Lineárna a celočíselná optimalizácia

Simplexová metóda

Minule sme si ukázali

- Každá úloha LP je buď
  - neprípustná, alebo
  - neohraničená alebo
  - má optimum v krajnom bode
- Krajné body F zodpovedajú bázickým prípustným riešeniam
- Bázické riešenie zodpovedá báze, t.j. m lineárne nezávislých stĺpcov matice A

Príklad – ako vybrať bázu 1

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Možných báz je veľa: v príklade $\binom{5}{3}=10$

Nie každá trojica stĺpcov je báza:

$\mathcal{B}=(A_2,A_3,A_5)$ ... sú LZ, lebo $A_2+A_3=A_5$

Príklad – ako vybrať bázu 2

Nie každé BR je prípustné:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{B}=(A_1,A_2,A_4)$ … $x_{\mathcal{B}} = (-1,1,0,2,0)$

Príklad – ako vybrať bázu 3

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pre bázu $\mathcal{B}=(A_1,A_2,A_3)$ je $x_{\mathcal{B}} = (1,1,2,0,0)$

Pre účelovú funkciu $f(x) = x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$ lepšia je

báza $\mathcal{B}=(A_3,A_4,A_5)$, pre ktorú $x_{\mathcal{B}} = (0,0,0,1,1)$

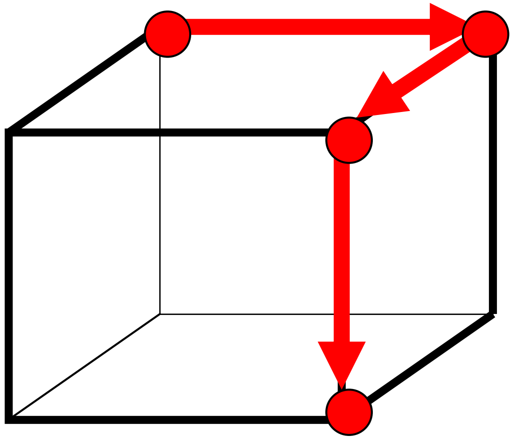
Je to však optimum?

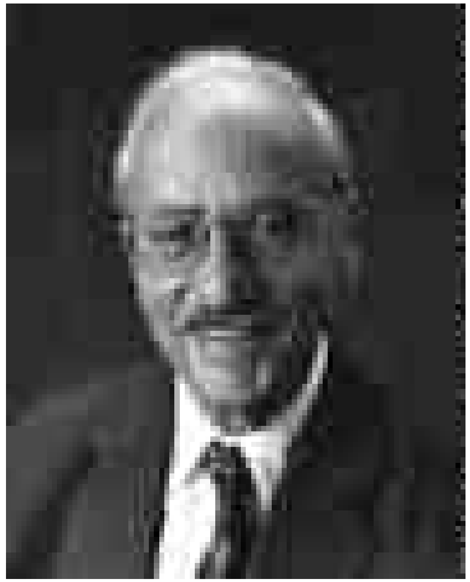
Simplexová metóda

- systematický spôsob, ako
  - zistiť, či vôbec úloha má bázu
  - nájsť aspoň jedno BPR
  - systematicky prehľadávať BPR tak, aby sme
    - neprišli k už preskúmanému
    - zistili, či úloha nie je neohraničená
    - našli optimálne BPR

George Dantzig 1914 - 2005

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/
~history/Mathematicians/Dantzig_George.html





Úloha v štandardnom tvare:

cTx $\rightarrow$ min, Ax=b, c $\geq$ 0

Prechod medzi BPR 1

Nech x_0 je BPR, zodpovedajúce báze

$\mathcal{B} = \{A_{B(i)}, i=1,2,\ldots,m\}$

Pre zložky vektora $\mathbf{x}_0$: $\quad \sum_{i=1}^{m} x_{i0}A_{B(i)} = \mathbf{b} \quad$ **(*)**

$\mathcal{B}$ tvorí bázu $\mathcal{R}^m \rightarrow$ každý stĺpec matice je ich LK:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}A_{B(i)} - A_j = \mathbf{0} \quad (**)$$

Vynásobme (**) $\theta>0$ a odčítajme od (*):

$$\sum_{i=1}^{m} (x_{i0} - \theta x_{ij})A_{B(i)} + \theta A_j = \mathbf{b}$$

Prechod medzi BPR 2

$$\sum_{i=1}^{m} (x_{i0} - \theta x_{ij}) A_{B(i)} + \theta A_j = \mathbf{b}$$

Zložky nového riešenia

Aby to bolo BPR, mali by byť:

- nezáporné
- kladných zložiek by malo byť m a
- príslušné stĺpce by mali byť LN

Prechod medzi BPR 3

$$\sum_{i=1}^{m} (x_{i0} - \theta x_{ij}) A_{B(i)} + \theta A_j = \mathbf{b}$$

Nezápornosť:

- $\theta > 0$ z predpokladu
- $x_{i0} - \theta x_{ij} \geq 0$:
  - pre $x_{ij} \leq 0$ automaticky
  - pre $x_{ij} > 0$ zvolíme $\theta \leq x_{i0} / x_{ij}$

θ = min $\{x_{i0} / x_{ij}$; cez také i, že $x_{ij} > 0\}$

dostaneme najviac m nenulových zložiek

Prechod medzi BPR 4

$$\sum_{i=1}^{m} (x_{i0} - \theta x_{ij}) A_{B(i)} + \theta A_j = \mathbf{b}$$

$\theta = \min \{x_{i0} / x_{ij};$ cez také i, že $x_{ij} > 0\} = x_{r0} / x_{rj}$

Minimum sa nadobudlo v tom r, kde B(r)=k

Nová báza:

$\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup \{j\} - k$

$B'(i) = \begin{cases} B(i) & \text{pre } i \neq r \\ j & \text{pre } i = r \end{cases}$

Nové BPR:

$x'_{i0} = \begin{cases} x_{i0} - \theta x_{ij} & \text{pre } i \neq r \\ \theta & \text{pre } i = r \end{cases}$

Ostáva ukázať:

$\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup \{j\}$ -k sú lineárne nezávislé

Dôkaz sporom: keby boli LZ, existujú koeficienty d_i, $i=1,.., m$, nie všetky nulové:

$$\sum_{i=1}^{m} d_i A_{B'(i)} = d_r A_j + \sum_{i=1, i \neq r}^{m} d_i A_{B(i)} = \mathbf{0}$$

Dosaďme $A_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} A_{B(i)}$

Dôkaz - pokračovanie

$$d_r \sum_{i=1}^{m} x_{ij} A_{B(i)} + \sum_{i \neq r} d_i A_{B(i)} =$$

$$\sum_{i \neq r} (d_r x_{ij} + d_i) A_{B(i)} + d_r x_{rj} A_{B(r)} = \mathbf{0}$$

Toto je lineárna kombinácia pôv. LN stĺpcov
$\rightarrow$ všetky koeficienty = 0 $\rightarrow$ aj $d_r = 0$

$$\sum_{i=1}^{m} d_i A_{B'(i)} = d_r A_j + \sum_{i=1, i \neq r}^{m} d_i A_{B(i)} = \mathbf{0}$$

Potom vo vajci je netriviálna LK bázických stĺpcov rovná 0 $\rightarrow$ spor

Terminológia

- Prechod medzi BPR sa volá pivotovanie
- prvok x_{rj} je pivot
- stĺpec A_j vstupuje do bázy na pozícii r
- stĺpec $A_{B(r)}=A_k$ vystupuje z bázy.

Príklad: riešenie úlohy LP

$$
\begin{array}{rcl}
3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 & \to & \min \\
x_1 \qquad\qquad -2x_4 + 2x_5 & = & 6 \\
x_2 \qquad + x_4 + x_5 & = & 1 \\
x_3 + x_4 + 3x_5 & = & 3 \\
x_1 \text{-} x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

- Stĺpce A_1, A_2, A_3 tvoria bázu $\mathcal{B}$
- matica B je jednotková, preto
  - BPR príslušné k $\mathcal{B}$ je $x_B=(6,1,3,0,0)^T$
  - každý stĺpec matice je LK stĺpcov bázy - koeficienty sú priamo v matici

Príklad: riešenie úlohy LP

$$
\begin{array}{l}
3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 \to \min \\
x_1 \qquad\qquad -2x_4 + 2x_5 = 6 \\
\qquad x_2 \qquad + x_4 - x_5 = 1 \\
\qquad\quad x_3 + x_4 + 3x_5 = 3 \\
\qquad\qquad x_1\text{-}x_5 \geq 0
\end{array}
$$

$\mathcal{B}=\{A_1,A_2,A_3\}$

$x_B=(6,1,3,0,0)^T$

$A_4 \notin \mathcal{B}$

$\theta = \min \{x_{i0} / x_{ij};$ cez také i, že $x_{ij} > 0\} = x_{r0} / x_{rj}$

- dve $x_{ij} > 0$
  - $i=2$, podiel $1/1=1$
  - $i=3$, podiel $3/1=3$, minimum pre $r=2$
- A_2 vyjde z bázy, A_4 vstúpi do bázy, $\mathcal{B}'=\{A_1,A_4,A_3\}$

Simplexová tabuľka

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 &\to \min \\
x_1 \qquad\qquad -2x_4 + 2x_5 &= 6 \\
x_2 \qquad + x_4 - x_5 &= 1 \\
x_3 + x_4 + 3x_5 &= 3 \\
x_1 - x_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Máme novú bázu.

Nemáme

- nové BPR.
- koeficienty z LK

$\mathcal{B}$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
A_1	6	1	0	0	-2	2
A_2	1	0	1	0	1	-1
A_3	3	0	0	1	1	3

stĺpcové podiely: stĺpce x_0 a x_4

pivot – v jeho stĺpci vyrobíme jednotkový stĺpec

$\mathcal{B}$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
A_1	6	1	0	0	-2	2
A_2	1	0	1	0	1	-1
A_3	3	0	0	1	1	3

$\mathcal{B}$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
A_1	8	1	2	0	0	0
A_4	1	0	1	0	1	-1
A_3	2	0	-1	1	0	4

V riadku 2: zapísaný nový bázický stĺpec

V stĺpci vstupujúcom do bázy vyrobíme jednotkový stĺpec. Jednotka bude na mieste pivota.

Gaussovské úpravy:

riadok 2 vydelíme pivotom

od riadku 3 odčítame riadok 2

k riadku 1 pričítame dvoj-násobok riadku 2

$\mathcal{B}$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
A_1	8	1	2	0	0	0
A_4	1	0	1	0	1	-1
A_3	2	0	-1	1	0	4

$\mathcal{B}=\{A_1,A_4,A_3\}$

$x_B=(8,0,2,1,0)^T$

Chceme do bázy A5.

Jediný možný pivot je v riadku 3.

$\mathcal{B}$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
A_1	8	1	2	0	0	0
A_4	3/2	0	3/4	1/4	1	0
A_5	1/2	0	-1/4	1/4	0	1

$\mathcal{B}=\{A_1,A_4,A_5\}$

$x_B=(8,0,0,3/2,1/2)^T$

Ktoré prechody medzi bázami sú vhodné?

Označme

$$f=z_0={}^{m}\sum_{i=1}x_{i0}c_{B(i)}$$

a pre každé j=1,... ,n

$$z_j={}^{m}\sum_{i=1}x_{ij}c_{B(i)}$$

- číslo z_0 je hodnota účelovej funkcie v BPR x_0
- $\chi_j = c_j - z_j$ sa volá relatívna cena stĺpca A_j.

Simplexová tabuľka

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 \to \min$$
$$x_1 \quad -2x_4 + 2x_5 = 6$$
$$x_2 \quad + x_4 - x_5 = 1$$
$$x_3 \quad + x_4 + 3x_5 = 3$$
$$x_1 \text{-} x_5 \geq 0$$

Máme $\mathcal{B}=\{A_1,A_2,A_3\}$

$x_B=(6,1,3,0,0)^T$

V riadku 0 budú relatívne ceny.

$-f=-z_0$

$\mathcal{B}$	C_B	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
		-17	0	0	0	6	0
A_1	3	6	1	0	0	-2	2
A_2	2	1	0	1	0	1	-1
A_3	-1	3	0	0	1	1	3

$\chi_j = c_j - z_j$

$z_j = {}^m\sum_{i=1} x_{ij} c_{B(i)}$

Sme v optime.

Zmena hodnoty účelovej funkcie.

Veta. Ak v BPR x_0 vykonáme pivotovanie, v ktorom stĺpec A_j vstúpi do bázy, účelová funkcia sa zmení o hodnotu $\theta\chi_j = \theta(c_j - z_j)$.

Nové BPR: $x'_{i0} = x_{i0} - \theta\, x_{ij}$ pre $i \neq r$, $x'_{r0} = \theta$

$$z'_0 = \sum_{i\neq r}(x_{i0} - \theta\, x_{ij})c_{B(i)} + \theta c_j = (+\, x_{r0}c_{B(r)} - x_{r0}c_{B(r)})$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{m} x_{i0}c_{B(i)}}_{z_0} - \theta \underbrace{\sum_{i=1}^{m} x_{ij}c_{B(i)}}_{z_j} + \theta c_j = z_0 + \theta(c_j - z_j).$$

Simplexová tabuľka ako násobenie matíc

- B je matica (štvorcová) príslušná k báze $\mathcal{B}$
- BPR k báze B: $x_0 = B^{-1} b$
- Koeficienty na vyjadrenie A_j ako lineárnej kombinácie bázy: $X_j = B^{-1} A_j$
- $z_{j0}\,{}^{m}\!\sum_{i=1} x_{i0} c_{B(i)} = c_B{}^T x_0 = c_B{}^T B^{-1} b$
- $z_j = {}^{m}\!\sum_{i=1} x_{ij} c_{B(i)} = c_B{}^T X_j = c_B{}^T B^{-1} A_j$
- vektor $z = c_B{}^T B^{-1} A$

Kritérium optimality.

Veta. Ak je vektor $\chi=\mathbf{c}-\mathbf{z}$ nezáporný, tak BPR x_0 je optimálne.

Dôkaz. Nech $\chi=\mathbf{c}-\mathbf{z}\geq\mathbf{0}$ a nech y je ľubovoľné prípustné riešenie

$$Ay=B,\ y\geq\mathbf{0}$$

Potom

$$\mathbf{c}^T\mathbf{y}\geq\mathbf{z}^T\mathbf{y} = (c_B{}^T B^{-1} A)y = c_B{}^T B^{-1} b = c_B{}^T x_0$$

preto x_0 je optimálne.

Kritérium neohraničenosti.

Veta. Ak existuje j také, že $\chi_j<0$ a pritom pre každé i je $x_{ij}\leq 0$, tak úloha LP je neohraničená.

$$\sum_{i=1}^{m} (x_{i0} - \theta x_{ij})A_{B(i)} + \theta A_j = \mathbf{b}$$

Ak všetky $x_{ij}\leq 0$, tak θ môže rásť do nekonečna a riešenie ostáva prípustné.

$\theta\chi_j$ môže klesať do nekonečna na F.

Ak v úlohe LP nie je jednotková podmatica:

- V prvej fáze riešime pomocnú úlohu

$$\xi = \sum_{i=1}^{m} p_i \rightarrow \min$$

za podmienok

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + p_i = b_i \text{ pre } i=1,2,\ldots,m$$

$$x_j \geq 0 \text{ pre } j=1,2,\ldots,n$$

$$p_i \geq 0 \text{ pre } i=1,2,\ldots,m$$

pomocné premenné

Veta. Pomocná úloha má vždy optimálne riešenie.

Ukončenie pomocnej úlohy.

- Veta. Ak $\xi^{opt}>0$ tak pôvodná úloha LP nemá prípustné riešenie.
- Ostáva prípad $\xi^{opt}=0$.

$\mathcal{B}$	x_0	x_1	x_2	x_3	p_1	p_2
	0	0	0	0	1	1
A_1	8	1	2	0	1	-1
A_4	3/2	0	3/4	1	1	2

Máme bázu.

1. Pomocnú účelovú funkciu nahradíme pôvodnou.
2. Vynecháme pomocné stĺpce.

Ukončenie pomocnej úlohy.

- Prípad $\xi^{opt}=0$, ale nemáme bázu.

$\mathcal{B}$	x_0	x_1	x_2	x_3	p_1	p_2
	0	0	0	0	1	0
A_1	8	1	2	-1	1	0
p_2	2	0	1	1	1	1

$\mathcal{B}$	x_0	x_1	x_2	x_3
A_1	10	1	3	0
A_3	2	0	1	1

Pivotujeme v riadku s pomocnou premennou.

Do nultého riadku vložíme pôvodnú účelovú funkciu.

Ukončenie pomocnej úlohy.

- Prípad $\xi^{opt}=0$, ale nemáme bázu.

$\mathcal{B}$	x_0	x_1	x_2	x_3	p_1	p_2
	0	0	0	0	1	0
A_1	8	1	2	-1	1	0
p_2	0	0	0	0	1	1

V riadku s pomocnou premennou sa nedá pivotovať.

Riadky sú lineárne závislé. Riadok s pomocou premennou vynecháme.