# Lineárna a celočíselná optimalizácia

## Úvod do problematiky

# Úloha o organizácii výroby 1

- Firma FarLak vyrába 2 druhy farieb: Z a V, ktoré predáva po 5 000 a 2 000 Sk/tonu
- používa 2 druhy surovín: A, B, zásoby 6t a 5t
- spotreba surovín na 1t farieb:

| | Farba Z | Farba V |
|---|---|---|
| Surovina A | 3 | 2 |
| Surovina B | 1 | 2 |

# Úloha o organizácii výroby 2

- Aký výrobný plán má firma FarLak zvoliť, ak chce maximalizovať zisk?
- Kroky riešenia úlohy:

a) vytvorenie matematického modelu

b) riešenie modelu

c) interpretácia riešenia

d) postoptimalizačná analýza

# a) Matematický model

- voľba premenných:

  $x_Z$= množstvo farby Z v tonách

  $x_V$ = množstvo farby V v tonách
- zisk v tisícoch korún: $5x_Z+2x_V$
- podmienky úlohy: neprekročiť zásoby surovín

$$3x_Z+2x_V\leq 6$$
$$x_Z+2x_V\leq 5$$

- prirodzená požiadavka: $x_Z,x_V \geq 0$

# Úloha lineárneho programovania LP1

$5x_Z+2x_V \rightarrow \max$ → účelová funkcia

$3x_Z+2x_V \leq 6$

$x_Z+2x_V \leq 5$

→ ohraničenia

$x_Z, x_V \geq 0$ → podmienky nezápornosti

Charakteristické: účelová funkcia aj ohraničenia sú lineárne funkcie!

# Úloha lineárneho programovania LP2

$5x_Z+2x_V \to \max$

$3x_Z+2x_V \leq 6$

$x_Z+2x_V \leq 5$

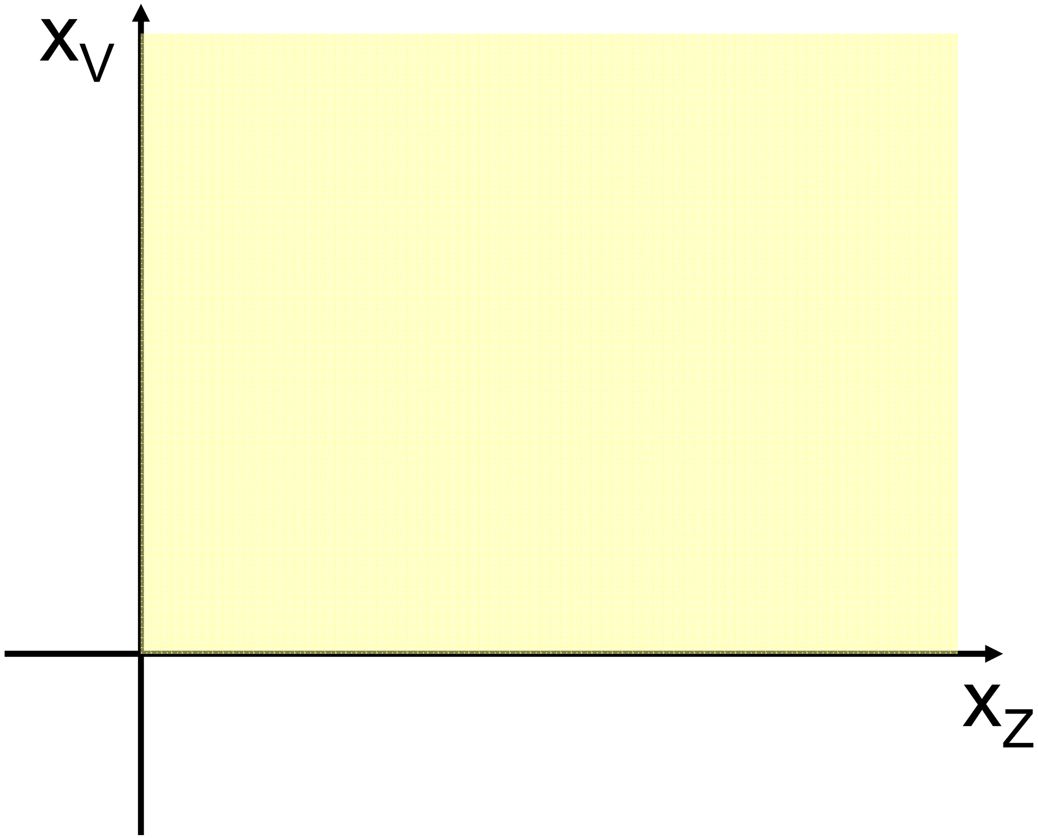
$x_Z, x_V \geq 0$

Dvojice ($x_Z, x_V$) vyhovujúce podmienkam, sú **prípustné výrobné plány (riešenia)**

Prípustných riešení je obyčajne (nekonečne) veľa. Chceme z nich vybrať **optimálne riešenie.**

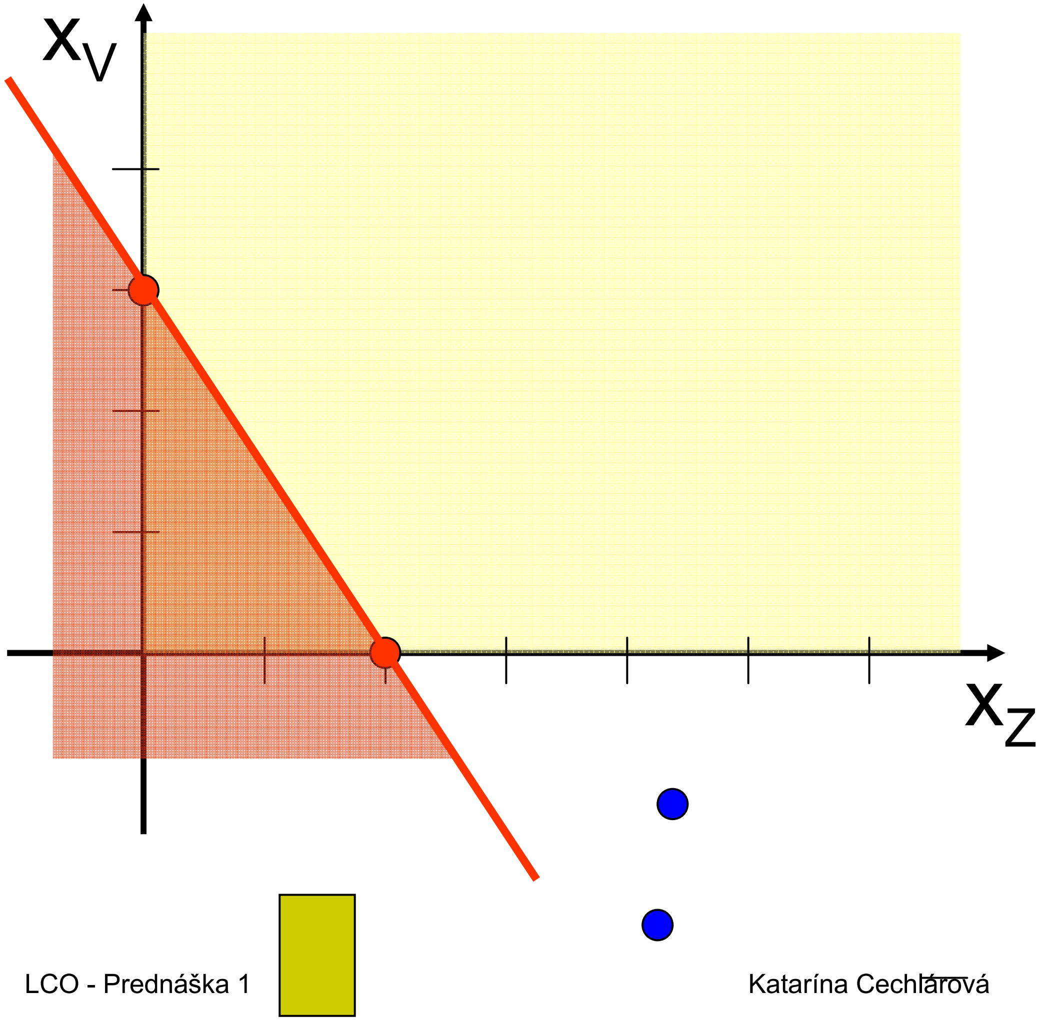
# b) Riešenie úlohy LP1

dve premenné: použijeme geometrický prístup




podmienky nezápornosti: budeme v prvom kvadrante

# Riešenie úlohy LP2



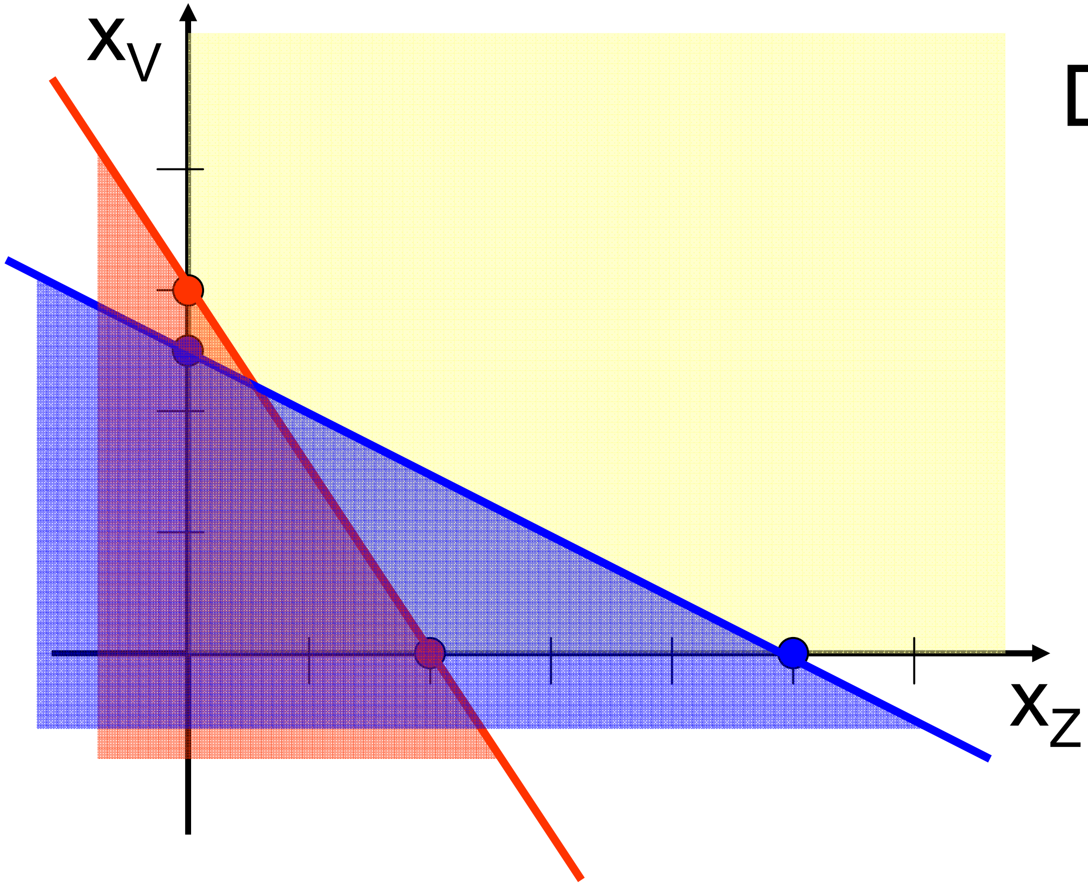

Prvé ohraničenie:

$$3x_Z+2x_V \leq 6$$

Hraničná priamka obsahuje body (2,0) a (0,3)

Nerovnici vyhovujú body vľavo od hraničnej priamky

# Riešenie úlohy LP3



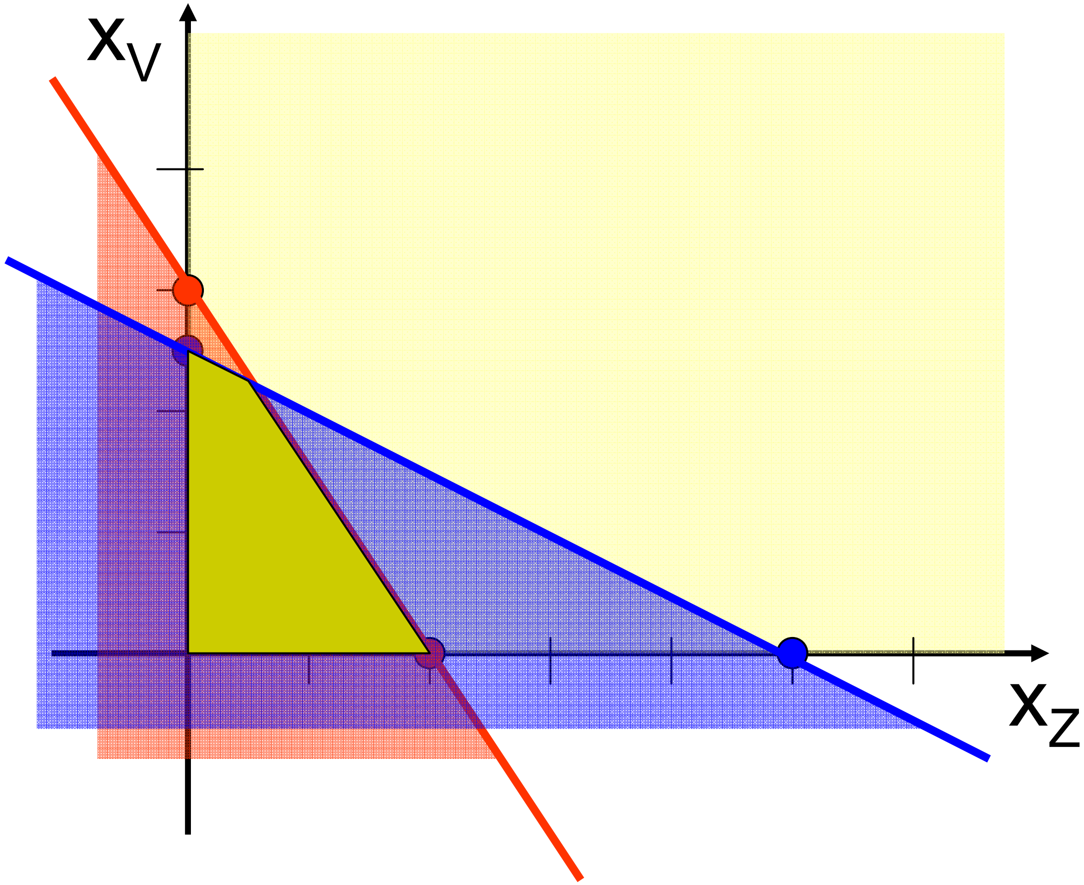

Druhé ohraničenie:

$$x_Z + 2x_V \leq 5$$

Hraničná priamka obsahuje body (5,0) a (0,2.5)

Nerovnici vyhovujú body pod hraničnou priamkou

# Riešenie úlohy LP4



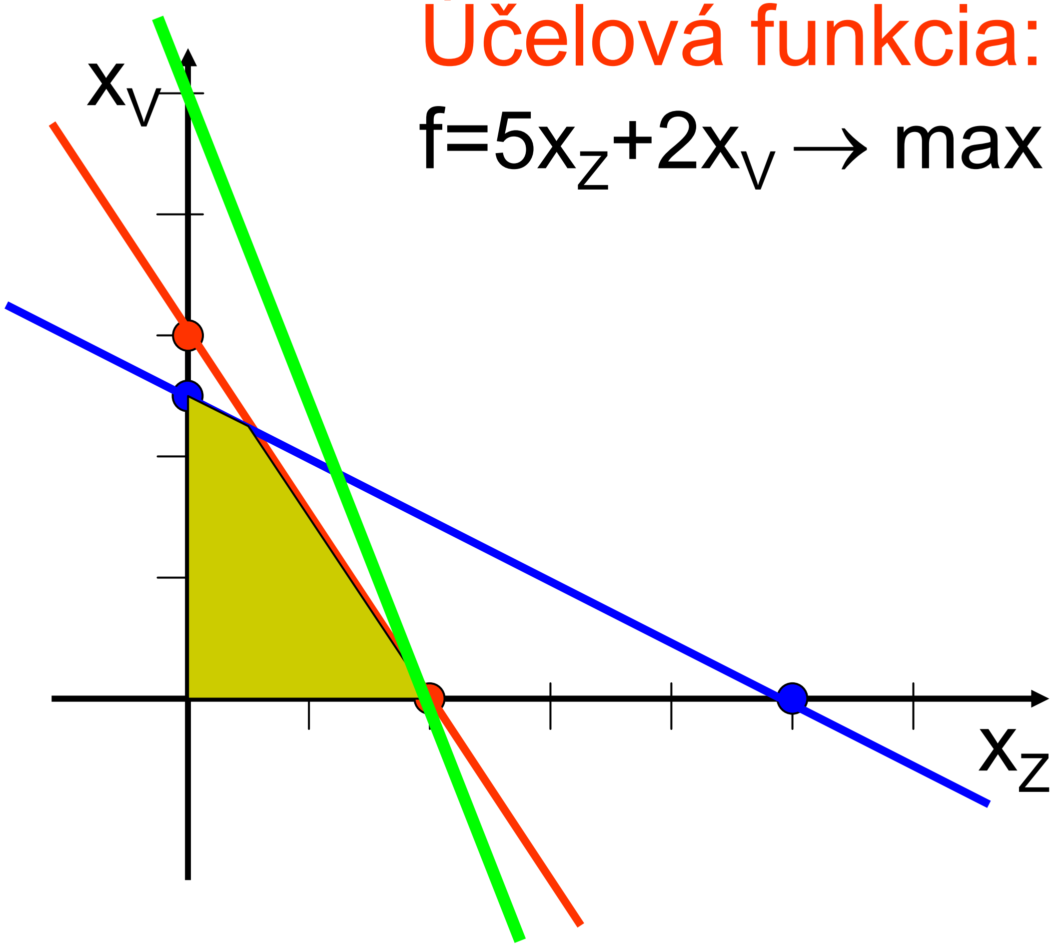

Množina prípustných riešení:
prienik

- prvého kvadrantu
- ružového trojuholníka
- modrého trojuholníka

# Riešenie úlohy LP5 – hľadanie optimálneho riešenia

Účelová funkcia:

$f = 5x_Z + 2x_V \rightarrow \max$




Body s tou istou hodnotou f ležia na priamke

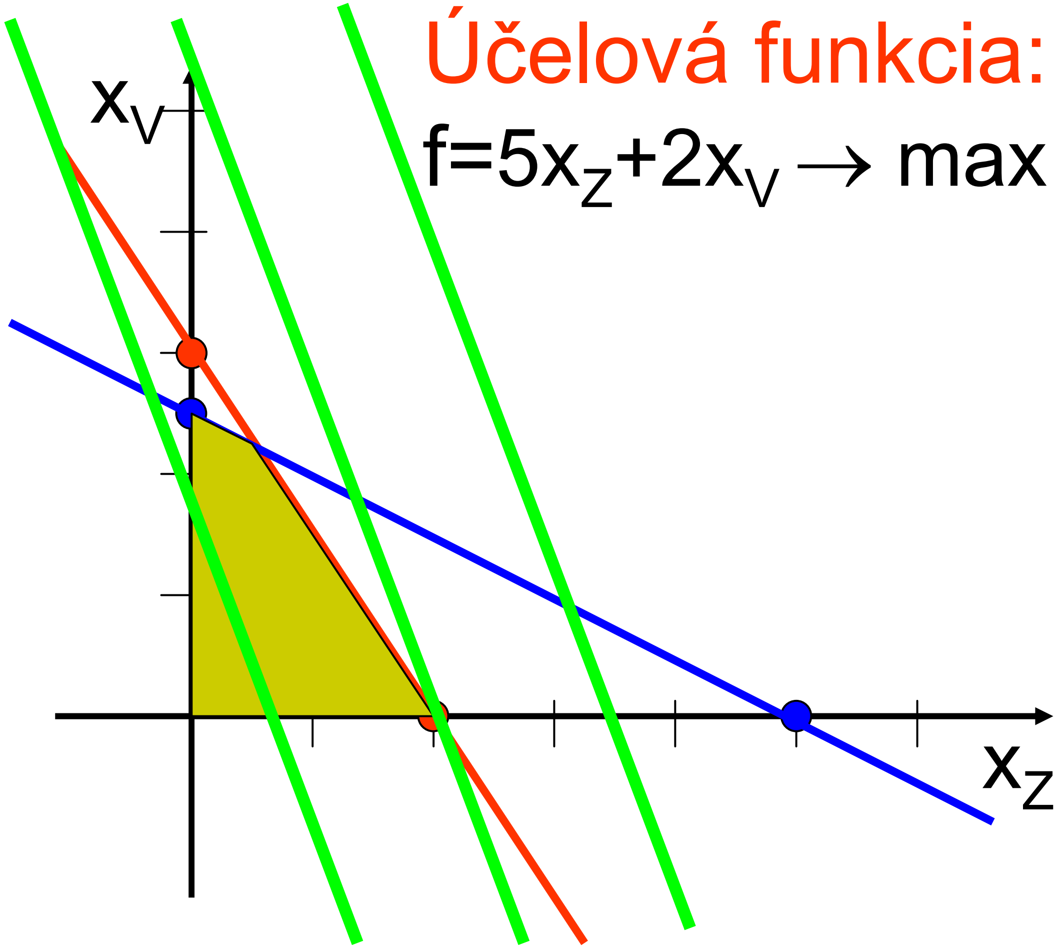
p: $5x_Z + 2x_V = \text{konst}$

Keď sa mení f, p sa posúva rovnobežne

# Riešenie úlohy LP6 – nájdenie optimálneho riešenia

Účelová funkcia:

$f = 5x_Z + 2x_V \rightarrow \max$



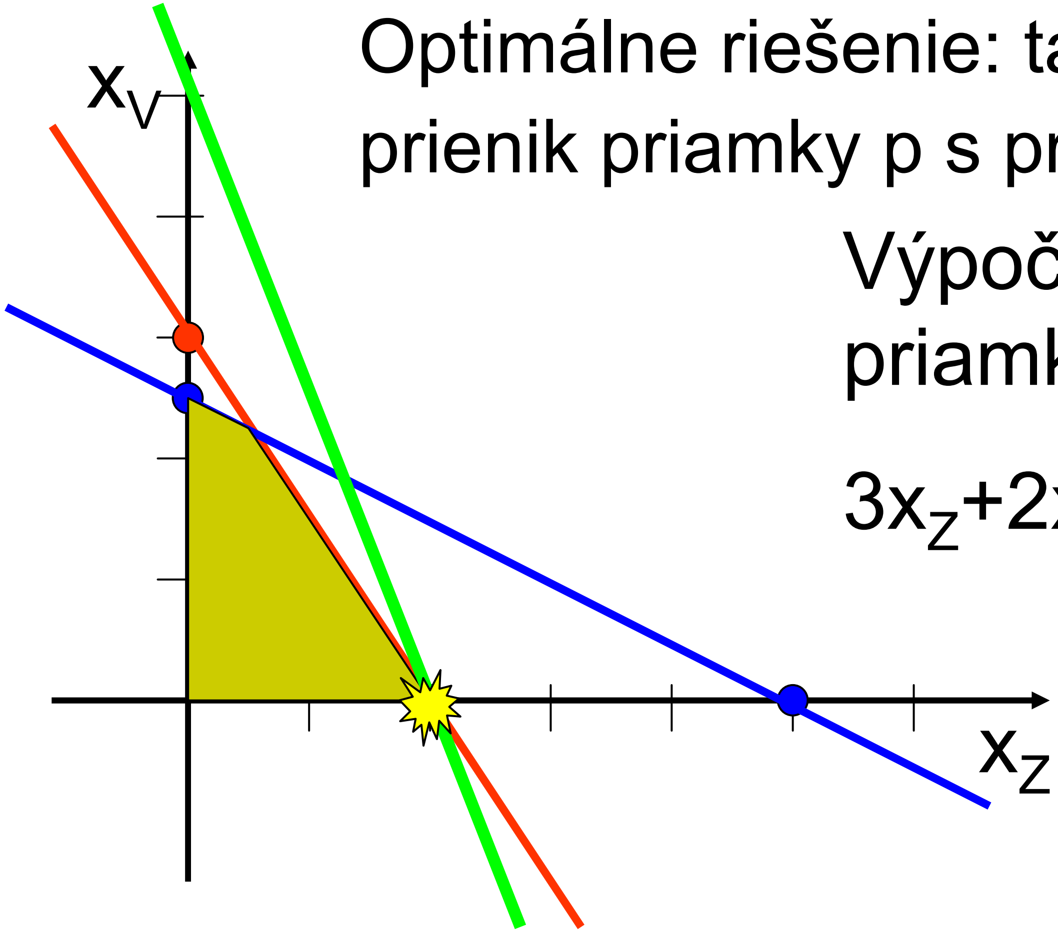

Hodnota f rastie smerom doprava

Neexistuje výrobný plán s takou hodnotou f

Oproti tejto hodnote sa f ešte môže zvýšiť

Optimálna f: posledný dotyk s prípustnou množinou

# Riešenie úlohy LP6 – nájdenie optimálneho riešenia



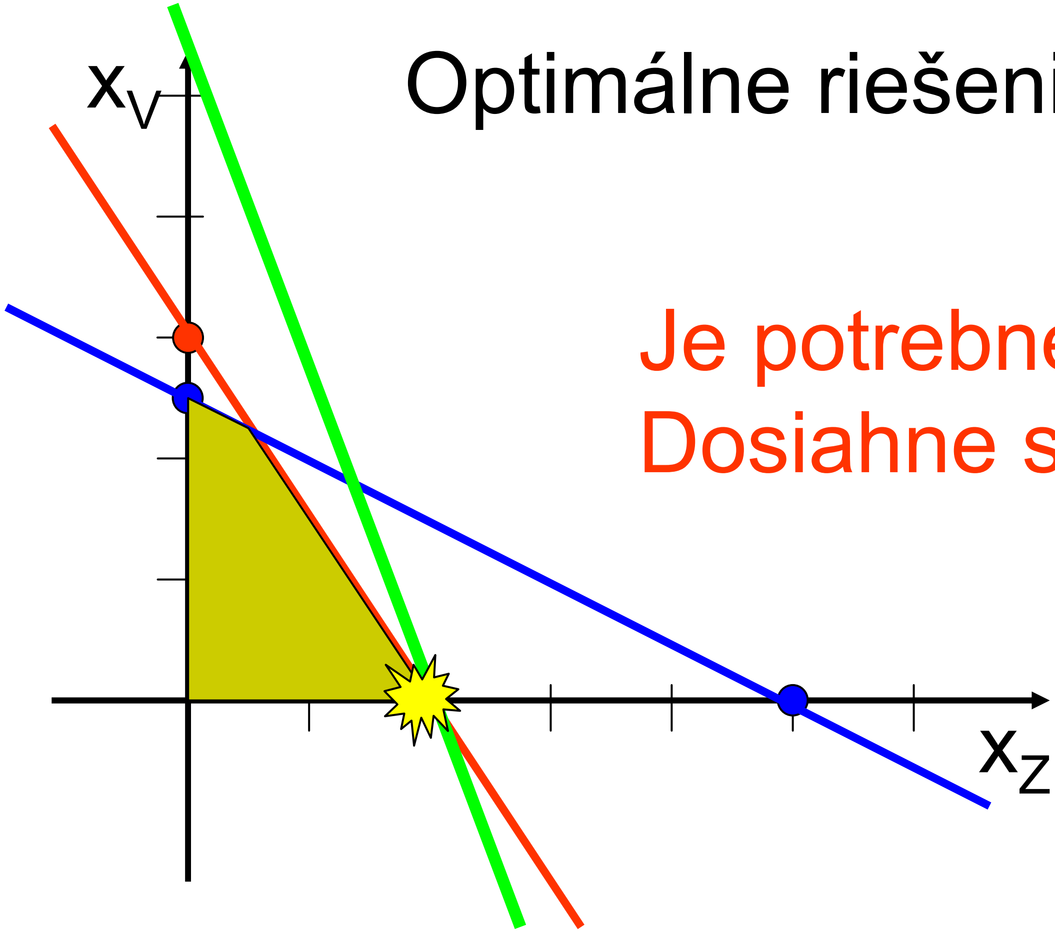

Optimálne riešenie: tam, kde je posledný prienik priamky p s prípustnou množinou

Výpočet: prienik červenej priamky a vodorovnej osi

$3x_Z+2x_V = 6 \;\&\; x_V = 0$

Optimálne riešenie: $x^{opt}=(2,0)^T$

# c) Interpretácia riešenia




Optimálne riešenie: $x^{opt}=(2,0)^T$

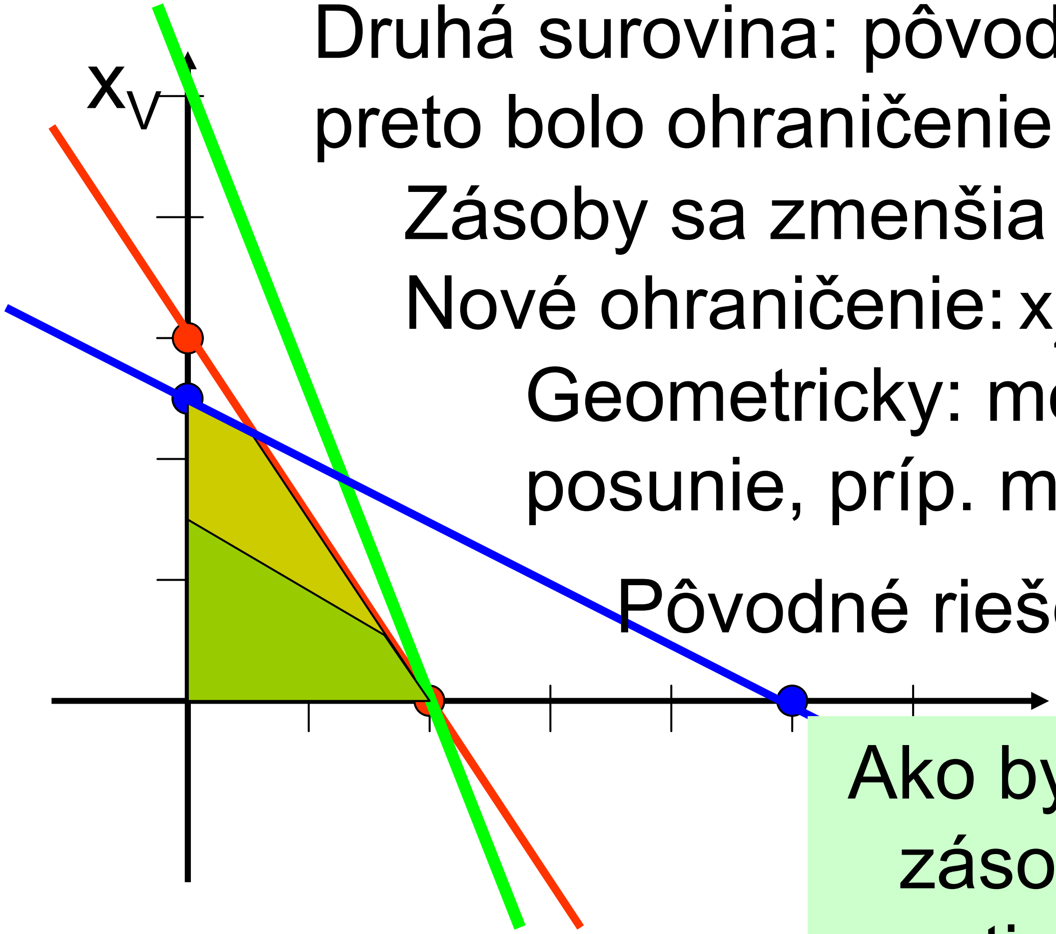
Je potrebné vyrábať 2t farby Z.
Dosiahne sa zisk 10 000 Sk.

# d) Postoptimalizačná analýza

Kladieme si otázky typu Čo keby?

i. sa zmenila veľkosť zásob niektorej suroviny?
ii. pribudlo nejaké ohraničenie?
iii. zmenili sa ceny výrobkov?
iv. atď.

# i. Zmena zásob suroviny




Druhá surovina: pôvodné zásoby 5t, preto bolo ohraničenie $x_Z+2x_V \leq 5$

Zásoby sa zmenšia na 3t.

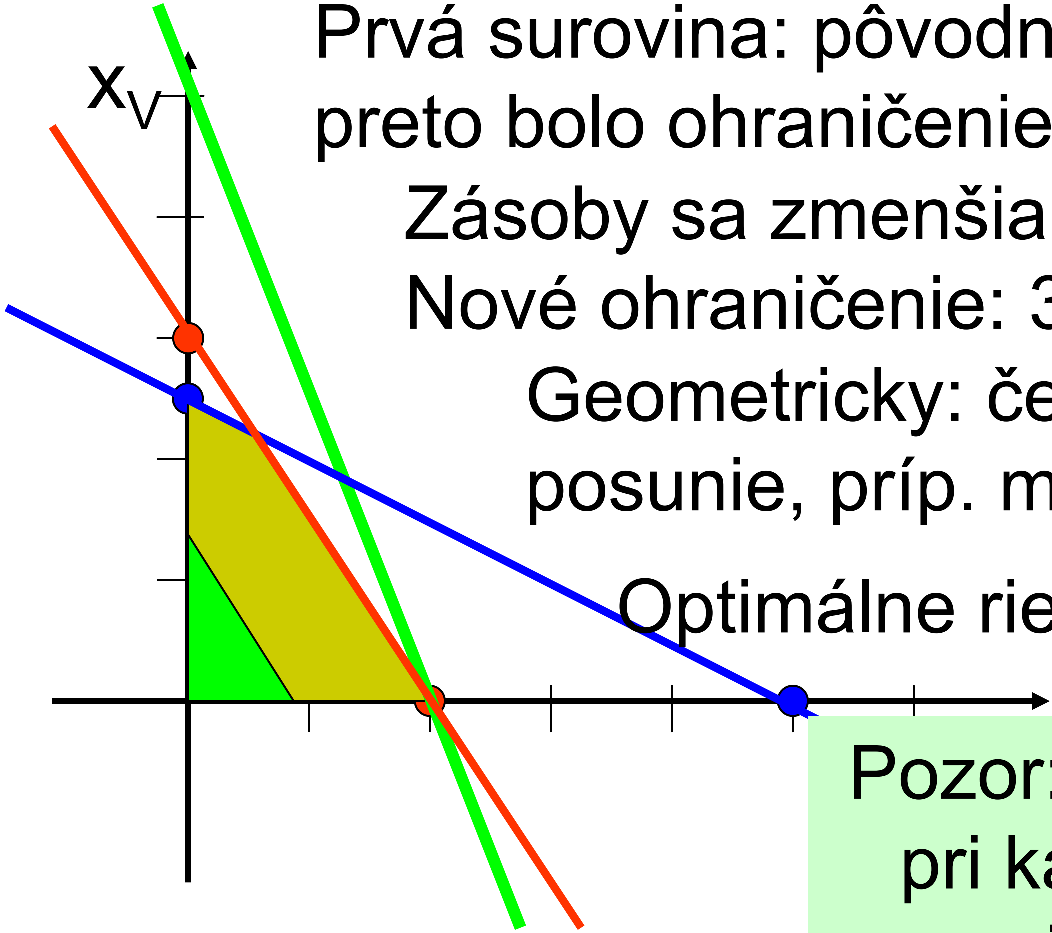
Nové ohraničenie: $x_Z+2x_V \leq 3$

Geometricky: modrá priamka sa posunie, príp. množina sa zmenší.

Pôvodné riešenie ostáva optimálne.

Ako by sa museli zmeniť zásoby, aby sa zmenilo optimálne riešenie?

# i. Zmena zásob suroviny




Prvá surovina: pôvodné zásoby 6t, preto bolo ohraničenie $3x_Z+2x_V \leq 6$

Zásoby sa zmenšia na 3t.

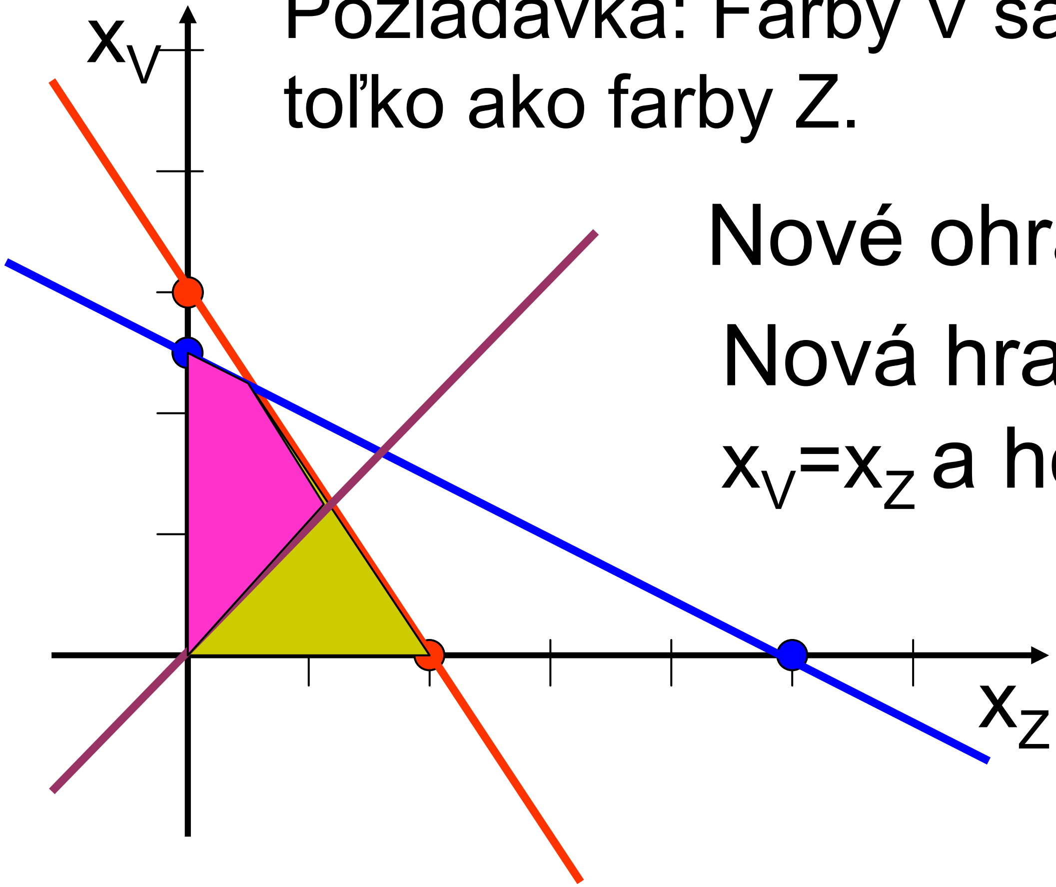
Nové ohraničenie: $3x_Z+2x_V \leq 3$

Geometricky: červená priamka sa posunie, príp. množina sa zmenší.

Optimálne riešenie sa zmení.

Pozor: optimum sa zmení pri každej zmene zásob prvej suroviny!

# ii. Nové ohraničenie.



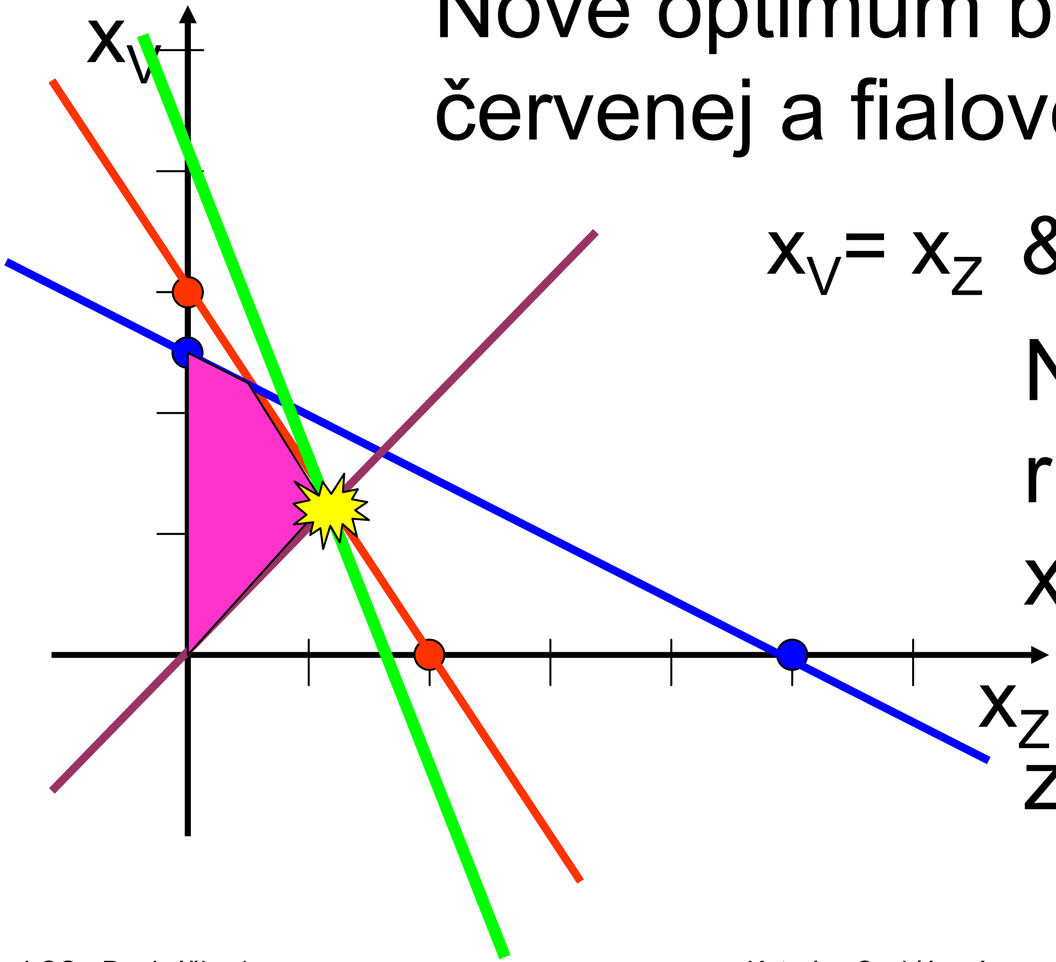

Požiadavka: Farby V sa má vyrobiť aspoň toľko ako farby Z.

Nové ohraničenie $x_V \geq x_Z$

Nová hraničná priamka $x_V = x_Z$ a horná polrovina.

Nová prípustná množina=fialová

# ii. Nové ohraničenie.

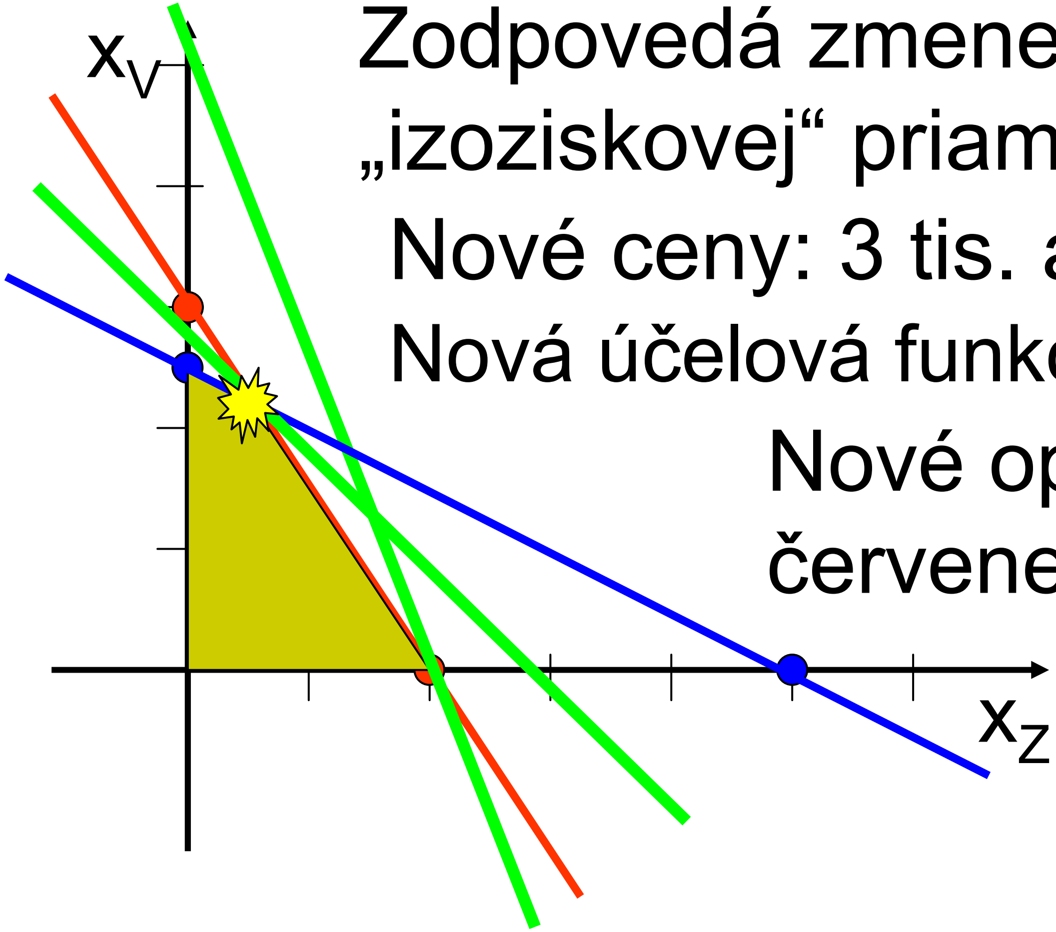



Nové optimum bude v prieniku červenej a fialovej priamky.

$x_V = x_Z$ & $3x_Z + 2x_V = 6$

Nové optimálne riešenie: $x^{opt} = (6/5, 6/5)^T$, nová hodnota zisku f = 8 400 Sk

# iii. Zmena cien výrobkov




Zodpovedá zmene sklonu „izoziskovej“ priamky.

Nové ceny: 3 tis. a 3 tis. Sk

Nová účelová funkcia: $3x_Z+3x_V \to \max$

Nové optimum v prieniku červenej a modrej priamky.

$$3x_Z+2x_V = 6$$
$$x_Z+2x_V = 5$$

$$x^{opt}=(1/2,9/4)^T$$

# Úloha o diéte - zadanie

- k dispozícii máme n druhov krmív v jednotkových cenách $c_1, c_2, \ldots, c_n$
- chceme zostaviť čo najlacnejšiu krmnú dávku, pričom sledujeme m živín
- jednotlivé živiny majú byť prítomné v množstvách $b_1, b_2, \ldots, b_m$
- vieme, že v jednotke j-tého krmiva je $a_{ij}$ jednotiek i-tej živiny

# Úloha o diéte – formulácia úlohy

- označme $x_1, x_2, \ldots, x_n$ množstvá jednotlivých krmív

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow \min$$

za podmienok

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1$$

$$\ldots\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

$$x_j \geq 0 \text{ pre } j = 1, 2, \ldots n$$

# Dopravný problém - zadanie

- máme mlyny 1,2 a pekárne A,B,C
- chceme rozviezť  múku z mlynov do pekární tak, aby
  - kapacita mlynov sa neprekročila
  - požiadavky pekární sa naplnili
  - náklady boli minimálne možné
  - dopravné náklady sú úmerné vzdialenosti a nákladu

# Dopravný problém - dáta

| Vzdia-lenosť | Pekáreň A | Pekáreň B | Pekáreň C |
|---|---|---|---|
| **Mlyn 1** | 26 | 64 | 12 |
| **Mlyn 2** | 98 | 15 | 73 |

| Kapacita (t) |
|---|
| 200 |
| 500 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Požia-davky (t)** | 100 | 250 | 300 |

# Dopravný problém – úloha LP

- označme $x_{iY}$ množstvo múky vezenej z mlyna i do pekárne Y

$$26x_{1A}+64x_{1B}+12x_{1C}+98x_{2A}+15x_{2B}+73x_{2C} \to \min$$

za podmienok

$$\left.\begin{aligned} x_{1A}+x_{1B}+x_{1C} &\leq 200 \\ x_{2A}+x_{2B}+x_{2C} &\leq 500 \end{aligned}\right\} \text{ nesmie sa prekročiť kapacita mlynov}$$

$$\left.\begin{aligned} x_{1A}+x_{2A} &\geq 100 \\ x_{1B}+x_{2B} &\geq 250 \\ x_{1C}+x_{2C} &\geq 300 \end{aligned}\right\} \text{ majú sa splniť požiadavky pekární}$$

$$x_{iY} \geq 0$$

# Úloha o rezaní - zadanie

- máme 10 ks tyčí dĺžky 10 m
- potrebujeme
  - 12 ks tyčí dĺžky 3 m a
  - 15 ks tyčí dĺžky 4 m
- chceme: minimalizovať odpad
- riešenie ako úloha LP pomocou reznými plánov

# Úloha o rezaní–rezné plány

3 ks tyčí dĺžky 3 m, 1 m odpad

2 ks tyčí dĺžky 3 m, 1 tyč dĺžky 4 m

2 ks tyčí dĺžky 4 m, 2 m odpad

# Úloha o rezaní–sumarizácia rezných plánov

| | 3m tyče | 4m tyče | odpad (m) |
|---|---|---|---|
| plán č. 1 | 3 | 0 | 1 |
| plán č. 2 | 2 | 1 | 0 |
| plán č. 3 | 0 | 2 | 2 |

Označme:

$x_1$ = počet tyčí spracovaných plánom č. 1

$x_2$ = počet tyčí spracovaných plánom č. 2

$x_3$ = počet tyčí spracovaných plánom č. 3

# Úloha o rezaní–úloha LP

| | 3m tyče | 4m tyče | odpad (m) |
|---|---|---|---|
| plán č. 1 | 3 | 0 | 1 |
| plán č. 2 | 2 | 1 | 0 |
| plán č. 3 | 0 | 2 | 2 |

Vzniknutá úloha LP:

$$x_1 + 2x_3 \to \min$$
$$3x_1 + 2x_2 \geq 12$$
$$x_2 + 2x_3 \geq 15$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$$

Musíme pridať podmienku $x_1, x_2, x_3$ celé = úloha celočíselného programovania

# Všeobecný tvar úlohy LP

Definícia 1. Všeobecná úloha lineárneho programovania

$$f(\mathbf{x}) = c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \to \min\ (\max)$$

za podmienok

$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n \le b_i$ pre $i \in M_1$

$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n \ge b_i$ pre $i \in M_2$

$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n = b_i$ pre $i \in M_3$

$x_j \ge 0$ pre $j \in N_1$

$A=(a_{ij}) \in \mathcal{R}(m,n)$, $\mathbf{b}=(b_1,b_2,\ldots,b_m)^T \in \mathcal{R}^m$

$\mathbf{c}=(c_1,c_2,\ldots,c_n)^T \in \mathcal{R}^n$

# Súčasti úlohy LP

$$f(\mathbf{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow \min\ (\max)$$

účelová funkcia

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i \quad \text{pre} \quad i \in M_1$$
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \ge b_i \quad \text{pre} \quad i \in M_2$$
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \quad \text{pre} \quad i \in M_3$$

ohraničenia

$$x_j \ge 0 \text{ pre } j \in N_1$$

podmienky nezápornosti

# Vektorový zápis úlohy LP

$$f(x) = c^T x \to \min\ (\max)$$

za podmienok

$$\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \le b_i \quad \text{pre } i \in M_1$$

$$\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \le b_i \quad \text{pre } i \in M_2$$

$$\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} = b_i \quad \text{pre } i \in M_3$$

$$x_j \ge 0 \text{ pre } j \in N_1$$

# Špeciálne úlohy LP

## Úloha v štandardnom tvare (ŠT):

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}_1 \rightarrow \min$$
$$\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \text{pre } i \in M$$
$$\mathbf{x} \geq 0$$

## Maticový zápis:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}_1 \rightarrow \min$$
$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq 0$$

# Špeciálne úlohy LP

## Úloha v kanonickom tvare (KT):

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}_1 \rightarrow \min$$

$$\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \quad \text{pre } i \in M$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

## Maticový zápis:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}_1 \rightarrow \min$$

$$\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

# Ekvivalencia tvarov úlohy LP

Veta. Všetky tvary úlohy LP sú ekvivalentné.

$f(x) \to \max \quad \longrightarrow \quad -f(x) \to \min$

$x_j \lesseqgtr 0 \quad \longrightarrow \quad x_j = x_j^+ - x_j^-, \; x_j^+, x_j^- \geq 0$

$\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} = b_i \quad \longrightarrow \quad \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \geq b_i, \; \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \leq b_i$

# Ekvivalencia tvarov úlohy LP 2

$\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \le b_i$ → $\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} + s_i = b_i, \quad s_i \ge 0$

$\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \ge b_i$ → $\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} - r_i = b_i, \quad r_i \ge 0$

$s_i, r_i$ = doplnkové premenné

$s_i$ = premenná nedostatku (slack)

$r_i$ = premenná nadbytku (surplus)

# Príklad – prevod do ŠT

Kroky 1 a 2: zmeníme účelovú fukciu a pridáme doplnkové premenné

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 &\to \max \\
3x_1 - 5x_2 &\leq 8 \\
-2x_1 + x_2 &\geq 4 \\
x_1 + x_2 &= 6 \\
x_1 &\geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-x_1 + x_2 & &\to \min \\
3x_1 - 5x_2 + s_1 & &= 8 \\
-2x_1 + x_2 & - r_1 &= 4 \\
x_1 + x_2 & &= 6 \\
x_1,\ s_1, r_1 & &\geq 0
\end{aligned}
$$

# Príklad – rozklad premenných

Premennú $x_2$ nahradíme rozdielom

$$x_2^+ - x_2^-, \quad x_2^+, x_2^- \geq 0$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $-x_1+x_2 \quad \to \min$ | | $-x_1+x_2^+-x_2^- \quad \to \min$ | |
| $3x_1-5x_2+s_1$ | $= 8$ | $3x_1-5x_2^++5x_2^-+s_1$ | $= 8$ |
| $-2x_1+x_2 \quad -r_1$ | $= 4$ | $-2x_1+x_2^+-x_2^- \quad -r_1$ | $= 4$ |
| $x_1+x_2$ | $= 6$ | $x_1+x_2^+-x_2^-$ | $= 6$ |
| $x_1, s_1, r_1$ | $\geq 0$ | $x_1, x_2^+, x_2^-, s_1, r_1$ | $\geq 0$ |

# Oblasti aplikácií LP

- poľnohospodárstvo: výpočet krmných dávok, osevných postupov
- chemický priemysel: zostavovanie zmesí, plánovanie činnosti strojov
- doprava: prevádzka obchodného letectva, plánovanie sietí
- papierenský priemysel: optimalizácia rezania
- atď.

# Niekoľko historických poznámok

- prvé myšlienky: koniec 18. stor. (Fourier,Monge)
- zač. 20. stor.: teória sústav lin. rovníc (Farkas)
- 1930: špeciálne problémy LP–dopravný a prira-ďovací, Konig a Egerváry (Maďarská metóda)
- 1941: algoritmus pre dopr. problém (Hitchcock)
- 1939: prvá práca o LP – Kantorovič (Rus)
- 1975: Nobelova cena za ekonómiu – Kantorovič a Koopmans

# Súčasný vývoj lineárneho programovania

- počas II. svet. vojny a po nej: búrlivý rozvoj LP (riadenie vojnových operácií a povojnový rozvoj)
- 1947 – všeobecná formulácia LP a simplexová metóda SM (Dantzig)
- 1955 – konečnosť SM (Wolfe)
- 1972 – exponenciálnosť SM
- 1977 – elipsoidová metóda (Chačijan)
- 1984 – metódy vnútorného bodu (Karmarkar)

# Obsah tohto predmetu a

- formulácia úloh LP a ich grafické riešenie
- riešenie úloh LP rôznymi variantami SM
- dualita a jej interpretácia
- úlohy celočíselného LP, ich vzťah k LP a riešenie
- primárno-duálny algoritmus a jeho aplikácia v kombinatorických optimalizačných úlohách

# Požiadavky na skúšku

- zvládnuť riešenie úloh ručne aj pomocou CASSIMu
- písomná skúška:
  - formulácia úloh, graf. riešenie, simplexová metóda (15 b)
  - dualita, revidovaná simplexová metóda (15 b)
  - analýza senzitivity, celočíselné LP a PD algoritmus (15 b)
  - práca s počítačom (5 b)
- na pripustenie k ústnej skúške je nutné získať aspoň 50% bodov z písomiek
- vedieť argumentovať exaktne matematicky
- Cvičenia sú povinné, je nutné na nich ovládať látku z prednášky!

# Literatúra

- K. Cechlárová – G. Semanišin: Lineárna optimalizácia, PF UPJŠ 1999,
- J. Plesník – J. Dupačová – M. Vlach: Lineárne programovanie, 1990
- Ch. Papadimitriou – K. Steiglitz: Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity,  1984
- R.J. Vanderbei, Linear Programming:Foundations and Extentions (Kluwer 2001), el. verzia: http://www.princeton.edu/~rvdb/LPbook/