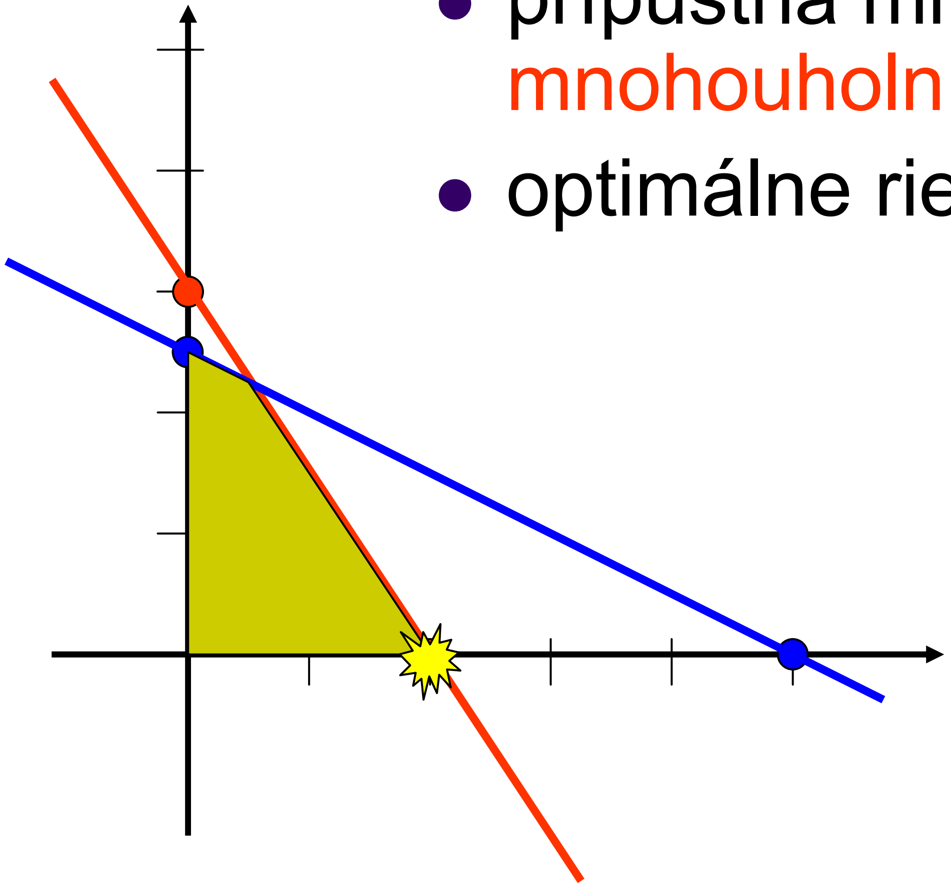
Lineárna a celočíselná optimalizácia

Základy konvexnej analýzy

Minule sme o úlohe LP videli:



- prípustná množina: mnohouholník
- optimálne riešenie: vo vrchole

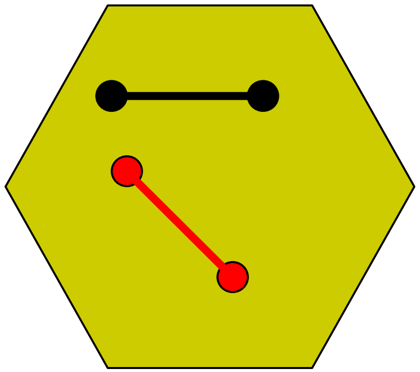
- Platí to vždy, resp. čo pre úlohy s viac premennými?
- Ako využiť tieto vlastnosti úlohy LP na jej riešenie?

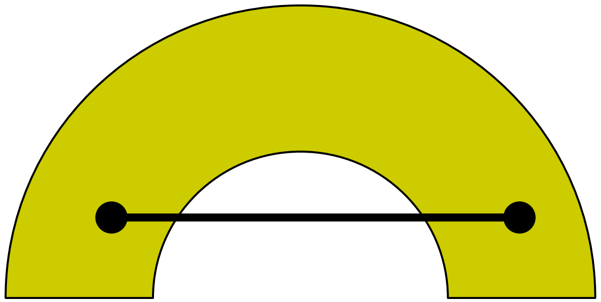
Konvexná množina

Definícia. Množina M $\subseteq \mathcal{R}^n$, M$\neq\emptyset$, je konvexná, ak

$(\forall\ \mathbf{x},\mathbf{y} \in M)\ (\forall\lambda \in \langle 0,1\rangle)\ \lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y} \in M$

geometricky: s každými dvoma svojimi bodmi obsahuje aj úsečku medzi nimi





Niektoré konvexné množiny

priamka: $p(A,\mathbf{v})=\{ x \in \mathcal{R}^n , x=A+t\mathbf{v}, t \in \mathcal{R}\}$

nadrovina: $H(\mathbf{c},h)=\{ x \in \mathcal{R}^n, c_1x_1+c_2 x_2+\ldots+c_kx_k=h\}$

polpriestor: $H^+(\mathbf{c},h)=\{ x \in \mathcal{R}^n, c_1x_1+c_2 x_2+\ldots+c_kx_k \geq h\}$

$H^-(\mathbf{c},h)=\{ x \in \mathcal{R}^n , c_1x_1+c_2 x_2+\ldots+c_kx_k \leq h\}$

Množina prípustných riešení LP

Veta 1. Množina F prípustných riešení úlohy LP je konvexná.

Dôkaz. **x,y**: dve prípustné riešenia LP bunv v ŠT.

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b},\ \mathbf{x}\geq\mathbf{0} \qquad A\mathbf{y}=\mathbf{b},\ \mathbf{y}\geq\mathbf{0}$$

$\lambda \in \langle 0,1\rangle$: chceme $\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y} \in F$

K tomu:

$\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y} \geq\mathbf{0}$

$A(\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y}) = \lambda A\mathbf{x}+(1-\lambda)A\mathbf{y} = \lambda\mathbf{b}+(1-\lambda)\ \mathbf{b} =\mathbf{b}$

QED

Množina optimálnych riešení LP

Veta 2. Množina F^* optimálnych riešení úlohy LP je konvexná.

Dôkaz. Domáca úloha

Konvexná kombinácia KK

Definícia. Konvexnou kombináciou bodov $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathcal{R}^n$ nazývame ľubovoľný bod tvaru

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \geq 0$, $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$.

Veta 3. Množina $M \subseteq \mathcal{R}^n$, $M \neq \emptyset$ je konvexná $\Leftrightarrow$

M je uzavretá na konvexné kombinácie ľubovoľného počtu svojich bodov.

Dôkaz Vety 3.

$\Leftarrow$ triviálne

$\Rightarrow$ matematickou indukciou podľa počtu bodov.

k=2 ekvivalentné s definíciou

Indukčný predpoklad: každá konvexná množina je uzavretá na KK najviac k bodov

Dôkaz Vety 3 – indukčný krok

k+1:

$${}_{j=1}\Sigma^{k+1}\lambda_j\, \mathbf{x}_j = {}_{j=1}\Sigma^{k}\lambda_j\, \mathbf{x}_j + \lambda_{k+1}\, \mathbf{x}_{k+1}$$

$$=({}_{m=1}\Sigma^{k}\lambda_m)/({}_{m=1}\Sigma^{k}\lambda_m)\,{}_{j=1}\Sigma^{k}\lambda_j\, \mathbf{x}_j + \lambda_{k+1}\, \mathbf{x}_{k+1}$$

$$= ({}_{m=1}\Sigma^{k}\lambda_m)\ {}_{j=1}\Sigma^{k}(\lambda_j / {}_{m=1}\Sigma^{k}\lambda_m)\,\mathbf{x}_j$$

$$+ \lambda_{k+1}\, \mathbf{x}_{k+1}$$

To je KK k bodov, preto v M

$$= ({}_{m=1}\Sigma^{k}\lambda_m)\ \mathbf{y} + \lambda_{k+1}\, \mathbf{x}_{k+1}$$

To je KK dvoch bodov M $\Rightarrow$ v M

QED

Konvexný obal

Definícia. Konvexný obal množiny $M \subseteq \mathcal{R}^n$, označenie conv(M), je najmenšia konvexná množina, obsahujúca M, t.j.

1. conv(M) je konvexná
2. $M \subseteq$ conv (M)
3. ak N je konvexná a $M \subseteq N$, tak $N \subseteq$ conv (M).

Charakterizácia conv(M)

Veta 4. cov(M)=S, kde

$S=\{\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n, \mathbf{x}= \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_j \in M, \lambda_i \geq 0, \sum_{j=1}^{k} \lambda_j =1\}.$

Dôkaz. Potrebujeme ukázať body 1,2,3 definície

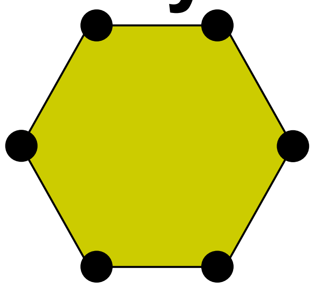
1. S je zrejme konvexná
2. M $\subseteq$ S, lebo S obsahuje jednoprvkové KK
3. každá konvexná množina, obsahujúca M, musí obsahovať KK prvkov M, teda celú S

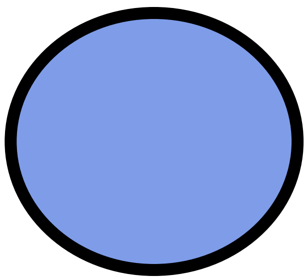
QED

Krajné body - definícia.

Definícia. Nech M je konvexná množina. Bod **x** $\in$ M sa volá krajný bod množiny M, ak sa nedá vyjadriť ako netriviálna konvexná kombinácia iných bodov množiny M, t.j.

ak $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y} + (1-\lambda)\mathbf{z}$ pre nejaké $\mathbf{y},\mathbf{z} \in$ M a $\lambda \in (0,1)$, tak $\mathbf{x}=\mathbf{y}=\mathbf{z}$.





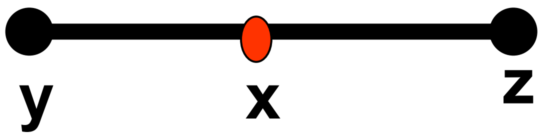
Množina krajných bodov M: ex(M)

Krajné body - význam

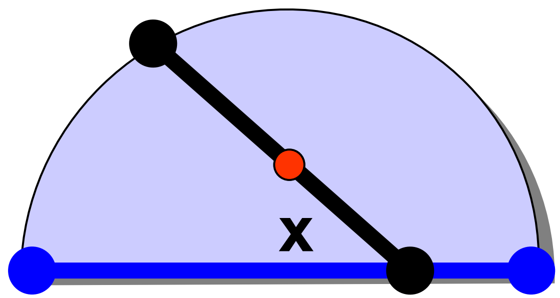
Veta 4. Nech $M \subseteq \mathcal{R}^n$ je konvexná uzavretá a ohraničená. Potom každý $\mathbf{x} \in M$ sa dá vyjadriť ako KK krajných bodov množiny M.

Náčrt dôkazu: indukciou podľa rozmeru M

rozmer M=1: jasné



x je KK **y** a **z**, tie sú krajné



priamka cez **x** pretína hranicu M v dvoch bodoch, tie sú krajné, alebo podľa IP sú KK krajných

Krajné body a úloha LP

Veta 5. Nech množ. F prípustných riešení úlohy LP je ohraničená. Potom:

1. Existuje $\min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x}: \mathbf{x} \in F\} = f^*$.
2. Existuje $\mathbf{x}^0 \in ex(F)$ také, že $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^0 = f^*$.

Dôkaz. 1. Weierstrassova veta: mat. analýza

2. Nech $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = f^*$. Bod $\mathbf{x}$ je KK krajných bodov $\mathbf{x}_j \in M$, ale pre všetky j: $\mathbf{c}^T\mathbf{x}_j \geq \mathbf{c}^T\mathbf{x}$.

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x}=\mathbf{c}^T\left(\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\,\mathbf{x}_j\right)=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\,\mathbf{c}^T\mathbf{x}_j \geq \sum_{j=1}^{k}\lambda_j\,\mathbf{c}^T\mathbf{x}= \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

Takže musí byť $\mathbf{c}^T\mathbf{x}_j = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ ... opt. kraj.bod.

QED

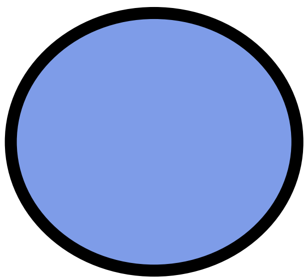
Hlavná veta o LP.

Veta 5. Pre každú minimalizačnú úlohu LP nastáva práve jedna z možností:

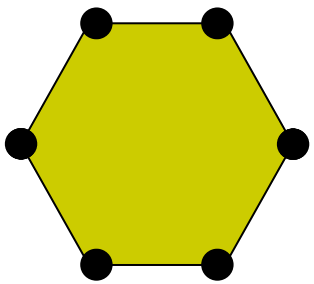
- úloha je neprípustná, t.j. $F = \emptyset$.
- úloha je neohraničená, t.j. $F \neq \emptyset$ a funkcia $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ je na F zdola neohraničená.
- úloha má optimálne riešenie v niektorom z krajných bodov množiny F.

Dôsledky pre úlohu LP

Optimum stačí hľadať medzi krajnými bodmi !



V takejto situácii by nám hľadanie medzi krajnými bodmi nepomohlo.



V tejto množine je len konečne veľa krajných bodov.

Je to ale vždy prípad úlohy LP?

Polyedrické množiny

Definícia. Uzavretá konvexná množina sa nazýva polyedrická, ak má len konečne veľa krajných bodov.

Veta. Prípustná množina úlohy LP je polyedrická.

Toto teraz ukážeme.

Bázické prípustné riešenia

Predpoklad: v matici A existuje m lineárne nezávislých stĺpcov.

(Neskôr ukážeme, ako to overiť.)

Definícia. Množina m lineárne nezávislých stĺpcov v matici A sa volá báza $\mathcal{B}$. Maticu vytvorenú stĺpcami bázy $\mathcal{B}$ označíme B.

Príklad

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{B}=(A_2,A_3,A_5)$ nie je báza, lebo $A_2+A_3=A_5$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{B}=(A_2,A_1,A_4)$ je báza

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pozor na poradie stĺpcov!

Bázické riešenia

Definícia 4. Nech $\mathcal{B}$ je báza matice A. Bázické riešenie (v skratke BR) príslušné k báze $\mathcal{B}$ je také riešenie sústavy A$\mathbf{x}$=$\mathbf{b}$, v ktorom

$$x_j = \begin{cases} 0 \text{ ak j je také, že } A_j \notin \mathcal{B} \\ \text{príslušná zložka jediného riešenia sústavy } B\mathbf{x}_0=\mathbf{b}. \end{cases}$$

Príklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B} = (A_2, A_1, A_4) \Rightarrow \mathbf{x}_{\mathcal{B}} = (x_1, x_2, 0, x_3, 0)$$

Na určenie bázických zložiek riešime sústavu:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matica B je regulárna, preto je jediné riešenie.

Príklad

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \sim \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right| \sim \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right| \sim$$

Pokračujem v úprave na jednotkovú maticu:

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right|$$

$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = (-1,1,0,2,0)$

toto bázické riešenie nie je prípustné

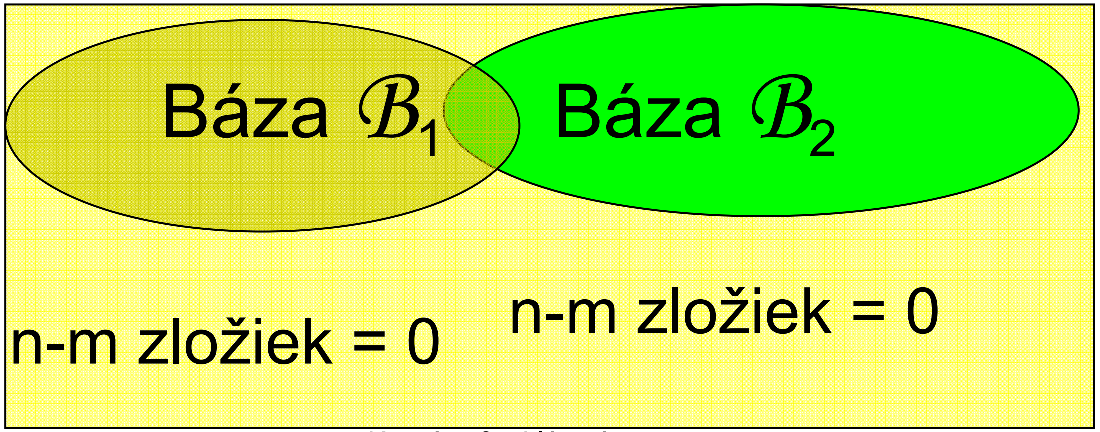
stĺpce sú

$A_2\ A_1\ A_4 \Rightarrow x_2=1,\ x_1=-1,\ x_4=2$

Bázické riešenie x je

- prípustné, ak $x \geq 0$
- degenerované, ak má viac než n-m nulových zložiek

Veta 6. Ak dve rôzne bázy zodpovedajú tomu istému BR **x**, tak **x** je degenerované.



Existencia BPR

- Veta 7. Úloha LP v štandardnom tvare s maticou A $\in \mathcal{R}$(m,n) má BPR práve vtedy, keď F$\neq\emptyset$ a hodnosť matice A je m.
- Dôkaz: geometrický argument cez krajné body konvexnej množiny

BPR a krajné body 1

Veta 8. Ak stĺpce $A_1,A_2,\ldots,A_k$ matice A sú LN a vektor $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_k,0,\ldots,0)\in F$, tak $\mathbf{x} \in ex(F)$.

Dôkaz: Nech $\mathbf{x} \notin ex(F)$. Potom existujú $\mathbf{y},\mathbf{z} \in F$ navzájom rôzne a $\lambda \in (0,1)$ tak, že $\mathbf{x}= \lambda\mathbf{y} + (1- \lambda)\mathbf{z}$.

Pre zložky i>k: $0 = \lambda\mathbf{y}_i + (1- \lambda)\mathbf{z}_i$, preto $0 = \mathbf{y}_i = \mathbf{z}_i$,

Pre zložky $i\leq k$: $\mathbf{b} = x_1A_1+ x_2A_2+\ldots+ x_kA_k$

$$\mathbf{b} = y_1A_1+ y_2A_2+\ldots+ y_kA_k$$

$$\mathbf{b} = z_1A_1+ z_2A_2+\ldots+ z_kA_k$$

Spor: vektor nemožno vyjadriť ako lin. komb. LN vektorov viac spôsobmi

QED

BPR a krajné body 2

Veta 9. Ak $\mathbf{x} \in ex(F)$, tak množina $\{A_j : x_j > 0\}$ stĺpcov matice A je lineárne nezávislá.

Dôkaz: Nech $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_k,0,\ldots,0)\in ex(F)$.

Potom $x_1A_1+ x_2A_2+\ldots+ x_kA_k = b$

Ak vektory $\{A_j : x_j > 0\}= \{A_1, A_2,\ldots,A_k\}$ sú LN,

tak existujú koeficienty $y_1,y_2,\ldots,y_k$ nie všetky $=0$:

$y_1A_1+ y_2A_2+\ldots+ y_kA_k = 0$

BPR a krajné body 2

Dôkaz (pokračovanie):

Máme: $x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_kA_k = b$ (*)

$y_1A_1 + y_2A_2 + \ldots + y_kA_k = 0$ (**)

Násobme (**) číslom $d>0$ a pričítame a odčítame od (*):

$(x_1+dy_1)A_1 + (x_2+dy_2)A_2 + \ldots + (x_k+dy_k)A_k = b$

$(x_1-dy_1)A_1 + (x_2-dy_2)A_2 + \ldots + (x_k-dy_k)A_k = b$

Zrejme $x_j = 1/2(x_j+dy_j) + 1/2(x_j-dy_j)$ pre všetky j,

ak zvolíme d dosť malé, sú to riešenia z F a teda

$x \notin ex(F)$ – spor.

QED

Sumarizácia

- Množina F prípustných riešení LP je konvexná
- Ak má optimálne riešenie, tak v nejakom bode ex(F)
- Body ex(F) zodpovedajú BPR
- Každé BPR je určené bázou, jedna báza určuje najviac jedno BPR
- Báz je najviac (n nad m)
- Riešiť úlohu LP prezretím konečne veľa báz!