Lineárna a celočíselná optimalizácia

Dualita v lineárnom programovaní

Primárno-duálna dvojica úloh

Úloha v štand. tvare:

$$c^T x \rightarrow \min$$
$$Ax=b$$
$$c \geq 0$$

Uvažujme úlohu:

$$y^T b \rightarrow \max$$
$$y^T A \leq c$$

Primárna úloha

Duálna úloha

Duál k duálu

Veta. Ak (D) je úloha duálna k úlohe (P), tak duálna úloha k (D) je opäť (P).

Dôkaz.

Duál k všeobecnej úlohe

- Veta o komplementarite. Dvojica prípustných riešení, x pre úlohu (P) a y pre úlohu (D), je optimálna primárno-duálna dvojica práve vtedy, keď platí
- $y_i(a_i^T x - b_i)=0$ pre všetky $i=1,2,\ldots,m$
- $(c_j - y^T A_j)x_j=0$ pre všetky $j=1,2,\ldots,n$.

Symetrická dvojica primárno-duálnych úloh

Primárna úloha (P):

$$c^T x \to \min$$
$$A\,x \geq b$$
$$x \geq 0$$

Duálna úloha (D):

$$y^T b \to \max$$
$$y^T A \leq c^T$$
$$y \geq 0$$

Veta o komplementarite. Dvojica prípustných rie-šení x a y pre úlohu (P) resp. úlohu (D) je opti-málna primárno-duálna dvojica práve vtedy, keď

- $y_i(a_i^T x - b_i) = 0$ pre všetky $i=1,2,\ldots,m$
- $(c_j - y^T A_j)\, x_j = 0$ pre všetky $j=1,2,\ldots,n$.

Dôkaz vety o komplementarite

$\Leftarrow$

- Ak platia tieto rovnosti, môžeme ich sčítať: Najprv prvé:

$$\sum_{i=1}^{m} y_i(a_i^T x - b_i) = 0 \qquad (*)$$

Z toho:

$$\sum_{i=1}^{m} y_i a_i^T x = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_i\, a_{ij}\, x_j = \sum_{i=1}^{m} y_i b_i$$

roznásobíme $a_i^T x$

z rovnosti (*)

- Druhé: $\sum_{j=1}^{n} (c_j - y^T A_j)\, x_j = 0$ (**)

Z toho:

$$\sum_{j=1}^{n} y^T A_j\, x_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} y_i\, a_{ij}\, x_j = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

roznásobíme $y^T A_j$

z rovnosti (*)

- Máme teda:

$$\sum_{i=1}^{m} y_i b_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} y_i\, a_{ij}\, x_j = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

a keďže x,y boli prípustné, sú aj optimálne.

Slabá veta o dualite

Veta. Ak x je ľubovoľné prípustné riešenie primárnej úlohy a y ľubovoľné prípustné riešenie k nej príslušnej duálnej úlohy, tak

$$c^T x \geq y^T b.$$

Dôkaz.

Silná veta o dualite a)

Veta. Ak jedna z úloh primárno-duálnej dvojice je prípustná ale neohraničená, potom druhá úloha je neprípustná.

Dôkaz.

Silná veta o dualite b)

Veta. Ak jedna z úloh primárno-duálnej dvojice má optimálne riešenie, potom má optimálne riešenie aj druhá a optimálne hodnoty účelových funkcí sa rovnajú.

Dôkaz.

Duálna informácia v simplexovej tabuľke 1

Takáto bola štartovacia simplexová tabuľka:

			c_j		
b	I	…	A_j	…	B

Tu sú stĺpce optimálnej bázy

Optimálna tabuľka vznikla prenásobením štartovacej maticou B^{-1}.

Duálna informácia v simplexovej tabuľke 2

			χ_j		
$x_0=$ $B^{-1}\mathbf{b}$	B^{-1}	…	$\mathbf{X}_j=$ $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j$	…	I

V optimálnej tabuľke je splnená podmienka optima: $\chi_j \geq 0$ pre každé j.

$$\chi_j = c_j - z_j = c_j - c_B X_j = c_j - c_B B^{-1} A_j = c_j - y^T A_j$$

optimálne riešenie duálu

Duálna informácia v simplexovej tabuľke 3

			χ_j		
$x_0 = B^{-1}\mathbf{b}$	B^{-1}	…	$\mathbf{X}_j = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j$	…	I

V žltých stĺpcoch boli jednotkové vektory:

$$\chi_j = c_j - y^T A_j = c_j - y^T A_j$$

Ostáva premyslieť

- Čo ak jednotková podmatica v štartovacej tabuľke zodpovedala doplnkovým premenným?
- Čo ak sme začínali pomocnou úlohou?

Primárno-duálna dvojica

- Veta. Pre primárno-duálnu dvojicu úloh nastáva práve jedna z týchto možností: