dotyk s prípustnou množinou

Riešenie úlohy LP6 – nájdenie optimálneho riešenia



Optimálne riešenie: tam, kde je posledný prienik priamky p s prípustnou množinou

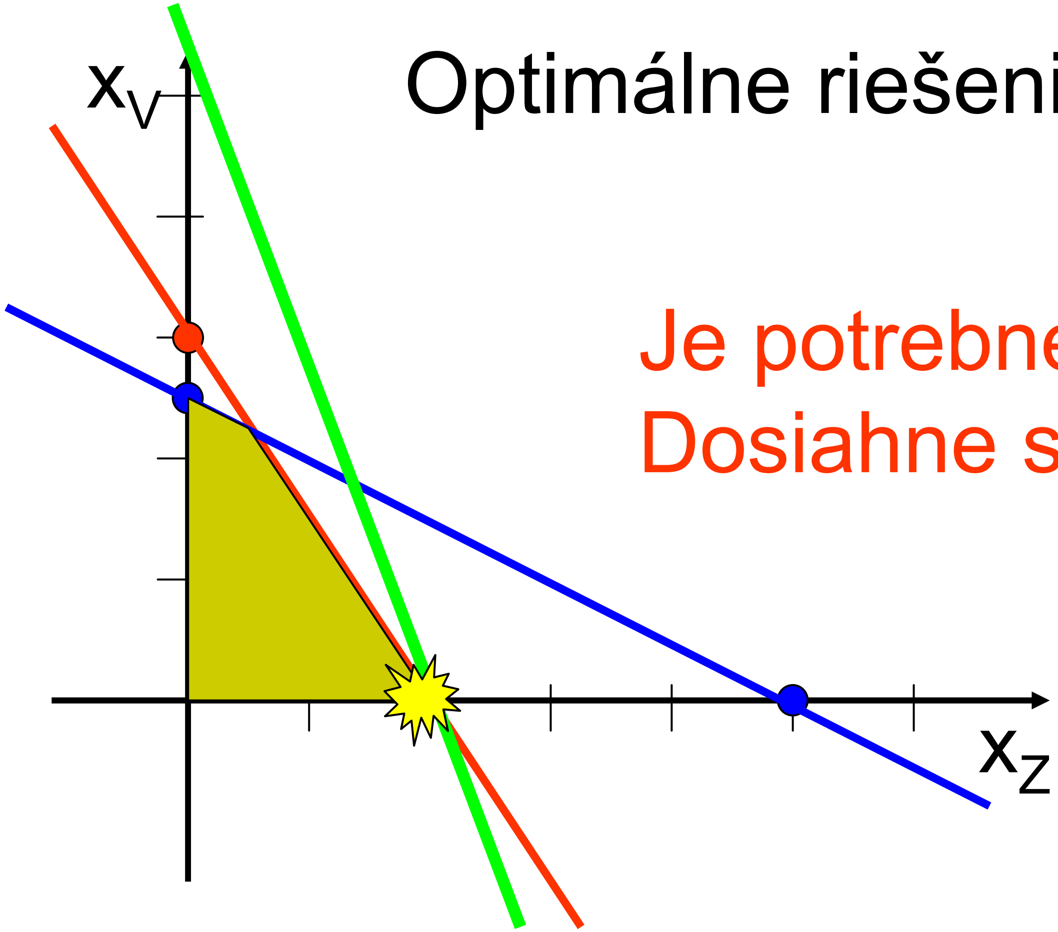
Výpočet: prienik červenej priamky a vodorovnej osi

$3x_Z+2x_V = 6$ & $x_V = 0$

Optimálne riešenie: $x^{opt}=(2,0)^T$

c) Interpretácia riešenia

Optimálne riešenie: $x^{opt}=(2,0)^T$



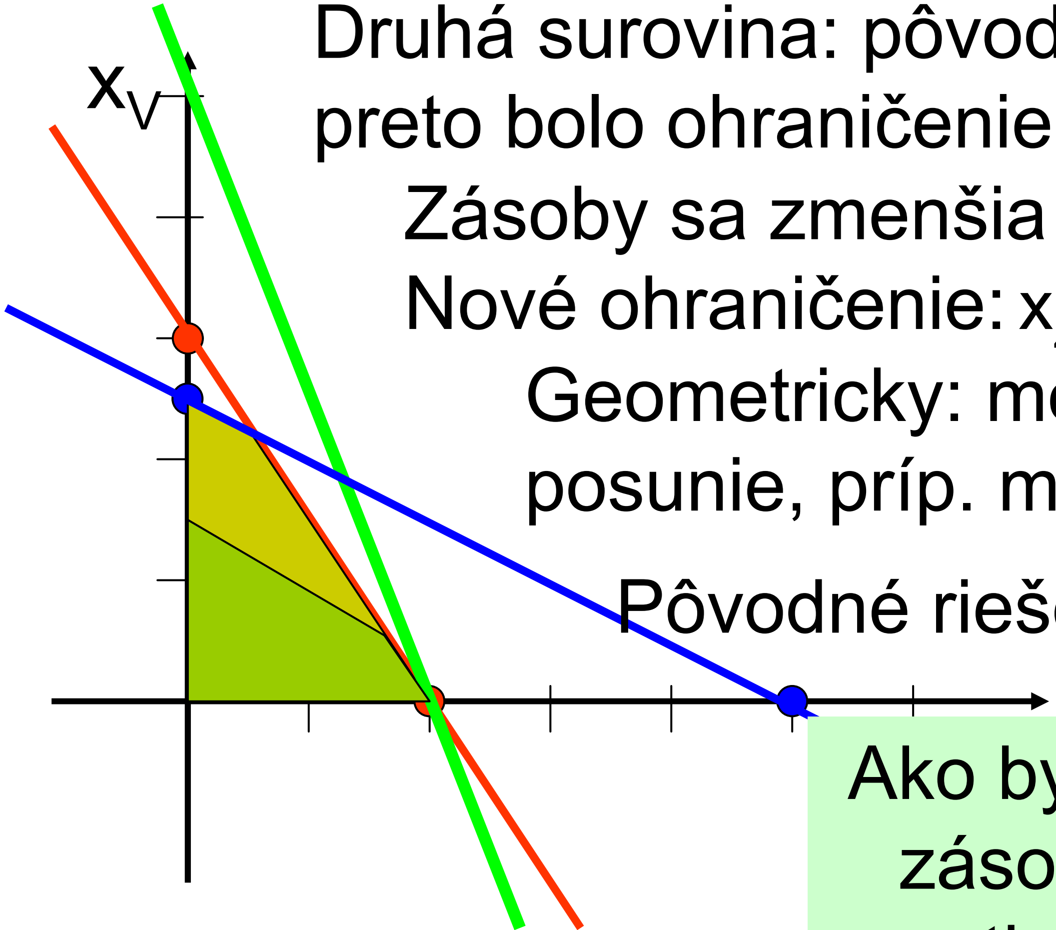
Je potrebné vyrábať 2t farby Z.
Dosiahne sa zisk 10 000 Sk.

d) Postoptimalizačná analýza

Kladieme si otázky typu Čo keby?

i. sa zmenila veľkosť zásob niektorej suroviny?
ii. pribudlo nejaké ohraničenie?
iii. zmenili sa ceny výrobkov?
iv. atď.

i. Zmena zásob suroviny



Druhá surovina: pôvodné zásoby 5t, preto bolo ohraničenie $x_Z+2x_V \leq 5$

Zásoby sa zmenšia na 3t.

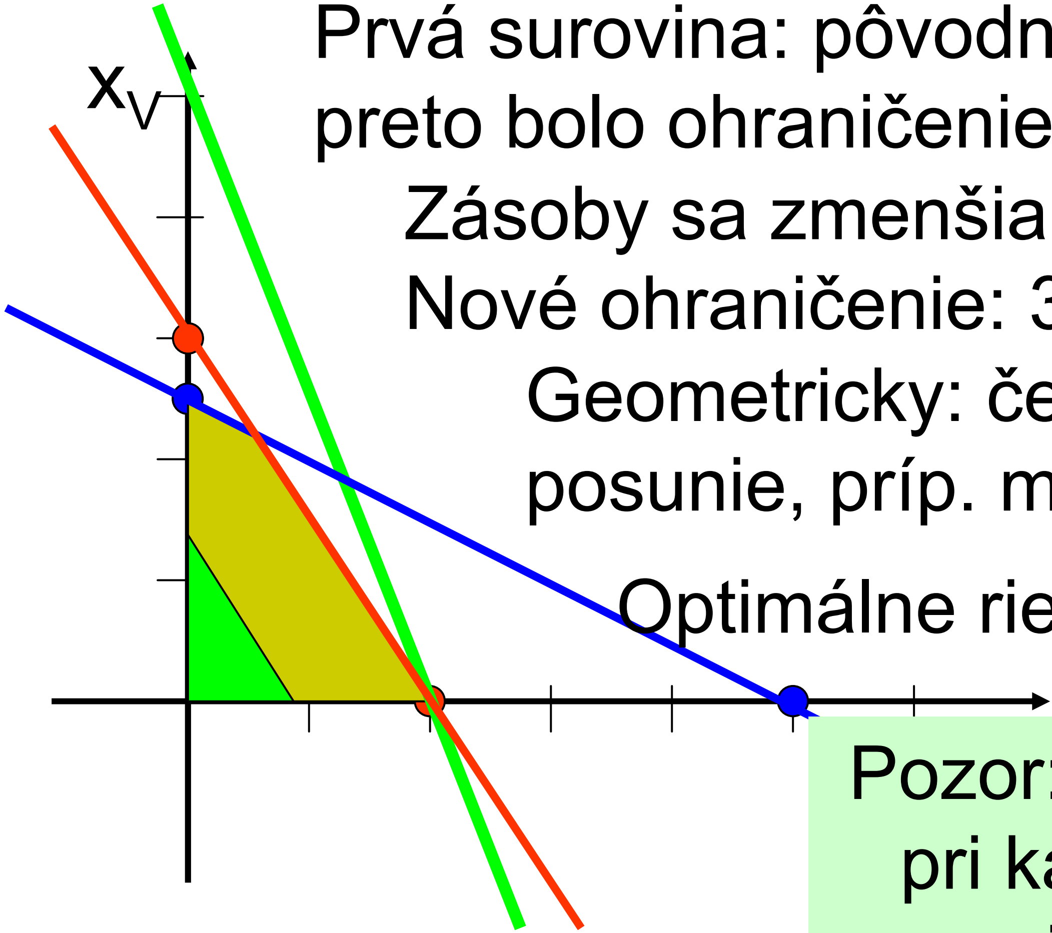
Nové ohraničenie: $x_Z+2x_V \leq 3$

Geometricky: modrá priamka sa posunie, príp. množina sa zmenší.

Pôvodné riešenie ostáva optimálne.

Ako by sa museli zmeniť zásoby, aby sa zmenilo optimálne riešenie?

i. Zmena zásob suroviny



Prvá surovina: pôvodné zásoby 6t, preto bolo ohraničenie $3x_Z+2x_V \leq 6$

Zásoby sa zmenšia na 3t.

Nové ohraničenie: $3x_Z+2x_V \leq 3$

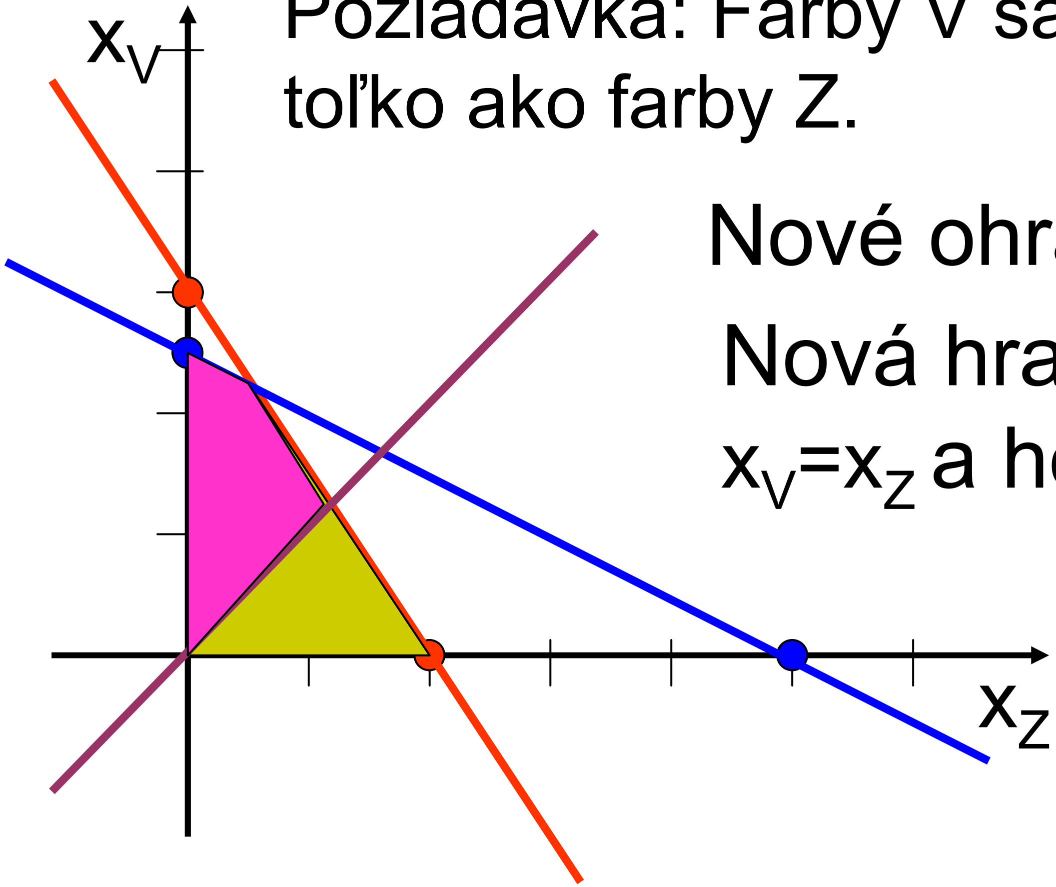
Geometricky: červená priamka sa posunie, príp. množina sa zmenší.

Optimálne riešenie sa zmení.

Pozor: optimum sa zmení pri každej zmene zásob prvej suroviny!

ii. Nové ohraničenie.

Požiadavka: Farby V sa má vyrobiť aspoň toľko ako farby Z.

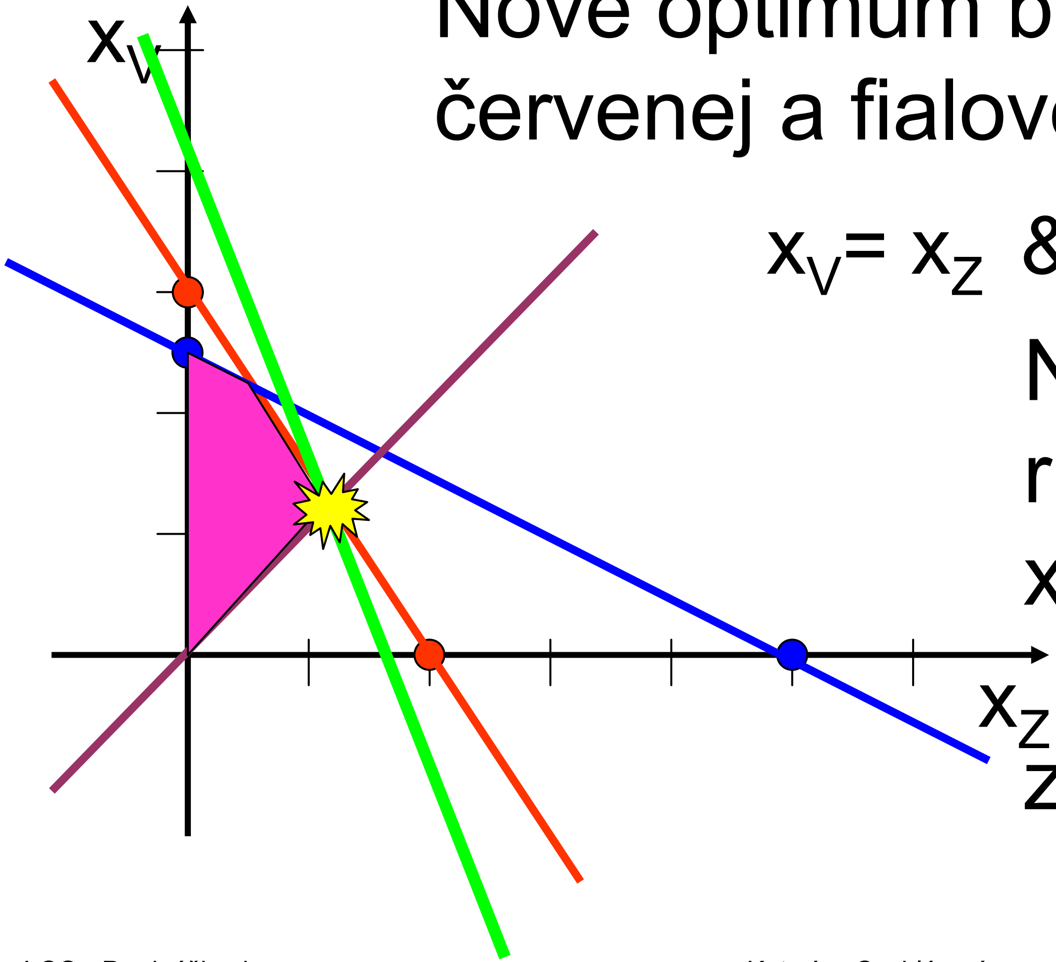


Nové ohraničenie $x_V \geq x_Z$

Nová hraničná priamka $x_V = x_Z$ a horná polrovina.

Nová prípustná množina=fialová

ii. Nové ohraničenie.

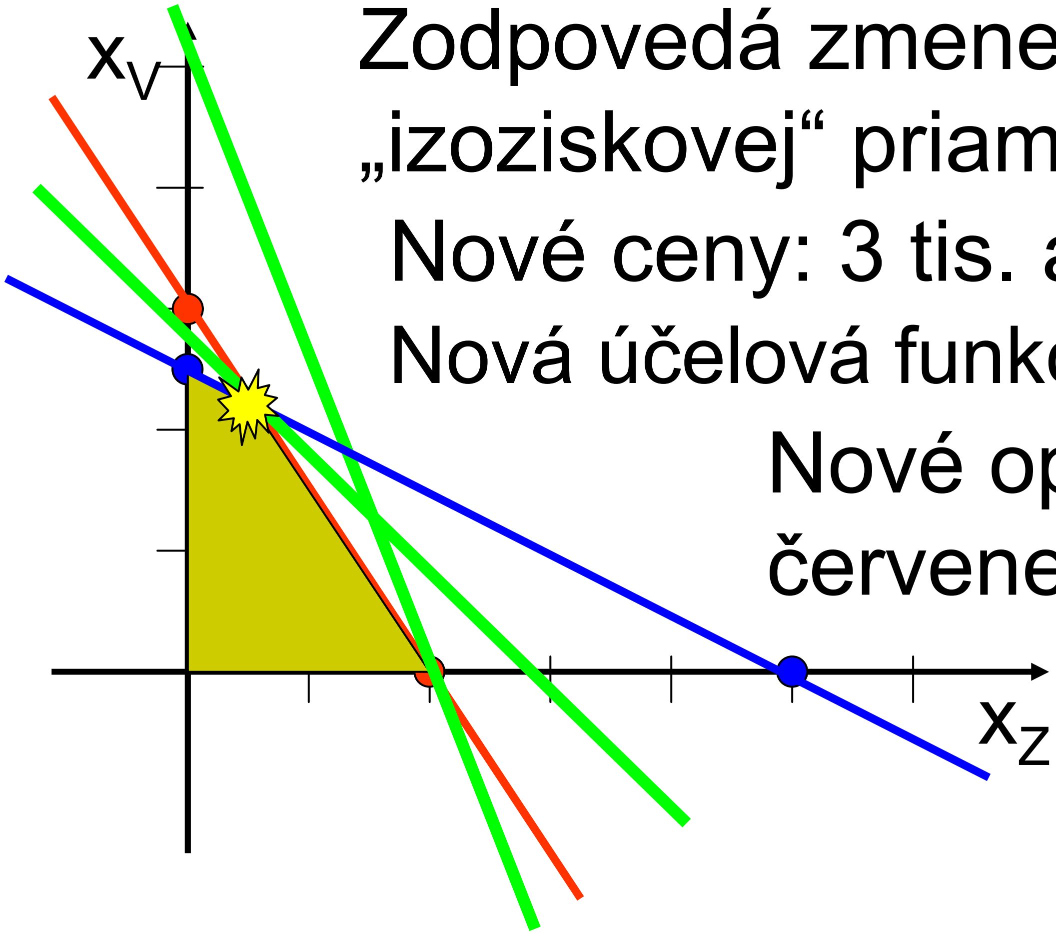


Nové optimum bude v prieniku červenej a fialovej priamky.

$x_V = x_Z$ & $3x_Z+2x_V = 6$

Nové optimálne riešenie: $x^{opt}=(6/5,6/5)^T$, nová hodnota zisku f = 8 400 Sk

iii. Zmena cien výrobkov



Zodpovedá zmene sklonu „izoziskovej“ priamky.

Nové ceny: 3 tis. a 3 tis. Sk

Nová účelová funkcia: $3x_Z+3x_V \to \max$

Nové optimum v prieniku červenej a modrej priamky.

$$3x_Z+2x_V = 6$$
$$x_Z+2x_V = 5$$

$$x^{opt}=(1/2,9/4)^T$$

Úloha o diéte - zadanie

- k dispozícii máme n druhov krmív v jednotkových cenách $c_1, c_2, \ldots, c_n$
- chceme zostaviť čo najlacnejšiu krmnú dávku, pričom sledujeme m živín
- jednotlivé živiny majú byť prítomné v množstvách $b_1, b_2, \ldots, b_m$
- vieme, že v jednotke j-tého krmiva je a_{ij} jednotiek i-tej živiny

Simplexová metóda schematicky

b	I	…	A_j	…	B

$x_0 = B^{-1}\mathbf{b}$	B^{-1}	…	$\mathbf{x_j = B^{-1}A_j}$	…	I

Tabuľka pre bázu $\mathcal{B}$:

- na mieste stĺpcov bázy matica I.
- je to pôv. tabuľka prenásobená maticou B^{-1}.

Prípad $\chi_j = c_j - z_j = 0$

- Možno vygenerovať ďalšie optimálne riešenia

$\mathcal{B}$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	-5	1	0	0	0	6	0
A_2	3	6	1	0	0	-2	2
A_3	2	1	0	1	0	1	-1
A_4	1	3	0	0	1	1	3

$f=-3$

$\mathcal{B}=\{A_2,A_3,A_4\}$, $x_B=(0,3,2,1,0,0)^T$

$A_6 \notin \mathcal{B}$ pritom relatívna cena =0

Ďalšie optimálne riešenie

$\mathcal{B}$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	-5	1	0	0	0	6	0
A_2	1/3	4	1	0	-2/3	-8/3	0
A_3	7/3	2	0	1	1/3	4/3	0
A_6	1/3	1	0	0	1/3	1/3	1

f=-3

$\mathcal{B}'=\{A_2,A_3,A_6\}$, $x_{B'}=(0,1/3,7/3,0,0,1/3)^T$

- hodnota účelovej funkcie sa nezmení
- množina optimálnych riešení je úsečka s krajnými bodmi x_B a $x_{B'}$

Pivotovanie po nejednoznačnosti

$\mathcal{B}$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	5	1	0	0	0	0	-3
A_5	2	3	½	0	0	1	-1
A_3	4	4	½	1	0	0	0
A_4	0	-6	-3/2	0	1	0	3

f=-5

Veta. Ak pri výbere riadku podielovým kritériom nastáva nejednoznačnosť, BPR v nasledujúcej simplexovej tabuľke je degenerované.

Posledné pivotovanie

$\mathcal{B}$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	13	6	0	2	1/3	0	0
A_5	2	1	0	0	1/3	1	0
A_2	8	8	1	2	0	0	0
A_6	4	2	0	1	1/3	0	1

$f=-13$

Optimálne riešenie $x_B=(0,8,0,0,2,4)^T$