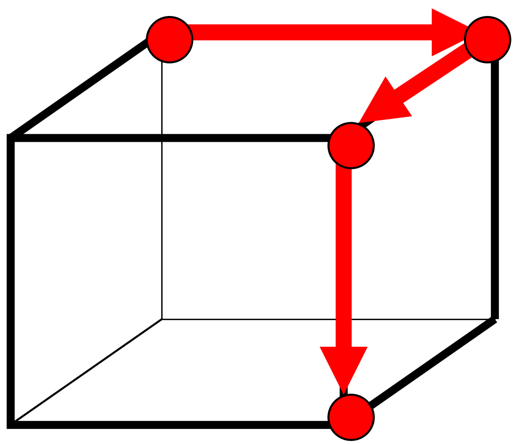
Lineárna a celočíselná optimalizácia

Vlastnosti simplexovej metódy

Sumarizácia simplexovej metódy

Úloha v štand. tvare:

$$c^T x \to \min$$
$$Ax=b$$
$$c \geq 0$$



- Simplexová metóda
  - prechádza z jedného krajného bodu do iného po hrane
  - pri každom prechode sa snaží zmenšiť hodnotu účelovej funkcie
  - poznáme kritérium optimality aj neohraničenosti

procedure simplex;

```
begin
   opt:=false; unb:=false;
   while opt= false and unb= false do
   if χj≥0 for all j then opt:=true
   else begin choose any j such that χj<0;
               if xij≤0 for all i then unb:= true
               else begin find θ=min{xi0/xij; xij>0}=xr0/xrj;
                                   pivot on xrj
                    end
        end
end.
```

Simplexová metóda schematicky

b	I	…	A_j	…	B

$x_0 = B^{-1}\mathbf{b}$	B^{-1}	…	$\mathbf{X_j = B^{-1}A_j}$	…	I

Tabuľka pre bázu $\mathcal{B}$:

- na mieste stĺpcov bázy matica I.
- je to pôv. tabuľka prenásobená maticou B^{-1}.

Ostáva rozhodnúť:

choose any j such that $\chi_j<0$;

- ako konkrétne vybrať index j
- $\chi_j>0$ byť nemôže, lebo účelová funkcia by narástla
- čo dá $\chi_j=0$?

find $\theta=\min\{x_{i0}/x_{ij};\ x_{ij}>0\}=x_{r0}/x_{rj}$;

- minimum byť musí, aby sa zachovala prípustnosť
- ako vybrať r, ak minimum je vo viacerých riadkoch

Prípad $\chi_j = c_j - z_j = 0$

- Možno vygenerovať ďalšie optimálne riešenia

$\mathcal{B}$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	-5	1	0	0	0	6	0
A_2	3	6	1	0	0	-2	2
A_3	2	1	0	1	0	1	-1
A_4	1	3	0	0	1	1	3

f=-3

$\mathcal{B}=\{A_2,A_3,A_4\}$, $x_B=(0,3,2,1,0,0)^T$

$A_6 \notin \mathcal{B}$ pritom relatívna cena =0

Ďalšie optimálne riešenie

$\mathcal{B}$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	-5	1	0	0	0	6	0
A_2	1/3	4	1	0	-2/3	-8/3	0
A_3	7/3	2	0	1	1/3	4/3	0
A_6	1/3	1	0	0	1/3	1/3	1

$f=-3$

$\mathcal{B}'=\{A_2,A_3,A_6\}$, $x_{B'}=(0,1/3,7/3,0,0,1/3)^T$

- hodnota účelovej funkcie sa nezmení
- množina optimálnych riešení je úsečka s krajnými bodmi x_B a $x_{B'}$

Nejednoznačnosť výberu riadku a/alebo stĺpca

$\mathcal{B}$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	3	1	0	0	0	-1	-2
A_2	4	6	1	0	0	2	-2
A_3	2	1	0	1	0	-1	1
A_4	6	3	0	0	1	3	0

$f=-3$

Dve záporné relatívne ceny: χ_5**=-1,** χ_6**=-2**

Pre j=5: $\theta=4/2=6/3$ minimum v riadkoch 1 a 3

Pivotovanie po nejednoznačnosti

$\mathcal{B}$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	5	1	0	0	0	0	-3
A_5	2	3	½	0	0	1	-1
A_3	4	4	½	1	0	0	0
A_4	0	-6	-3/2	0	1	0	3

f=-5

Veta. Ak pri výbere riadku podielovým kritériom nastáva nejednoznačnosť, BPR v nasledujúcej simplexovej tabuľke je degenerované.

Pivotovanie po degenerovanom BPR

$\mathcal{B}$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	5	-2	-1	0	1/3	0	0
A_5	2	1	0	0	1/3	1	0
A_3	4	4	½	1	0	0	0
A_6	0	-2	-1/2	0	1/3	0	1

f=-5

nezmenená!

Tabuľka predtým: $\mathcal{B}=\{A_5,A_3,A_4\}$, $x_B=(0,0,4,0,2,0)^T$

Tabuľka teraz: $\mathcal{B}=\{A_5,A_3,A_6\}$, $x_B=(0,0,4,0,2,0)^T$

BPR to isté, len sme vzali inú bázu k nemu.

Posledné pivotovanie

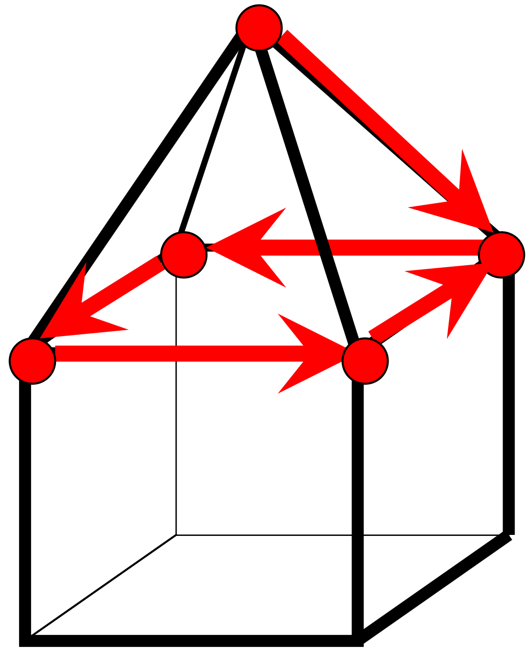
$\mathcal{B}$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	13	6	0	2	1/3	0	0
A_5	2	1	0	0	1/3	1	0
A_2	8	8	1	2	0	0	0
A_6	4	2	0	1	1/3	0	1

$f=-13$

Optimálne riešenie $x_B=(0,8,0,0,2,4)^T$

Problém s degenerovanými úlohami

- pri pivotovaní s $\theta=0$ pri degenerovanom BPR sa nezmení
  - hodnota účelovej funkcie
  - ani BPR – len sa zmení báza
- môže sa stať, že sa algoritmus zacyklí



Pravidlo vedúce k zacykleniu:

- vedúci stĺpec: minimálna relatívna cena
- vedúci riadok: najmenší index

$$
\begin{aligned}
-3/4x_1 + 20x_2 - 1/2\,x_3 + 6x_4 &\to \min \\
1/4x_1 - 8x_2 - x_3 + 9x_4 &\leq 0 \\
1/2x_1 - 12x_2 - 1/3x_3 + 4x_4 &\leq 0 \\
x_3 &\leq 0 \\
x_1\text{-}x_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Dĺžka cyklu: 6 báz

Lexikografické usporiadanie

Definícia. Vektor **x** je lexikograficky kladný, ak je jeho prvá nenulová zložka kladná; píšeme $\mathbf{x} >_{lex} \mathbf{0}$. Vektor **x** je lexikograficky väčší ako vektor **y**, píšeme $\mathbf{x} >_{lex} \mathbf{y}$, ak je vektor **x-y** lexikograficky kladný.

Príklady.

$\mathbf{x}=(0,-2,4)^T$ $\mathbf{x} <_{lex} \mathbf{0}$.

$\mathbf{y}=(1,-5,-8)^T$ $\mathbf{x} >_{lex} \mathbf{0}$.

$\mathbf{v}=(-1,-2,4)^T$, $\mathbf{u}=(-1,5,-8):^T$ $\mathbf{u} >_{lex} \mathbf{v}$.

Vlastnosti lexikografického usporiadania na $\mathcal{R}^m$

- trichotómia: pre každé dva vektory $x,y \in \mathcal{R}^m$ nastáva práve jedna z možností

$$\mathbf{x} >_{lex} \mathbf{y} \text{ alebo } \mathbf{y} >_{lex} \mathbf{x} \text{ alebo } \mathbf{x} =_x \mathbf{y}$$

- tranzitívnosť
- zachováva sa po násobení kladným číslom:

$$\text{ak } \mathbf{x} >_{lex} \mathbf{y},\ \alpha > 0, \text{ tak } \alpha\mathbf{x} >_{lex} \alpha\mathbf{y}.$$

Lexikografické anticyklické pravidlo

Veta 15. Nech sú v prvej simplexovej tabuľke všetky riadky (okrem nultého) lexikograficky kladné. Potom pravidlá výberu pivota

- Vyber ľubovoľný stĺpec s taký, že $x_{0s}<0$.
- Vyber riadok r, v ktorom sa nadobúda lexikografické minimum z riadkov x_i/x_{is} pre $x_{is}>0$.

zaručia, že

- riadky ostanú lexikograficky kladné,
- nultý riadok ostro lexikograficky rastie a
- simplexová metóda skončí po konečnom počte krokov.

Použitie lexikografického pravidla

$\mathcal{B}$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	3	1	0	0	0	-1	-2
A_2	4	6	1	0	0	2	-2
A_3	2	1	0	1	0	-1	1
A_4	6	3	0	0	1	3	0

Obyčajné podielové kritérium-dva možné pivoty.

Lexikografické kritérium – porovnávame
(2, 3, 1/2, 0,   0, 1, -1)
(2, 1,   0, 0,1/3, 1, 0) – výsledný pivot zelený

Ako zaručiť splnenie predpokladov

Prvá simplexová tabuľka:

b	I	…	A_j	…	B

Buď je $b_i>0$ alebo prvý nenulový prvok je z matice I.

Dôkaz lexikografického pravidla

- riadok s vybratým pivotom

$a'_r = a_r / a_{rs}$

$a_{rs} > 0$, $a_r >_{lex} 0$, preto aj $a'_r >_{lex} 0$.

- riadok $i \neq 0$ a $a_{is} > 0$

$a'_i = a_i - a_r (a_{is} / a_{rs}) = a_{is} [a_i / a_{is} - a_r / a_{rs}] >_{lex} 0$

lebo a_r / a_{rs} bolo lexikografické minimum

- riadok $i \neq 0$ a $a_{is} < 0$

$a'_i = a_i - a_r (a_{is} / a_{rs}) = a_i + a_r \, |a_{is}| / a_{rs} \geq_{lex} a_i \,] >_{lex} 0$

Blandovo anticyklické pravidlo

Veta 16. Ak v simplexovej metóde vyberáme pivota podľa nasledujúcich pravidiel, tak simplexová metóda skončí po konečnom počte krokov.

- Vyber na vstup do bázy stĺpec s taký, aby

$$s = \min \{j: c_j - z_j < 0\}.$$

- Vyber riadok r pre vystúpenie z bázy tak, aby $B(r) = \min\{B(i): x_{is} > 0;\ x_{i0}/x_{is} \leq x_{k0}x_{ks}$ pre vš. k také, že $x_{ks} > 0\}$.