Lineárna a celočíselná optimalizácia

Varianty simplexovej metódy – duálna a revidovaná simplexová metóda

Riešime úlohu LP v štandardnom tvare

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}_1 \rightarrow \min$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

kde $A \in \mathcal{R}(m,n)$, $\mathbf{b}^T \in \mathcal{R}^m$, $c \in \mathcal{R}^n$

- k nej duál je

$$g(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T\mathbf{b} \rightarrow \max$$

$$\mathbf{y}^T\mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T$$

Simplexová metóda schematicky - štart

b	I	…	A_j	…	B

Štartovacia simplexová tabuľka :

- obsahuje jednotkovú podmaticu I.
- niekde sú v nej stĺpce bázy $\mathcal{B}$

Simplexová metóda schematicky – ďalšie kroky

	relatívne ceny stĺpcov				
$x_0 = B^{-1}\mathbf{b}$	B^{-1}	…	$\mathbf{x}_j = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j$	$\vdots$	I

Tabuľka pre bázu $\mathcal{B}$:

- na mieste stĺpcov bázy matica I
- je to pôvodná tabuľka prenásobená maticou B^{-1}

SM – nultý riadok

	relatívne		ceny		stĺpcov
$x_0 = B^{-1}\mathbf{b}$	B^{-1}	...	$\mathbf{x}_j = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j$	...	I

$\chi_j = c_j - c_B{}^T B^{-1} A_j$

$= y^T$

Nultý riadok slúži na výber stĺpca do bázy

- kritérium: $\chi_j < 0$
- keď $\chi_j \geq 0$ pre všetky j, koniec:

SM – nultý riadok a dualita

	y^T				
$x_0 = B^{-1}\mathbf{b}$	B^{-1}	…	$\mathbf{x_j = B^{-1}A_j}$	…	I

V riadku 0 nad pôvodnou maticou I je y^T, lebo

$$A_j = e_i \quad \rightarrow \quad \chi_j = c_j - y^T e_j = y_i$$

- optimum v primári $\rightarrow$ prípustnosť v duáli: $c^T \geq y^T A$

SM – nultý stĺpec

	relatívne ceny stĺpcov				
$x_0 = B^{-1}\mathbf{b}$	B^{-1}	…	$\mathbf{x_j = B^{-1}A_j}$	…	I

- v nultom stĺpci sa zachováva nezápornosť
- pri prechode medzi tabuľkami využitím stĺpcových podielov: z bázy ide von riadok, kde sa nadobúda

$$\min\{x_{i0}/x_{ij};\ x_{ij}>0\}=x_{r0}/x_{rj};$$

SM – neohraničenosť

			$x_{0j}<0$		
$x_0=$ $B^{-1}\mathbf{b}$	B^{-1}	…	**všetky** $\mathbf{x_{ij}\leq 0}$	…	I

Čo potrebujeme na výpočty

- v priebežnej simplexovej tabuľke je:
  - $x_0 = B^{-1}\mathbf{b}$
  - $X_j = B^{-1}A_j$
  - $x_{0j} = \mathbf{c_j} - \mathbf{c_B}B^{-1}A_j$
    $= \mathbf{c_j} - y^T A_j$
- spolu prepočítavame (m+1) x (n+1) prvkov
- všetky môžeme získať pomocou y, x_0, B^{-1} a pôvodných dát

Stačí prepočítavať y, x_0, B^{-1}
(m+1) x (n+1) prvkov

Revidovaná simplexová metóda – prechod od T_k ku T_{k+1}

- Generujme postupne $\chi_j = c_j - y^T A_j$.
- Ak $\chi_j \geq 0$ pre všetky j, tabuľka je optimálna, koniec.
- Inak vyberme s tak, že $\chi_s < 0$ a vygenerujme celý stĺpec s: $X_j = B^{-1} A_s$
- Ak $\mathbf{x_{is} \leq 0}$ pre všetky i, úloha je neohraničená, koniec.
- Inak určíme podielovým kritériom pivota x_{ks}:
- $\min\{x_{i0}/x_{is};\ x_{is} > 0\} = x_{k0}/x_{ks}$
- Pivotujeme tabuľku podľa prvku x_{ks} a stĺpca X_s .
- Upravíme bázu: položíme B(k)=s.

Revidovaná SM schematicky

$-f$	y^T				
x_0	B^{-1}	…	$\mathbf{X_j= B^{-1}A_j}$	…	I

$-f$	y^T
x_0	B^{-1}

generujem stĺpec:

$c_j - y^T A_j$
$\mathbf{X_j= B^{-1}A_j}$

Príklad 1

$$5x_3 - x_4 - x_5 - 4x_6 \rightarrow \min$$

$$\begin{aligned} x_1 \quad + x_3 - 2x_4 - x_5 + x_6 &= 2 \\ x_2 - x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &= 1 \\ x_j &\geq 0 \end{aligned}$$

Cassim – optimálne riešenie:

$x^{opt}=(1,0,0,0,0,1)$, $f^{opt}=-4$

Príklad 2 – pridanie stĺpca

$$5x_3 - x_4 - x_5 - 4x_6 + 2x_7 \to \min$$
$$x_1 \quad + x_3 - 2x_4 - x_5 + x_6 + 3x_7 = 2$$
$$x_2 - x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + 2x_7 = 1$$
$$x_j \geq 0$$

Máme optimum pôvodnej úlohy. Nemusíme počítať LP odznova:

- Generujeme $\chi_7 = c_7 - y^T A_7$.
- Ak $\chi_7 < 0$, vygenerujme celý stĺpec: $X_7 = B^{-1}A_7$

inak x^{opt} je optimálne aj po pridaní x_7.

Revidovaná SM s pomocnou úlohou

- prvá fáza: relatívne ceny odvodené od pomocnej účelovej funkcie

$$\chi_j = d_j - y^T A_j \quad \text{kde} \quad d_j = -\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$$

- po skončení prvej fázy prejdeme k starej účelovej funkcii:
- $\chi_j = d_j - y^T A_j$
- prvé y sa vypočíta ako $y = c_B^T B^{-1}$

Duálna simplexová metóda

Majme úlohu LP:

$$3x_1 + 4x_2 \to \min$$
$$x_1 + x_2 \geq 2$$
$$2x_1 - x_2 \geq 1$$
$$x_j \geq 0$$

Štand. tvar:

$$3x_1 + 4x_2 \to \min$$
$$x_1 + x_2 - s_1 = 2$$
$$2x_1 - x_2 - s_2 = 1$$
$$x_j, s_i \geq 0$$

Pomocná úloha:

$$p_1 + p_2 \to \min$$
$$x_1 + x_2 - s_1 + p_1 = 2$$
$$2x_1 - x_2 - s_2 + p_2 = 1$$
$$x_j, s_i, p_i \geq 0$$

Potom ešte druhá fáza SM...

Primárna simplexová metóda

- udržuje primárnu prípustnosť
- znižuje účelovú funkciu
- kým dosiahne optimum = prípustnosť v duáli

Duálne je možné:

- začať s duálnou prípustnosťou: $\chi_j = c_j - y^T A_j \geq 0$
- udržiavať duálnu prípustnosť
- zvyšovať účelovú funkciu
- kým sa dosiahne primárne prípustné riešenie

Postoptimalizačná analýza a pridanie ohraničenia

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &\to \min \\
x_1 \quad -2x_3 + 2x_4 &= 6 \\
x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\
x_1 - x_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Chceme pridať ohraničenie:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 1$$

$\mathcal{B}$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1
	-17	0	0	6	0	0
A_1	6	1	0	-2	2	0
A_2	1	0	1	1	-1	0
s_1	1	1	2	1	1	1

Optimálna tabuľka pôvodnej úlohy.