ZBIERKA ÚLOH Z GEOMETRIE - II

Analytická geometria

1. Afinné zobrazenia

Definícia. Zobrazenie $\mathcal{F}$ z afinného priestoru $\mathbb{A}_n$ do $\mathbb{A}_m$, ktoré zobrazuje každú trojicu nekolineárnych bodov do jedného bodu alebo do trojice bodov, pričom sa zachováva ich deliaci pomer, sa nazýva *afinné* zobrazenie.

Rovnice afinného zobrazenia v afinnej rovine $\mathbb{A}_2$:

$$x' = a_{11}x + a_{21}y + a_{31}, \qquad y' = a_{12}x + a_{22}y + a_{32}$$

Rovnice príslušného asociovaného zobrazenia:

$$u' = a_{11}u + a_{21}v, \qquad v' = a_{12}u + a_{22}v$$

Matica zobrazenia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Úloha 1.1. Napíšte rovnice afinnej transformácie, ktorá zobrazí body

a) $A[1,2]$, $B[3,0]$, $C[1,1]$ na body $A'[2,0]$, $B'[3,-1]$, $C'[5,1]$;
b) $A[1,0]$, $B[0,1]$, $C[1,1]$ na body $A'[2,2]$, $B'[3,-1]$, $C'[4,1]$;
c) $A[1,2]$, $B[3,0]$, $C[1,1]$ na body $A'[1,2]$, $B'[3,0]$, $C'[3,3]$.

Úloha 1.2. Dokážte nasledujúce tvrdenia:

(a) Kompozícia afinných transformácií je afinná transformácia.
(b) Inverzné zobrazenie k afinnej bijekcii je afinná bijekcia.

Úloha 1.3. Dokážte, že afinity (prosté afinné transformácie) vytvárajú grupu.

Úloha 1.4. Napíšte rovnice afinného zobrazenia afinnej roviny $\mathbb{A}_2$ na priamku $\mathbb{A}_1$, v ktorom sa body $A[2,1]$, $B[3,2]$, $C[0,1]$ zobrazia do bodov so súradnicami $A'[2]$, $B'[0]$, $C'[10]$.

Úloha 1.5. Afinné zobrazenie je dané rovnicami $x' = 2x - y + 1$, $y' = x + y$.

(a) Určte obraz a vzor bodu $M[1,3]$.
(b) Určte samodružný bod.
(c) Určte obraz priamky $x + y - 2 = 0$.
(d) Určte vzor priamky $x + y + 1 = 0$.
(e) Určte vzor a obraz priamky $ax + by + c = 0$.
(f) Určte samodružné priamky.
(g) Určte obraz krivky $x^2 + y^2 = 9$.

J.Ivančo, M.Trenkler: Zbierka úloh z geometrie - II (September 2001)

Problém 1.1. Daná afinná transformácia v rovine $\mathbb{A}_2$ rovnicami $x' = 2x - y + 1$, $y' = x + y$. Aký je súvis medzi priamkami

(α) $2x + 3y - 1 = 0$ a $2(2x - y + 1) + 3(x + y) - 1 = 5x + y + 4 = 0$?
(β) $2x + 3y - 1 = 0$ a $\frac{2}{3}(x + y - 1) + (-x + 2y + 2) - 1 = \frac{1}{3}(-x + 8y + 1) = 0$?

Úloha 1.6. Určte samodružné priamky zobrazenia určené ho vzťahmi

(a) $x' = y, \quad y' = x;$
(b) $x' = y + 1, \quad y' = -y;$
(c) $x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y), \quad y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y).$

Úloha 1.7. Určte samodružné smery asociovaného zobrazenia k zobrazeniu určenému vzťahmi

(a) $x' = x + y, \quad y' = x + 2y;$
(b) $x' = x + 4y, \quad y' = 2x + 3y.$

Úloha 1.8. Určte rovnice afinného zobrazenia, v ktorom je bod $A[2,2]$ samodružný a vektory $\overrightarrow{u}(1,0)$, $\overrightarrow{v}(2,-1)$ sú vlastné vektory príslušného asociovaného zobrazenia.

Úloha 1.9. Napíšte rovnice afinity, v ktorej je os x priamkou samodružných bodov a bod $A[0,1]$ sa zobrazuje do $A'[4,2]$.

Úloha 1.10. Napíšte rovnice afinného zobrazenia v $\mathbb{A}_2$, v ktorom všetky body priamky $x + y - 2 = 0$ sú samodružné a bod $A[0,1]$ sa zobrazí do bodu $A'[4,2]$.

Úloha 1.11. Napíšte rovnice afinného zobrazenia, v ktorom je priamka $x + y - 2 = 0$ samodružná a body $A = [0,1]$, $B = [2,0]$ sa zobrazia do bodov $A' = [4,2]$, $B' = [3,0]$ (resp. $B' = [0,2]$).

Úloha 1.12. Napíšte rovnice afinného zobrazenia v $\mathbb{A}_2$, ktoré zobrazuje priamky $p : x+y+10 = 0$, $q : x+2y+3 = 0$ a $r : 2x+y-1 = 0$ postupne do priamok $p' : x+y-8 = 0$, $q' : x + 2y - 16 = 0$ a $r' : 2x + y = 0$.

Úloha 1.12. V rovine $\mathbb{A}_2$ je daný rovnobežník $ABCD$. Existuje afinné zobrazenie, v ktorom A je samodružný bod, bod B sa zobrazuje do C a bod C do D? Ak áno, ktorý bod je obrazom stredu S rovnobežníka $ABCD$? Napíšte rovnice tohto zobrazenia vo vhodnej súradnicovej sústave.

Úloha 1.13. Afinná transformácia má rovnice $x' = -3x + 4y + 6$, $y' = 4x + 3y + 2$. Na priamke $2x - 7y - 24 = 0$ (alebo $2x - y + 1 = 0$) nájdite taký bod M, aby jeho obraz M' ležal na tej istej priamke.

Úloha 1.14. Daná je afinná transformácia rovnicami $x' = x + y - 3$, $y' = 2x + y + 2$ a bod $A[3,3]$. Napíšte rovnicu priamky obsahujúcej bod A, ktorej obraz prechádza bodom A.

Úloha 1.15. Napíšte rovnice afinného zobrazenia v $\mathbb{A}_2$, v ktorom každý bod osi o_x je samodružný a bod $A[2,6]$ prevádza do $A'[-1,-4]$.

Riešenie: $x' = x - \frac{1}{2}y, y' = -\frac{2}{3}y$

Úloha 1.16. Napíšte všeobecné rovnice afinnej transformácie v $\mathbb{A}_2$, v ktorej každý bod osi o_x je samodružný.

R: $x' = a_{11}x, y' = y$

Úloha 1.17. Napíšte všeobecné rovnice afinného zobrazenia v $\mathbb{A}_2$, v ktorom os O_x je samodružná priamka a každý bod osi o_y je samodružný bod.

R: $x' = x + a_{12}y, y' = a_{22}y$

Úloha 1.18. Napíšte rovnice afinnej transformácie v $\mathbb{A}_2$, v ktorej každý bod priamky $ax + by + c = 0$ je samodružný.

R: $x' = x + \alpha(ax + by + c), y' = y + \beta(ax + by + c)$ kde s, t môžu nadobúdať ľubovoľnú hodnotu.

Úloha 1.19.

Napíšte rovnice afinnej transformácie v $\mathbb{A}_2$, v ktorom sú osi o_x a o_y samodružné a body $A[2,0]$, $B[0,4]$ prevádza do bodov $A'[-6,0]$, $B'[0,8]$.

R: $x' = -3x, y' = 2y$

Úloha 1.20. Daná je afinná transformácia rovnicami $x' = 2x + y - 2$, $y' = x - y - 1$ a bod $A[1,1]$. Napíšte rovnicu takej priamky p, že bod A leží na p a aj na jej obraze p'.

R: $2x + y - 3 = 0$

Úloha 1.21.

Napíšte rovnice afinnej transformácie v $\mathbb{A}_2$, v ktorej sa priamky $p : 5x - 6y - 7 = 0$, $q : 3x - 4y = 0$ zobrazujú do priamok $p' : 2x + y - 4 = 0$, $x - y + 1 = 0$ a bod $A[6,4]$ sa prevádza do bodu $A'[2,1]$.

R: $x' = \frac{1}{3}(-2x + 2y + 10), y' = \frac{1}{3}(-11x + 14y + 13)$

Úloha 1.22. Napíšte rovnice samodružných priamok afinnej transformácie (v $\mathbb{A}_2$) danej rovnicami $x' = 7x - y + 1, y' = 4x + 2 + 4$.

R: $2x - 2y - 3 = 0, 4x - y = 0$

Úloha 1.23. Afinné zobrazenie z $\mathbb{A}_2$ do $\mathbb{A}_3$ je dané rovnicami $x' = x - y + 1$, $y' = x + y$, $z' = y + 2$. Určte obraz počiatku v $\mathbb{A}_2$ a vzor počiatku v $\mathbb{A}_3$. Zistite, či je to prosté zobrazenie.

Úloha 1.24. Napíšte rovnice afinného zobrazenia, ktoré zobrazuje bod $A[2,0,2]$ na bod $A'[0,2,1]$, bod $B[1,1,1]$ na bod $B'[4,0,1]$, bod $C[0,1,0]$ na bod $C'[0,0,1]$, ak počiatok je samodružný.

Úloha 1.25. V rovine je daný trojuholník ABC s ťažiskom T. Afinné zobrazenia $\mathcal{F}$ zobrazuje bod C na bod T a body A, B sú samodružné. Napíšte rovnice zobrazenia vo vhodnej súradnicovej sústave.

Úloha 1.26. Napíšte rovnice afinného zobrazenia, ktoré zobrazuje elipsu $4x^2 + y^2 = 4$ na elipsu $8x^2 + y^2 = 8$.

Úloha 1.27. Napíšte rovnice zobrazenia, ktoré každému bodu $\mathbb{E}_3$ priradí jeho kolmý priemet

(a) do roviny $x + y - 2z + 1 = 0$;
(b) do roviny $ax + by + cz + d = 0$;
(c) na priamku $x - 2 = y + 1 = z$.

Úloha 1.28. Napíšte rovnice involutórnej osovej afinity, ktorej osou je priamka $x-y+1=0$ a bod $A[0,0]$ sa zobrazuje do bodu $A'[4,?]$.

P: Zobrazenie $\mathcal{F}$ sa nazýva *involutórne*, ak $\mathcal{F}.\mathcal{F}$ je identita.

Problém 1.2. Ak bod A, jeho vzor A^{-1} aj obraz A' ($\neq A$) ležia na jednej priamke, tak je táto priamka samodružná v príslušnom zobrazení ?

Problém 1.3. Aký je súvis medzi vlastnými číslami a determinantom matice zobrazenia ?

2. Zhodné zobrazenia a zhodnosti

Veta 2.1. *Zobrazenie $\mathcal{Z}$ je zhodnosť v* $\mathbb{E}_n \iff \mathbf{A}^T.\mathbf{A}=\mathbf{E}$.

Veta 2.2. *$\mathcal{Z}$ je zhodnosť v* $\mathbb{E}_2 \iff x'=\cos\alpha\ x+\sin\alpha\ y+a,\ y'=\mp\sin\alpha\ x\pm\cos\alpha\ y+b$.

Úloha 2.1. Určte koeficienty a, b tak, aby rovnice $x'=\frac{1}{2}x+ay+2$, $y'=\frac{\sqrt{3}}{2}x+by$ vyjadrovali zhodnosť v $\mathbb{E}_2$.

Úloha 2.2. Určte koeficienty a, b, c tak, aby rovnice $x'=\frac{3}{5}x+ay+1$, $y'=bx+cy$ vyjadrovali zhodnosť v $\mathbb{E}_2$.

Úloha 2.3. Zobrazenie z $\mathbb{E}_2$ do $\mathbb{E}_3$ je dané rovnicami

(a) $x'=x+\frac{y}{2}+1,\ y'=ax+\frac{y}{2}-1,\ z'=bx+cy-3;$
(b) $x'=x+by-2,\ y'=\frac{y}{2}+1,\ z'=ax+cy-3.$

Určte koeficienty a, b, c tak, aby to bolo zhodné zobrazenie.

Úloha 2.4. Zistite, či rovnice

(a) $x'=x+3,\ \ y'=-y+2,\ z'=z-1;$
(b) $x'=-x+1,\ y'=-y+2,\ z'=z-1;$
(c) $x'=x+2,\ \ y'=-y+z,\ z'=y+z,$

vyjadrujú zhodnosť $\mathbb{E}_3$. V kladnom prípade určte samodružné body a samodružné priamky.

Úloha 2.5. Určte samodružné smery a vlastné čísla asociovaného zobrazenia k zhodnosti v $\mathbb{E}_2$

(a) $x'=\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-1,\quad y'=\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y+2.$
(b) $x'=\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-1,\quad y'=-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y+2.$

Ktorá je to zhodnosť?

Úloha 2.6. Napíšte rovnice všetkých zhodností v $\mathbb{E}_2$, v ktorých je bod $M[4,0]$ samodružný a vektory $\overrightarrow{u}(1,1)$, $\overrightarrow{v}(1,-1)$ (resp. $(1,1)$, $(1,2)$) určujú samodružné smery.

Úloha 2.7. Napíšte rovnice všetkých nesúhlasných zhodností v rovine $\mathbb{E}_2$, v ktorých vektory $\overrightarrow{u}(1,2)$, $\overrightarrow{v}(2,-1)$ sú vlastné (resp. samodružné) a bod $A[0,0]$ sa zobrazí do bodu $A'[4,0]$.

Úloha 2.8. Napíšte rovnice osovej súmernosti v $\mathbb{E}_2$, v ktorej sa bod $A[2,3]$ zobrazí do bodu $A'[-2,5]$.

Úloha 2.9. Napíšte rovnice osovej súmernosti v $\mathbb{E}_2$ určenej priamkou

(a) $x + y + 1 = 0$;
(b) $ax + by + c = 0$.

Úloha 2.10. Napíšte rovnice zhodnosti, ktorá každému bodu $\mathbb{E}_3$ priradí bod súmerný podľa

(a) roviny $x + 2y - z + 4 = 0$;
(b) priamky $x = 1 + t$, $y = 2 - 3t$, $z = -t$;
(c) bodu $S[1, 3, -2]$.

Úloha 2.11. Napíšte rovnice otáčania v $\mathbb{E}_2$, v ktorom sa bod $A[5, 5]$ zobrazí do bodu $A'[8, 1]$ a jeho stred leží na priamke 2x+3y=0.
R: $x = \frac{4}{5}x = \frac{3}{5}y, y = \frac{-3}{5}x + \frac{3}{5}y$

Úloha 2.12. Napíšte rovnice posúvania v $\mathbb{E}_2$, v ktorom sa bod $A[5, 5]$ zobrazí do bodu $A'[8, 1]$.

Úloha 2.13. Pomocou vhodnej zhodnosti nájdite rovnice strán rovnostranného trojuholníka, ak rovnica jednej strany je $x + 3y = 0$ a ťažisko je $T[2, 4]$.

Úloha 2.14. Napíšte rovnice všetkých zhodností v rovine, ktoré zobrazujú bod $[1, 0]$ na bod $[4, -2]$ a bod $[2, 3]$ na $[2, ?]$.

Úloha 2.15. Štvorec má vrcholy $A[0, 0]$, $B[1, 0]$, $C[1, 1]$, $D[0, 1]$. Napíšte rovnice všetkých zhodností, ktoré zobrazujú bod A do stredu štvorca S a bod D do bodu $D'[d, 0]$, pričom $d > 0$.

Úloha 2.16. Afinné zobrazenie $\mathbb{E}_2$ na seba zobrazuje postupne vrcholy trojuholníka ABC do vrcholov B, C, A. Môže byť táto transformácia zhodnosťou ? Ak áno, napíšte jej rovnice vzhľadom k vhodnej karteziánskej súradnicovej sústave.

Úloha 2.17. Koľko existuje zhodnosti v $\mathbb{E}_2$, ktoré zobrazujú počiatok do bodu $[3, 4]$ a bod $[0, 5]$ do bodu na priamke $4x - 3y = 0$. Napíšte ich rovnice.

Úloha 2.18. Napíšte rovnice všetkých zobrazení, v ktorých je kružnica $x^2 + y^2 = 4$ samodružná.

Úloha 2.19. Nájdite samodružné body zhodnosti v $\mathbb{E}_3$ zloženej z dvoch rovinových súmerností podľa rovín $x + z = 0$ a $x - y + 2z - 1 = 0$.

Úloha 2.20. V zhodnosti $\mathbb{E}_3$ sú body $[0, 0, 0]$ a $[1, 1, 1]$ samodružné, bod $A[1, -1, 0]$ sa zobrazí do bodu A' ležiaceho v rovine $x = 0$. Určte súradnice bodu A' a transformačné rovnice tejto zhodnosti.

Úloha 2.21. Dokážte, že zhodnosť zobrazuje priamku na priamku.

Problém. Ak determinant matice zobrazenia je rovný 1 (napr. $x = 5x + 2y, y = 2x + y$), tak toto zobrazenie nemusí byť zhodné. Dokážte, že v tomto prípade zobrazenie zachováva veľkosť obsahu útvarov.

3. Podobné zobrazenia

Veta 3.1. *Zobrazenie $\mathcal{Z}$ je podobnosť s koeficientom k* $\iff \mathbf{A}^T.\mathbf{A} = k^2\mathbf{E}$.

Veta 3.2. *$\mathcal{Z}$ je podobnosť s koef. k v $\mathbb{E}_2$* $\iff x' = k\ \cos\alpha\ x + k\ \sin\alpha\ y + a,\ y' = \mp k\ \sin\alpha\ x \pm k\ \cos\alpha\ y + b$.

Veta 3.3. *$\mathcal{Z}$ je rovnoľahlosť s koeficientom κ* $\iff \mathbf{A} = \kappa\mathbf{E}$.

Úloha 3.1. Napíšte rovnice rovnoľahlosti v $\mathbb{E}_2$, v ktorej sa bod $A[1,2]$ zobrazí do bodu $A'[3,5]$ a $B[3,-2]$ do $B'[?,2]$.

Úloha 3.2. Napíšte rovnice rovnoľahlosti v $\mathbb{E}_3$, ktorá zobrazuje bod $A[2,0,3]$ do bodu $A'[1,0,0]$ a bod $B[0,0,2]$ do $B'[3,a,b]$. Pre ktoré a, b má úloha riešenie ?

Úloha 3.3. Určte koeficienty a, b tak, aby rovnice $x' = 2x + ay + 2$, $y' = 3x - by$ vyjadrovali podobnosť v $\mathbb{E}_2$.

Úloha 3.4. Určte koeficienty a, b tak, aby zobrazenie z $\mathbb{E}_2$ do $\mathbb{E}_3$ dané rovnicami $x' = 2x + ay$, $y' = x + by$, $z' = y$ bolo podobné zobrazenie.

Úloha 3.5. Dokážte, že afinné zobrazenie v $\mathbb{E}_2$, ktoré je vyjadrené rovnicami $x' = 2x + 5y - 1$, $y' = -5x + 2y + 4$ je podobnosť. Určte samodružné body a samodružné smery asoc. zobrazenia.

Úloha 3.6. V rovine je daný bod $S[1,-1]$ a priamky $p : 3x + 6y - 1 = 0$, $q : x + ay - 3 = 0$. Napíšte rovnice rovnoľahlosti $\mathcal{H}$ so stredom S, ktorá zobrazuje priamku p na q.

Úloha 3.7. Dokážte, že ku každým dvom parabolám existuje podobné zobrazenie, ktoré zobrazuje jednu do druhej.

Úloha 3.8. Napíšte rovnice podobností, ktoré zobrazujú bod $[1,1]$ do počiatku a počiatok do bodu $[0,2]$.

Úloha 3.9. Napíšte rovnice všetký podobnosti v $\mathbb{E}_2$, v ktorých sa bod $A[1,0]$ zobrazí na bod $A'[4,-2]$ a bod $B[2,3]$ na bod $B'[2,-8]$.

Úloha 3.10. Napíšte rovnice podobnosti, v ktorej je počiatok samodružný bod a obraz bodu $[5,-3]$ je bod $[1,1]$.

Úloha 3.11. V rovine je daný štvorec $ABCD$ so stredom S. Určte obraz bodu C v podobnosti, ktorá zobrazuje body A, B, S postupne do bodov B, C, D. Určte samodružný bod tejto podobnosti.

Úloha 3.12. Rozložte podobnosť $x' = 2x - y + 5$, $y' = x + 2y - 1$ na rovnoľahlosť a zhodnosť.

Úloha 3.13. Rozložte podobnosť $x' = 2x - y + 5$, $y' = x + 2y - 1$ na otáčanie a rovnoľahlosť tak, aby ich stredy boli totožné.

Úloha 3.14. Napíšte analytické vyjadrenie podobného zobrazenia z euklidovskej roviny $\mathbb{E}_2$ do priestoru $\mathbb{E}_3$, ktoré zobrazuje bod $A[1,0]$ do bodu $A'[1,0,0]$ a priamku $y - 1 = 0$ do priamky $x = t$, $y = t$, $z = t$. Koľko takýchto zobrazení existuje ?

Úloha 3.15. S použitím vety 3.2 dokažte, že každá vlastná podobnosť má práve jeden samodružný bod.

(N. Deterninat sústavy, ktorej riešením sú samodružné body nemôže byť rovný 0.)

Doplnok

V euklidovskej rovine $\mathbb{E}_2$ majme daný súradnicový systém $< P; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2} >$. Nech $\mathcal{Z}$ je zhodnosť a φ príslušné asociované zobrazenie.
Nech je daný bod
$$X = P + x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}.$$
Tento sa zobrazí do bodu
$$\mathcal{Z}(X) = P + x'\overrightarrow{e_1} + y'\overrightarrow{e_2} = \mathcal{Z}(P) + x\overrightarrow{\varphi(e_1)} + y\overrightarrow{\varphi(e_2)}.$$
Súvis medzi čiarkovanými a nečiarkovanými súradnicami je daný vzťahmi
$$x' = a_{11}x + a_{21}y + a_{31} \qquad y' = a_{12}x + a_{22}y + a_{32},$$
pričom
$$\overrightarrow{\varphi(e_1)} = a_{11}\overrightarrow{e_1} + a_{12}\overrightarrow{e_2} \qquad \overrightarrow{\varphi(e_2)} = a_{21}\overrightarrow{e_1} + a_{22}\overrightarrow{e_2}.$$
Predpokladame, že $\mathcal{Z}$ je zhodnosť.

Platí - asociované zobrazenie k zhodnosti zachováva skalárny súčin. (Skalárny súčin môžme vyjadriť pomocou veľkosti vektora.)
$$\overrightarrow{\varphi(u)}.\overrightarrow{\varphi(v)} = \frac{1}{2}[\|\overrightarrow{\varphi(u)} + \overrightarrow{\varphi(v)}\|^2 - \|\overrightarrow{\varphi(u)}\|^2 - \|\overrightarrow{\varphi(v)}\|^2] =$$
$$\frac{1}{2}[\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2] = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$$
platí
$$\overrightarrow{\varphi(e_i)}.\overrightarrow{\varphi(e_j)} = \delta_{i,j}$$
odtiaľ
$$\overrightarrow{\varphi(e_1)}.\overrightarrow{\varphi(e_1)} = (a_{11}\overrightarrow{e_1} + a_{12}\overrightarrow{e_2}).(a_{11}\overrightarrow{e_1} + a_{12}\overrightarrow{e_2}) = a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1$$
$$\overrightarrow{\varphi(e_1)}.\overrightarrow{\varphi(e_2)} = (a_{11}\overrightarrow{e_1} + a_{12}\overrightarrow{e_2}).(a_{21}\overrightarrow{e_1} + a_{22}\overrightarrow{e_2}) = a_{11}\ a_{12} + a_{12}\ a_{22} = 0$$
$$\overrightarrow{\varphi(e_2)}.\overrightarrow{\varphi(e_2)} = (a_{21}\overrightarrow{e_1} + a_{22}\overrightarrow{e_2}).(a_{21}\overrightarrow{e_1} + a_{22}\overrightarrow{e_2}) = a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1$$
Z prvého vzťahu vyplýva, že existuje číslo $\alpha \in < 0, 2\pi)$ tak, že môžeme položiť
$$a_{11} = \cos\alpha \qquad \text{a} \qquad a_{12} = \sin\alpha.$$
Dosadením do druhého vzťahu dostávame
$$\cos\alpha\ a_{21} + \sin\alpha\ a_{22} = 0$$
a odtiaľ $a_{21} = -\epsilon\ \sin\alpha$, $a_{22} = \epsilon\ \cos\alpha$. Pretože z tretieho vzťahu vyplýva
$$(-\epsilon\ \sin\alpha)^2 + (\epsilon\ \cos\alpha)^2 = 1,$$
platí $\epsilon = \pm 1$. Ukázali sme, ak $\mathcal{Z}$ je zhodnosť, tak za dá vyjadriť v tvare
$$x' = \cos\alpha\ x - \sin\alpha\ y + a_{31} \qquad y' = \sin\alpha\ x + \cos\alpha\ y + a_{32}$$
alebo
$$x' = \cos\alpha\ x + \sin\alpha\ y + a_{31} \qquad y' = \sin\alpha\ x - \cos\alpha\ y + a_{32}$$

Navyše, ak $\mathcal{Z}$ je zhodnosť, tak platí
$$A^T.A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}^2 & a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{12} & a_{21}^2 + a_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Podobným spôsobom môžeme dokázať tvrdenie o zhodnosti v priestore $\mathbb{E}_n$, pre $n \geq 3$.

Veta. *Ak $\mathcal{Z}$ je zhodnosť v $\mathbb{E}_n$, tak $A^T.A = E$.*

Platí obrátené tvrdenie:

Veta. *Rovnice*

$$x' = a_{11}x + a_{21}y + a_{31} \qquad y' = a_{12}x + a_{22}y + a_{32},$$

kde $A^T.A = E$ vyjadrujú zobrazenie, ktoré zachováva vzdialenosť ľubovoľnej dvojice bodov.

Nech bod

$$X[x_1, y_1] \longmapsto X'[x_1', y_2'] \qquad \text{a} \qquad Y[x_2, y_2] \longmapsto Y'[x_2', y_2']$$

Platí

$$\begin{aligned}
|X'Y'|^2 =& (x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2 \\
=& [(a_{11}x_1 + a_{21}y_1 + a_{31}) - (a_{11}x_2 + a_{21}y_2 + a_{31})]^2 \\
& + [(a_{12}x_1 + a_{22}y_1 + a_{32}) - (a_{12}x_2 + a_{22}y_2 + a_{32})]^2 \\
=& [a_{11}(x_1 - x_2) + a_{21}(y_1 - y_2)]^2 + [a_{12}(x_1 - x_2) + a_{22}(y_1 - y_2)]^2 \\
=& [a_{11}^2(x_1 - x_2)^2 + a_{11}a_{21}(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + (a_{21}^2(y_1 - y_2)] + \\
& + [a_{12}^2(x_1 - x_2)^2 + a_{12}a_{22}(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + a_{22}^2(y_1 - y_2)^2 \\
=& (a_{11}^2 + a_{12}^2)(x_1 - x_2)^2 + (a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22})(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \\
& + (a_{21}^2 + a_{22}^2)(y_1 - y_2)^2 = \\
=& (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = \|XY\|^2
\end{aligned}$$

* *

Podobným spôsobom môžeme dokázať nasledujúce vety:

Veta. *$\mathcal{Z}$ je podobnosť s koeficientom k v rovine práve vtedy, keď sa sa dá vyjadriť rovnicami*

$$\begin{aligned}
x' &= k\cos\alpha\ x \mp k\sin\alpha\ y + a_{31} \\
y' &= k\sin\alpha\ x \pm k\cos\alpha\ y + a_{32}
\end{aligned}$$

Veta. *$\mathcal{Z}$ je podobnosť v E_n s koeficientom k práve vtedy, ak platí $A^T.A = k^2E$.*

* *

Klasifikácia zhodnosti použitím samodružných bodov.

Samodružný bod: $X[x, y] \longmapsto X'[x', y']$
Nech $\epsilon = 1$, t.j. je to súhlasná zhodnosť.

$$\begin{aligned}
x &= \cos\alpha\ x - \sin\alpha\ y + a_{31} \\
y &= \sin\alpha\ x + \cos\alpha\ y + a_{32}
\end{aligned}$$

úpravou

$$\begin{aligned}
(\cos\alpha - 1)x - \sin\alpha\ y &= -a_{31} \\
\sin\alpha\ x + (\cos\alpha - 1)y &= -a_{32}
\end{aligned}$$

počet riešení závisí od determinantu

$$\begin{vmatrix} (\cos\alpha - 1) & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & (\cos\alpha - 1) \end{vmatrix} = (\cos\alpha - 1)^2 + \sin\alpha^2 = \cos\alpha^2 + \sin\alpha^2 - 2\cos\alpha + 1 = 2(1 - \cos\alpha)$$

Ak $D \neq 0$, tak sústava má jediné riešenie t.j. existuje jediný samodružný bod. V tomto prípade je $\alpha \neq 0^o$. Ak $D = 0$, tak existuje nekonečne veľa samodružných bodov (identita) alebo neexistuje žiadny (posúvanie).

Nech $\epsilon = -1$, t.j. je to nesúhlasná zhodnosť.

$$x = \cos\alpha\ x + \sin\alpha\ y + a_{31}, \qquad y = \sin\alpha\ x - \cos\alpha\ y + a_{32}$$

úpravou

$$(\cos\alpha - 1)x + \sin\alpha\ y = -a_{31} \qquad \sin\alpha\ x - (\cos\alpha + 1)y = -a_{32}$$

počet riešení závisí od determinantu

$$\begin{vmatrix} (\cos\alpha - 1) & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -(\cos\alpha + 1) \end{vmatrix} = -(\cos\alpha - 1)(\cos\alpha + 1) - \sin\alpha^2 = -\cos\alpha^2 - \sin\alpha^2 + 1 = 0$$

pre všetky α. V tomto prípade existuje priamka samodružných bodov (osová súmernosť) alebo žiadny (posunuté zrkadlenie.)

Prehľad zobrazení:
Osová súmernosť (vlastné čísla asociovaného zobrazenia $\lambda = +1, -1$)
Posúvanie ($\lambda = +1, +1$)
Otáčanie (nemá vlastné čísla - okrem stredovej súmernosti, keď $\lambda = -1, -1$)
Posunuté zrkadlenie ($\lambda = +1, -1$)

Syntetická geometria

4. Zhodnosti v rovine $\mathbb{E}_2$

Veta 4.1. *Zhodnosť v rovine $\mathbb{E}_2$ je*

(α) *osová súmernosť,*
(β) *posúvanie (špeciálne-identita),*
(γ) *otáčanie (šepviálne-stredová súmernosť) alebo*
(δ) *rezultanta osovej súmernosti a posúvania, pričom vektor posúvania je v zamerani osi súmernosti (nazývané **posunuté zrkadlenie, posúvaná súmernosť.**)*

Veta 4.2. *Každá zhodnosť v rovine $\mathbb{E}_2$ sa dá zložiť z najviac troch osových súmerností.*

Úloha 4.1. Určte zobrazenie, ktoré vznikne zložením:

(a) dvoch stredových súmerností $\mathcal{S}_A$ a $\mathcal{S}_B$;
(b) dvoch otáčaní $\mathcal{R}_1(S_1,\omega_1)$ a $\mathcal{R}_2(S_2,\omega_2)$;
(c) posúvania $\mathcal{T}(\overrightarrow{v})$ a stredovej súmernosti $\mathcal{S}_A$;
(d) otáčania $\mathcal{R}(S,\omega)$ a posúvania $\mathcal{T}(\overrightarrow{v})$ (vymeňte ich poradie a určte súvis medzi $\mathcal{T}.\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}.\mathcal{T}$);
(e) dvoch posúvaní $\mathcal{T}_1(\overrightarrow{v_1})$ a $\mathcal{T}_2(\overrightarrow{v_2})$.

Úloha 4.2. Daný je pravidelný 5-uholník $ABCDE$. Určte zobrazenie, ktoré vznikne postupným zložením piatich stredových súmerností $\mathcal{S}_A$, $\mathcal{S}_B$, $\mathcal{S}_C$, $\mathcal{S}_D$ a $\mathcal{S}_E$.

Úloha 4.3. Útvar súmerný podľa dvoch navzájom kolmých osí je súmerný aj podľa stredu. Platí aj obrátené tvrdenie ?

Úloha 4.4. Dané sú dve zhodné rôznobežné úsečky AB a $A'B'$. Zostrojte otáčanie, ktoré prevedie AB do $A'B'$.

Úloha 4.5. Určte zobrazenie, ktoré vznikne zložením:

(a) osovej súmernosti $\mathcal{O}_p$ a stredovej súmernosti $\mathcal{S}_S$;
(b) osovej súmernosti $\mathcal{O}_p$ a otáčania $\mathcal{R}(S,\omega)$;
(c) pos. zrkadlenia $\mathcal{P}(p,\overrightarrow{v})$ a posúvania $\mathcal{T}(\overrightarrow{v})$;
(d) pos. zrkadlenia $\mathcal{P}(p,\overrightarrow{v})$ a otáčania $\mathcal{R}(S,\omega)$.

Úloha 4.6. Daný je štvorec $ABCD$. Určte zobrazenie, ktoré vznikne zložením:

(a) stredovej súmernosti $\mathcal{S}_A$, osovej súmernosti $\mathcal{O}_{AB}$ a stredovej súmernosti $\mathcal{S}_B$;
(b) osových súmerností $\mathcal{O}_{AB}$, $\mathcal{O}_{BC}$, $\mathcal{O}_{CD}$, $\mathcal{O}_{DA}$;
(c) stredovej súmernosti $\mathcal{S}_A$, osovej súmernosti $\mathcal{O}_{BC}$ a stredovej súmernosti $\mathcal{S}_D$;
(d) dvoch posúvaní $\mathcal{T}_1(B-A)$ a $\mathcal{T}_2(D-C)$.

Úloha 4.7. Útvar U je zložený z dvoch rovnobežých (resp. rôznobežných) priamok. Určte všetky zhodnosti, v ktorých je U samodružný.

Úloha 4.8. Pre ktoré veľké tlačené písmeno slovenskej abecedy existuje najviac zhodností, ktoré ho reprodukujú ?

Úloha 4.9. Nech priamky p, q, r sú postupne

(a) osi strán trojuholníka;
(b) osi vnútorných uhlov trojuholníka;
(c) priamky, na ktorých sú strany trojuholníka.

Určte zobrazenie, ktoré vznikne postupným zložením osových súmernosti $\mathcal{O}_p$, $\mathcal{O}_q$, $\mathcal{O}_r$.

Úloha 4.10. Ak $\mathcal{O}_i$, $i = 1, 2, 3$, sú tri osové súmernosti, tak $(\mathcal{O}_1.\mathcal{O}_2.\mathcal{O}_3)^2$ je identita alebo posúvanie. Dokážte.

Úloha 4.11. Daný je obdĺžnik $ABCD$, ktorý nie je štvorec. Určte všetky zhodnosti, v ktorých sa trojuholník ABC zobrazí do trojuholníka CDA.

Úloha 4.12. Je daný pravidelný 8-uholník $ABCDEFGH$; a, b, c, d sú priamky, na ktorých ležia jeho uhlopriečky. Určte priamky x, y, z, pre ktoré platí:

(a) $\mathcal{O}_a.\mathcal{O}_b = \mathcal{O}_d.\mathcal{O}_x$ ($\mathcal{O}_x$ je osová súmernosť určená priamkou x);
(b) $\mathcal{O}_a.\mathcal{O}_b = \mathcal{O}_y.\mathcal{O}_d$;
(c) $\mathcal{O}_b.\mathcal{O}_d = \mathcal{O}_z.\mathcal{O}_a$.

Úloha 4.13. Určte grupu symetrií $\mathfrak{S}_3$ rovnostranného (rovnoramenného) trojuholníka. Porovnajte túto grupu so symetrickou grupou $\mathfrak{P}_3$ rádu 3 (grupa permutácií trojprvkovej množiny.)

Úloha 4.14. Určte grupu symetrií $\mathfrak{S}_n$ pravidelného n-uholníka a jej generátory. (Aký je súvis tejto grupy s grupou permuácií z n prvkov.

Úloha 4.15. Dokážte, že grupa symetrií 4-uholníka je podgrupou grupy $\mathfrak{S}_4$ symetrií štvorca.

Problém 4.1. Ako je zostrojené odrazové sklíčko, ktoré odráža svetlo do smeru odkiaľ prichádza ?

5. Zhodnosti v rovine $\mathbb{E}_2$ - použitie v konštrukčných úlohách

Úloha 5.1. Daná je priamka p a v jednej z polrovín body A, B. Na p nájdite bod X tak, aby platilo

(a) $|AX| + |XB| = \min$;
(b) $\big||AX| - |XB|\big| = \max$.

Úloha 5.2. Dané je rôznobežné priamky p, q a v jednom uhle nimi určenom body A, B. Nájdite bod X na p a bod Y na q tak, aby súčet vzdialenosti $|AX| + |XY| + |YB| = \min$.

Úloha 5.3. Určte dráhu biliardovej gule na biliardovom stole tak, aby guľa A (reprezentovaná bodom) narazila do gule B, ak

(a) guĺa sa má odraziť od dvoch susedných mantinelov;
(b) guĺa sa má odraziť od dvoch protiľahlých mantinelov;

(c) guĺa sa má odraziť od troch mantinelov;
(d) guĺa sa má odraziť od štyroch mantinelov.

Úloha 5.4. Dané sú dve kružnice, ktoré sa pretínajú v bode M. Týmto bodom veďte priamku, na ktorej obe kružnice vytínajú rovnako veľké tetivy.

Úloha 5.5. Daná je priamka p, úsečka u a dve kružnice oddelené priamkou p. Zostrojte kosoštvorec $ABCD$, ktorého uhlopriečka BD veľkosti $|u|$ leží na danej priamke a každý z ostatných vrcholov leží na jednej z daných kružníc.

Úloha 5.6. Sú dané tri priamky a, b, c, ktoré sa pretínajú v bode S a na priamke a bod A. Zostrojte trojuholník ABC taký, že body $B \in b$ a $C \in c$ a priamky a, b, c sú osami jeho uhlov (výškami, ťažnicami).

Úloha 5.7. Daný je trojuholníka ABC a na jeho strane AB bod M (vo vnútri daného trojuholníka.) Nájdite body $X \in BC$ a $Y \in CA$ tak, aby obvod trojuholníka MXY bol najmenší možný.

Úloha 5.8 (Giovanni Francesco Fagnano, 1775). Na troch stranách ostrouhlého trojuholníka ABC nájdite body $X \in AB$, $Y \in BC$, $Z \in CA$ tak, aby obvod trojuholníka XYZ bol najmenší možný. (Zovšeobecnenie pre n-uholník.)

Íoha 5.9 (P. Fermat). V ostrouhlom trojuholníku ABC zostrojte bod P tak, aby súčet vzdialeností $|AP|+|BP|+CP|$ bol najmenší možný. Použite otáčanie $\mathcal{T}(B, 60^o)$ a uvážte krivku $CPP'A'$.

Úloha 5.10. Daný je trojuholníka ABC a vo vnútri bod M. Nájdite body $X \in AB$, $Y \in BC$ a $Z \in CA$ tak, aby $M \in XY$ a obvod trojuholníka XYZ bol najmenší možný.

Úloha 5.11. Dané sú dve rovnobežnépriamky p a q a v opačných polrovinách body A, B. Nájdite bod X na priamke p a bod Y na q tak, aby úsečka XY bola kolmá na dané priamky a $|AX|+|XY|+|YB| = \min$.

(Na rôznych stranách kanála, ktorého brehy sú rovnobežné a priame, sú dva domy. Kde postaviť most tak, aby bol kolmý na kanál a cesta medzi domami bola najkratšia ? Sformulujte podobnú úlohu pre cestu spájajúcu dva domy, ktorá prechádza cez dva kanály.)

Úloha 5.12. Dané sú dve tetivy AB, CD kružnice k a úsečka dĺžky d. Na k zostrojte bod X tak, aby priamky AX a BX vytínali na CD úsečku EF veľkosti d.
(N. Použite posúvanie $\mathcal{T}(d\frac{D-C}{||D-C||})$ a to, že uhly $\angle AXB$, $A'FB$ sú rovnaké.)

Úloha 5.13. Dané sú dve kružnice k_1, k_2, priamka r a bod M. Zostrojte priamku p

a) rovnobežnú s priamkou r, na ktorej obe kružnice vytínajú rovnako veľké tetivy;
b) rovnobežnú s priamkou r, na ktorej obe kružnice vytínajú tetivy, ktorých súčet (rozdiel) veľkosti je rovný veľkosti danej úsečky d;
c) prechádzajúcu bodom M, na ktorej obe kružnice vytínajú rovnako veľké tetivy.

(N. Použite v a) posúvanie o vektor, ktorý je "priemetom" vektora určeného stredmi kružníc na p.)

Úloha 5.14. Napíšte úlohu, pri riešení ktorej použijete osovú súmernosť (otáčanie, posúvanie, posunuté zrkadlenie).

6. Zhodnosti v priestore $\mathbb{E}_3$ a ich použitie

Veta 6.1. *Každá zhodnosť v priestore $\mathbb{E}_3$ sa dá zložiť z najviac štyroch rovinových súmernosti.*

Veta 6.2. *Zhodnosť v priestore $\mathbb{E}_3$ je*

(α) *rovinová súmernosť,*
(β) *posúvanie (špeciálne-identita),*
(γ) *otáčanie (špeciálne-osová úmernosť),*
(δ) *rezultanta rovinovej súmernosti a posúvania, pričom vektor posúvania je v zameraní roviny súmernosti,*
(ϵ) *rezultanta rovinovej súmernosti a otáčania okolo priamky, ktorá je kolmá na rovinu súmernosti (špeciálne-stredová súmernosť),*
(ζ) *posúvania a otáčania, pričom vektor posúvania má smer osi otáčania (nazývané skrutkový pohyb).*

Veta 6.2. *Zhodnosť v $\mathbb{E}_3$ sa dá zložiť z najviac štyroch rovinových súmernosti.*

Úloha 6.1. Je daná kocka $ABCDA'B'C'D'$. Určte zobrazenie, ktoré vznikne zložením dvoch osových súmernosti určených priamkami

a) AB, BC;
b) AB, $A'B'$;
c) AB, $B'C'$.

Úloha 6.2. Je daný pravidelný štvorsten $ABCD$. Určte aké zobrazenie vznikne zložením osových súmerností $\mathcal{O}_{AB}$ a $\mathcal{O}_{CD}$ podľa priamok AB a CD.

Úloha 6.3. Koľko rovín, osi a stredov súmernosti má:

a) rotačná valcová plocha;
b) rotačná kužeľová plocha;
c) trojosový elipsoid;
d) jednodielny (dvojdielny) hyperboloid;
e) eliptický (hyperbolický) paraboloid.

Úloha 6.4. Koľko rovín a osí súmernosti má:

a) pravidelný štvorsten;
b) kocka;
c) pravidelný osemsten;
d) pravidelný dvanásťsten;
e) pravidelný dvadsaťsten;
f) n-boká bipyramída.

Úloha 6.5. Popíšte všetky otáčaní, ktoré reprodukujú ("ponechávajú na mieste") kocku.

Úloha 6.6. Popíšte grupy symetrií pravidelných mnohostenov.

Úloha 6.7. Je daná kocka $ABCDA'B'C'D'$ a na jej povrchu dva body M a N. Zostrojte najkratšiu cestu na povrchu kocky, ktorá spája body M a N.

Problém 6.1. V priestore sa otáča kocka. Ako zobraziť túto kocku do roviny obrazovky (3-D grafika) ? Napíšte príslušné transformačné rovnice.

7. Podobnosti v rovine $\mathbb{E}_2$

Veta 7.1. *Vlastná podobnosť v rovine $\mathbb{E}_2$ je*

rovnoľahlosť $\mathcal{H}(S,\kappa)$,
rezultanta rovnoľahlosti $\mathcal{H}(S,\kappa)$ a otáčania $\mathcal{R}(S,\omega)$ alebo
rezultanta rovnoľahlosti $\mathcal{H}(S,\kappa)$ a osovej súmernosti $\mathcal{O}(p)$, pričom $S \in p$.

Úloha 7.1. Dokážte, že vlastná podobnosť má práve jeden samodružný bod.

Úloha 7.2. Dokážte, že vlastná v rovnoľahlosti priamka p je samodružná práve vtedy, ak prechádza stredom rovnoľahlosti.

Úloha 7.3. Ak zložením dvoch rovnoľahlostí $\mathcal{H}_i(S_i,\kappa_i)$, $i = 1,2$, vznikne rovnoľahlosť $\mathcal{H}(S,\kappa)$, tak jej stred S leží na priamke S_1S_2. Dokážte.

Úloha 7.4. Zistite podmienky pre to, aby platil komutatívny zákon pre skladanie

a) dvoch rovnoľahlostí $\mathcal{H}_i(S_i,\kappa_i)$, $i = 1,2$;
b) rovnoľahlosti $\mathcal{H}(S,\kappa)$ a osovej súmernosti $\mathcal{O}_p$;
c) rovnoľahlosti $\mathcal{H}(S,\kappa)$ a posúvania $\mathcal{T}(\overrightarrow{v})$.

Úloha 7.5. Dané sú dve úsečky AB a $A'B'$. Zostrojte podobnosť, ktorá prevádza body A, B do bodov A', B'. Koľko takýchto podobnosti existuje ?

8. Podobné zobrazenia - použitie v konštrukčných úlohach

Úloha 8.1. Sú dané dve rôznobežky p, q a bod A. Zostrojte kružnicu, ktorá prechádza bodom A a dotýka sa daných priamok.

Úloha 8.2. Sú dané dve kružnice, ktoré majú spoločný bod M. Na kružniciach nájdite body A, B tak, aby na priamke AB ležal bod M a platilo $3|AM| = |BM|$.

(N. Použitím rovnoľahlosti $\mathcal{H}(M,3)$.)

Úloha 8.3. Sú dané dve rôzne sústredené kružnice. Zostrojte priamku, na ktorej vytína menšia kružnicu dvakrát menšiu tetivu ako väčšia kružnica.

Úloha 8.4. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC. Na stranách AC a BC nájdite body X a Y tak, aby platilo

a) $|AX| = |XY| = |YC|$;
b) $\alpha|AX| = \beta|XZ| = \gamma|YC|$, kde α,β,γ sú kladné čísla;
c) $|AX| = |XY| = |YB|$.

(Návod: a) Zostrojme najskôr podobný trojuholník $A'B'C$. c) Zostrojme podobný trojuholník $AC'B'$.)

Úloha 8.5. Je daný trojuholník ABC a tri rôznobežky p,q,r. Zostrojte trojuholník $A^*B^*C^*$ podobný s daným trojuholníkom tak, aby vrcholy A^*, B^*, C^* boli na priamkách p, q, r.

Úloha 8.6. Dané sú dve kružnice k_1, k_2 a body $A \in k_1$ a $B \in k_2$. Zostrojte dve zhodné dotýkajúce sa kružnice, ktoré sa dotýkajú daných kružníc v daných bodoch A a B.

Úloha 8.7. Zostrojte trojuholník ABC, ak je dané:

a) vrchol A, stred protiľahlej strany A_o a stred opísanej kružnice;
b) vrchol A, stred opísanej kružnice S a ťažisko T;
c) vrchol A, stred strany AC a priesečník výšok;
d) priesečník výšok V, ťažisko T a polomer r opísanej kružnice;
e) priesečník výšok V, ťažisko T a päta výšky na stranu BC;
f) stred opísanej kružnice S, ťažisko T a päta výšky C_1 na stranu AB;
g) stred opísanej kružnice, priesečník výšok a päta výšky na stranu BC.

Úloha 8.8. Zostrojte trojuholník ABC ak poznáte

a) vzájomné pomery $|a| : |b| : |c|$ veľkosti strán a polomer ρ vpísanej kružnice;
b) vzájomné pomery $|v_a| : |v_b| : |v_c|$ veľkosti výšok a polomer r opísanej kružnice.

Úloha 8.9. Daná je kružnica k a bod M, ktorý leží mimo k. Zostrojte priamku p pretínajúcu kružnicu k v bodoch X, Y tak, aby platilo $|MX| = 3|MY|$.

Úloha 8.10. Dané sú rôznobežky (rovnobežky) p, q, bod A ležiaci na p a bod B na q a smer s rôznobežný so smerom p aj q. Zostrojte priamku so smerom s, ktorá pretne priamku p v bode X a priamku b v bode Y tak, aby platilo $|AX| = 2|BY|$.

Úloha 8.11. Na stranách ostrouhlého trojuholníka ABC sú dané body $M \in CA$ a $N \in BC$, pričom $MN \parallel AB$. Dokážte, že spojnica vrchola C s priesečníkom uhlopriečok lichobežníka $ABNM$ prechádza stredom AB.

Úloha 8.12. Do tupouhlého trojuholníka ABC vpíšte štvorec.

Úloha 8.13. Dané sú úsečky a, b, k. Zostrojte úsečku x tak, aby platilo $\frac{a^2}{b^2} = \frac{x}{k}$.

Úloha 8.14. Daná je úsečky AB. Zostrojte na nej bod X tak, že $\frac{|AB|}{|AX|} = \frac{|AX|}{|BX|}$.

Problém 8.1. Pantograf je prístroj slúžiaci na zväčšovanie alebo zmenšovanie obrázkov. Je zložený zo štyroch latiek s dierami, ktoré sú spojené v štyroch kĺboch A, B, X, C tvoriacich vrcholy rovnobežníka, z kopírovacieho hrotu X, kresliaceho hrotu X' a pevného hrotu S. Viete, ako vyzerá a ako funguje pantograf ?

9. Niektoré dôkazové úlohy.

Dokážte nasledujúce vety:

Veta 9.1. *Osi strán trojuholníka sa pretínajú v jednom bode.*

Veta 9.2. *Ťažnice trojuholníka sa pretínajú v jednom bode.*

Veta 9.3. *Výšky trojuholníka sa pretínajú v jednom bode (nazývaným ortocentrum.)*
(N: Využite predchádzajúcu úlohu a rovnoľahlosť $\mathcal{H}(T, -\frac{1}{2})$.)

Veta 9.4. *Nech AB je tetiva kružnice $k(S,k)$ a bod $C \in k$. Stredový uhol $\angle ASB$ je dvakrát väčší ako príslušný obvodový uhol $\angle ACB$.*

Veta 9.5. *Štvoruholník je tetivový práve vtedy, keď súčet veľkostí protiľahlých uhlov je 180 stupňov.*

Úloha 9.1. V ostrouhlom trojuholníku ABC označme päty výšok postupne A_1, B_1, C_1. Dokážte, že trojuholníky AB_1C_1, A_1BC_1 a A_1B_1C sú podobné trojuholníku ABC.
(N. Využite, že štvoruholníky ABA_1B_1 a ACA_1C_1 sú tetivové štvoruholníky.)

Úloha 9.2. Dokážte, že pre veľkosti strán a výšok trojuholníka ABC platí

$$v_a : v_b : v_c = \tfrac{1}{a} : \tfrac{1}{b} : \tfrac{1}{c}.$$

Úloha 9.3. Dokážte, že súčet vzdialenosti ľubovoľného vnútorného bodu M rovnostranného trojuholníka od jeho strán je konštantný.
(Návod: Súčet obsahov trojuholníkov ABM, BCM a CAM je rovný obsahu trojuholníka ABC.)

Úloha 9.4. Je daný rovnostranný trojuholník ABC s ťažiskom T. Dokážte, že pre každý vnútorný bod X rôzny od T platí

$$|AX| + |BX| + |CX| > |AT| + |BT| + |CT|.$$

(Návod: Využite úlohu 9.3 v trojuholníku $A'B'C'$, ktorý je obrazom ABC v rovnoľahlosti $\mathcal{H}(T, -2)$).

Úloha 9.5. Body súmerné združené s ortocentrom ostrouhlého trojuholníka ABC podľa priamok AB, BC, CA ležia na kružnici opísanej trojuholníku
(Návod: Štvoruholník BA_1VC_1 je tetivový.

Úloha 9.6. Nad stranami rovnobežníka $ABCD$ sú zostrojené štyri štvorce. Dokážte, že stredy týchto štvorcov sú vrcholmi štvorca.

Úloha 9.7. Dokážte, že stredy strán ľubovoľného štvoruholníka $ABCD$ sú vrcholmi rovnobežníka.

Veta 9.6. *Nech k_1 a k_2 sú dve kružnice s rôznymi polomermi. Existujú práve dve rovnoľahlosti, ktoré zobrazujú kružnicu k_1 na k_2.*

Veta 9.7. *Spoločná dotyčnica dvoch kružníc k_1 a k_2 prechádza stredom rovnoľahlosti kružníc k_1, k_2 alebo je rovnobežná so spojnicou stredov kružníca. (Sformulujte a doážte obrátenú vetu.)*

Eulerova priamka. *V trojuholníku ABC označme symbolom T ťažisko, V ortocentrum a S stred kružnice opísanej trojuholníku. Dokážte, že buď všetky tri body splynú v jediný alebo sú navzájom rôzne kolineárne body a platí, že ich deliaci pomer $\lambda(S,T,V) = -\frac{1}{2}$. (Priamka, na ktorej ležia tieto body sa nazýva Eulerova priamka.)*

Feuerbachova kružnica 9 bodov. *Ak v trojuholníku ABC označíme symbolom V priesečník výšok a symbolmi*

A_o, B_o, C_o *stredy strán* AB, BC, CA*;*
A_1, B_1, C_1 *päty výšok;*
A^*, B^*, C^* *stredy úsečiek* AV, BV, CV*.,*

tak deväť bodov A_o, B_o, C_o, A_1, $\ldots$, C^* *leží na jednej kružnici.*

Problém 9.1. V akom vzťahu je Feuerbachova kružnica deviatich bodov s kružnicou, ktorá je opísaná trojuholníku ?

Menelaova veta. *Ak je daný je trojuholník ABC a priamka p, ktorá neprechádza žiadnym jeho vrcholom a pretína priamky AB, CB, CA postupne v bodoch C^*, A^*, B^*, tak platí, že súčin deliacich pomerov*

$$\lambda(ABC^*).\lambda(BCA^*).\lambda(CAB^*) = 1.$$

Cevova veta. *Nech je daný trojuholník ABC a bod M, ktorý neleží na žiadnej z priamok AB, BC, CA. Priesečníky priamok AM, BM, CM s priamkami BC, CA, AB (rôzne od bodov A, B, C) označme postupne A^*, B^*, C^*. Potom platí*

$$\lambda(ABC^*).\lambda(BCA^*).\lambda(CAB^*) = -1$$

.

(Sformulujte a dokážte obrátené tvrdenie k Menelaovej a Cevovej vete.)

10. Niekoľko úloh v rovine $\mathbb{E}_2$

Úloha 10.1. Dokážte. Ak U je priesečník uhlopriečok tetivového štvoruholníka $ABCD$, tak trojuholníky AUD a BUC sú podobné.

Úloha 10.2. Zostrojte trojuholník, ak sú dané veľkosti t_a, t_b, t_c jeho ťažníc.

Úloha 10.3. Zostrojte trojuholník ABC, ak je daný vrchol A, ťažisko T a ortocentrum V.

Úloha 10.4. Zostrojte lichobežník, ak sú dané

a) veľkosti jeho strán a, b, c, d;
b) veľkosti dvoch základní a, c a uhlopriečok e, f.

Úloha 10.5. Dané sú štyri body K, L, M, N. Zostrojte štvorec $ABCD$ taký, že $K \in \overleftrightarrow{AB}$, $L \in \overleftrightarrow{BC}$, $M \in \overleftrightarrow{CD}$, $N \in \overleftrightarrow{DA}$.

Úloha 10.6. Zostrojte štvoruholník $ABCD$, ak sú dané veľkosti úsečiek $|AC|$, $|AD|$, $|BC|$ a veľkosti uhlov ADB a DBC.

Úloha 10.7. Zostrojte štvoruholík $ABCD$, ak sú dané veľkosti úsečiek $|AB|$, $|BC|$, $|CD|$, $|DA|(< |AB|)$ a uhlopriečka AC je osou uhla α.

Úloha 10.8. Dane sú priamky a, b, na nich dva bodu $A \in a$, $B \in b$ a smer s. Zostrojte priamku p daného smeru, ktorá pretína a v bode X, b v bode Y a aby platilo $|AX| = |BY|$.

Úlohy v priestore $\mathbb{E}_3$:

Úloha 10.9. Je daná kocka $ABCDA'B'C'D'$ a tri body K, L a M. Zostrojte prienik kocky s rovinou KLM.

Úloha 10.10. Je daný pravidelný 6-boký ihlan $ABCDEFV$ a tri body K, L a M. Zostrojte prienik ihlana s rovinou KLM.

Poznámka 1. Konštrukčné úlohy môžeme rozdeliť na *polohové* a *metrické* (nepolohové). Príkladom metrických úloh sú úlohy 8.8, 10.2, 10.3. Metrické úlohy majú spravidla jediné riešenia. Príkladmi polohových úlohy sú úlohy 8.7, 10.4.

Poznámka 2. Postup pri riešení konštrukčných úloh:

Najskôr urobíme *rozbor*, čiže analýzu úlohy. Predpokladajme, že úlohu sme vyriešili; načrtnime predbežnú konštrukciu, a hľadáme závislosti medzi danými a hľadanými prvkami. Dbáme o to, aby dané prvky boli na obrázku výrazne graficky vyznačené a potom kombinujeme a hľadáme cestu, ako úlohu zostrojiť alebo previesť na inú úlohu - ľahšiu alebo už vyriešenú. Rozbor musíme robiť pozorne, aby sme nestratili niektoré riešenia.

V *konštrukcii* pomocou kružidla a lineára narysujeme žiadany útvar. Jednotlivé kroky konštrukcie môžeme zaznamenávať písomne.

Tretím krokom je *dôkaz* správnosti konštrukcie, ktorý je podstatnou zložkou riešenia úlohy. Často je obrátení postupu použitého v rozbore. Vynechať sa môže len výnimočne v jednoduchých úlohách, ak dôkaz vyplýva bezprostredne z rozboru.

V *diskusii*, riešime otázku, aké medze platia pre dané prvky, aby sa dal žiadaný geometrický útvar zostrojiť a pritom zisťujeme počet riešení úlohy. Diskusiu robíme na základe konštrukcie. V každom bode zisťujeme, či dostaneme konštruovaný bod (priamka), prípadne, koľko ich je.

Poznámka 3. V ruskej literatúre sa stretávame aj s postupom: *analýza* a *syntéza* úlohy. Do analýzy môžeme zaradiť rozbor a dôkaz a do syntézy konštrukciu a diskusiu.

11. Geometria kružníc

Úloha 11.1. Dvojicou kružníc $k_i(S_i, r_i)$, $i = 1, 2$, je daný eliptický (parabolický, hyperbolický) zväzok kružníc a bod A. Zostrojte kružnicu κ daného zväzku, ktorá prechádza bodom A.

Úloha 11.2. Jednou kružnicou a priamkou je daný eliptický (parabolický, hyperbolický) zväzok kružníc a priamka p (kružnica k). Zostrojte kružnicu daného zväzku, ktorá sa dotýka danej priamky p (kružnice k).

Úloha 11.3. Je daný eliptický (parabolický, hyperbolický) zväzok kružníc a kružnica k. Zostrojte kružnicu daného zväzku, ktorá ortogonálne (diametrálne) pretína kružnicu k.

Úloha 11.4. Dané sú dve sústredné (nesústredné) kružnice k_1, k_2 a bod A. Zostrojte kružnicu κ, ktorá prechádza bodom A, ortogonálne pretína kružnicu k_1 a diametrálne pretína kružnicu k_2.

Úloha 11.5. Sú dané dve sústredné (nesústredné) kružnice k_1, k_2 a priamka p (kružnica k.) Zostrojte kružnicu, ktorá sa dotýka priamky p (kružnice k), ortogonálne pretína kružnicu k_1 a diametrálne kružnicu k_2.

Úloha 11.6. Sú dané eliptický, parabolický a hyperbolický trs kružníc. Zostrojte kružnicu, ktorá patrí do daných troch trsov. Vykonajte diskusiu riešiteľnosti.

Úloha 11.7. Sú dané dve nesústredné kružnice k_1, k_2 a priamka p. Zostrojte kružnicu, ktorá ortogonálne pretína kružnicu k_1, diametrálne pretína kružnicu k_2 a jej stred je na priamke p.

Úloha 11.8. Daná je kružnica k, priamka t a na nej bod T. Zostrojte kružnicu κ, ktorá sa dotýka priamky t v bode T a ortogonálne pretína kružnicu k.

Úloha 11.9. Dokážte, že prienikom dvoch trsov kružíc je zväzok kružníc.

2. Kružnicová inverzia.

Úloha 12.1. Je daná kružnicová inverzia $\mathcal{I}$ riadiacou kružnicou $\kappa(S, r)$. Zostrojte obraz

a) danej priamky p;
b) danej dvojice priamok p a q;
c) danej priamke p a kružnice k, ktorá pretína p;
d) dvoch daných dvoch kružníc.

Úloha 12.2. Je daná kružnicová inverzia $\mathcal{I}$ riadiacou kružnicou $\kappa(S, r)$. Zostrojte obraz pravidelného 5-uholníka, ktorý je vpísaný do riadiacej kružnice κ.

Úloha 12.3. Riešte úlohy z prechádzajúceho paragrafu použitím kružnicovej inverzie.

Poznámka. Úlohy z predchádzajúceho paragrafu môžeme riešiť viacerými spôsobmi. Naznačíme riešenie úlohy: Dané sú dve kružnice k_1, k_2 a bod A, zostrojte kružnicu, ktorá prechádza daným bodom, ortogonálne pretína k_1 a diametrálne pretína kružnicu k_2.

Náznak riešení:

1. zostrojme chordálu c kružnice k_1 a bodu A a priamku d, ktorá je množinou stredov všetkých kružníc diametrálne pretínajúcich kružnicu k_2 a bod A. Priesečník priamok c a d je stred hľadanej kružnice, alebo
2. určme zväzok kružníc, ktorý je vytvorený všetkými kružnicami, ktoré pretínajú k_1 ortogonálne a k_2 diametrálne. Hľadaná kružnica bude kružnicou tohto eliptického zväzku kružníc, ktorá prechádza bodom A, alebo
3. zostrojme obrazy A' a A'' bodu A v kladnej (s riadiacou kružnicou k_1) a zápornej kružnicovej inverzii (podľa k_2). Bodmi A, A' a A'' je určená hľadaná kružnica.

Úloha 12.4. Je daná kružnicová inverzia $\mathcal{I}$ riadiacou kružnicou $\kappa(S, r)$ a dve dvojice odpovedajúcich si bodov A, A' a B, B'. Dokážte, že platí $|A'B'| = \frac{r^2}{|SA|.|SB|}|AB|$.

Úloha 12.5. Použitím kružnicovej inverzie dokážte Ptolemaiovu vetu:
Keď A, B, C, D sú vrcholy štvoruholníka, potom platí

$$|AB|.|CD| + |BC|.|DA| \geq |AC|.|BD|,$$

pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď štvoruholník je tetivový.

Úloha 12.6. Určte zobrazenie, ktoré vznikne zložením dvoch kružnicových inverzií so sústrednými riadiacimi kružnicami κ_1 a κ_2.

Úloha 12.7. Dokážte, že kružnica, ktorá sa dotýka zvonku daných dvoch kružníc k_1 a k_2, je samodružná v kladnej kružnicovej inverzii, v ktorej sa zobrazuje k_1 do k_2.

Úloha 12.8. Dokážte, že kružnica, ktorá sa dotýka danej kružnice k_1 zvonku a danej kružnice k_2 zvnútra je samodružná v zápornej kružnicovej inverzii, v ktorej sa zobrazuje k_1 do k_2.

Úloha 12.9. Napíšte rovnice kladnej kružnicovej inverzie určenej jednotkovou kružnicou so stredom v počiatku súradnicovej sústavy.

13. Apoloniove úlohy

Úloha 13.1 - Apoloniova úloha. Sú dané tri kružnice, ktorých stredy nie sú kolineárne a majú navzájom rôzne polomery. Zostrojte kružnicu, ktorá sa dotýka daných kružníc.

Úloha 13.2 - zovšeobecnenie Úlohy 13.1. Sú dané tri útvary konštantnej krivosti (bod, priamka, kružnica). Zostrojte kružnicu, ktorá sa dotýka daných útvarov (pričom si určte či sa majú dotýkať zvonku alebo zvnútra.)

špeciálne:

a) tri body (opísať kružnicu trojuholníku);
b) bod a dve priamky;
c) tri priamky (vpísať kružnicu trojuholníku);
d) dva body a kružnica;
e) dve kružnice a priamka;
f) tri kružnice pretínajúce sa v jednom bodom;
g) tri kružnice dotýkajúce sa po dvojiciach v troch bodoch.

Úloha 13.3. Dané sú bod A, dve rôznobežky p, q a úsečka dĺžky d. Na daných priamkach nájdite body $X \in p$, $Y \in q$ tak, aby A, X, Y boli kolineárne a platilo $|XA|.|YA| = d^2$.

Úloha 13.4. Sú dané bod A, dve kružnice k_1, k_2 a úsečka dĺžky d. Na daných kružiciach nájdite body X, Y tak, aby A, X, Y boli kolineárne a platilo $|XA|.|YA| = k^2$.

Úloha 13.5. Dané sú bod A, dve kružnice a uhol α. Zostrojte kružnicu prechádzajúcu bodom A a pretínajúcu dané kružnice pod uhlom α.

Úloha 13.6. Sú dané dve rôzne kružnice a priamka p. Zostrojte kružnicu, ktorá sa dotýka daných kružníc a jej stred leží na primke p.

Poznámka. Ak má hľadaná kružnica prechádzať daným bodom A, tak zvyčajne volíme tento bol za stred inverzie.

14. Afinné zobrazenia

Veta 14.1. *Každá afinita sa dá zložiť z najviac dvoch osových afinít.*

Úloha 14.1. Na priame p sú dané tri rôzne body A, B, C a na priamke q body A' a B'. Zostrojte bod C' tak, aby pre ich deliace pomery platilo $\lambda(A'B'C') = \lambda(ABC)$.

Úloha 14.2. Osová afinita $\mathcal{O}(A', A; o)$ je daná osou o a dvojicou odpovedajúcich si bodov A, A'. Zostrojte obraz priamku p', ktorá je obrazom danej priamky p.

Úloha 14.3. Je daná priamka o, trojuholník ABC a dvojica bodov X, X'. Zostrojte obraz trojuholníka ABC v osovej afinite s osou o, v ktorej obrazom bodu X je bod X'.

Úloha 14.4. Osová afinita je daná dvojicou trojuholníkov ABC a $A'B'C'$ ($AA' \parallel BB' \parallel CC'$).

a) Zostrojte os tejto afinity.
b) Zostrojte obraz danej priamky p.

Úloha 14.5. Dané sú dva body A, A' a dve priamky p, p'. Existuje osová afinita $\mathcal{O}$, v ktorej sa bod A zobrazuje do A' a priamka p na priamku p'. Zostrojte os o tejto osovej afinity.

Úloha 14.6. Daný je kosoštvorec (rovnobežník) $ABCD$ v $\mathbb{E}_2$ a priamka o neprechádzajúca jeho stredom. Určte osovú afinitu s danou osou o tak, aby jeho obrazom bol štvorec.

Úloha 14.7. Je daný lichobežník $ABCD$. Existuje taká osovú afinitu, že obrazom lichobežíka je štvorec ?

Úloha 14.8. Afinita je daná dvoma trojicami odpovedajúcich si bodov A, B, C a A', B', C'.

a) Určte obraz daného bodu M.
b) Určte obraz danej priamky p.

Úloha 14.9. Na stranách AB a AC trojuholníka ABC dané sú body M,N tak, že $MN \parallel BC$. Dokážte, že priesečník priamok BN a CM leží na ťažnici t_a.

Úloha 14.10. Použitím vlastnosti afinity dokážte:

a) Vetu o strednej priečke trojuholníka.
b) Ťažnice trojuholníka sa pretínajú v jednom bode.

Úloha 14.11. Na stranách trojuholníka ABC sú dané body $K \in AB$, $L \in BC$ a $M \in CA$, ktoré delia strany v rovnakom pomere. Dokážte, že ťažiská trojuholníkov ABC, KLM a trojuholníka vytvoreného priamkami AK, BL a CM sú totožné. (N: Uvažujte afinitu, ktorá zobrazuje postupne body A, B, C do bodov B, C, A.)

Úloha 14.12. Dané sú dve navzájom kolmé priamky p, q, body $A \in p$, $B \in q$ a priamka r. Existuje elipsa e, ktorej osi sú priamky p, q a vrcholmi body A,B.

a) Zostrojte bod M, v ktorom daná priamka r pretína elipsu e.
b) Zostrojte dotyčnicu elipsy e, ktorá je rovnobežná s danou priamkou r.
c) Zostrojte dotyčnicu elipsy, ktorá prechádza daným bodom M.

Úloha 14.13. Elipsa e je daná stredom, jedným vrcholom V a bodom A, ktorý nie je vrcholom. Zostrojte osi elipsy e.

Úloha 14.14. V rovine je daná priamka p a kosoštvorec $ABCD$. Zostrojte priesečníky elipsy e s vrcholmi A, B, C, D a priamky p.

Úloha 14.15. V rovine je daná priamka p a kosoštvorec $ABCD$. Zostrojte dotyčnicu elipsy e s vrcholmi A, B, C, D, ktorá je rovnobežná s priamkou p.

Poznámka. Konštrukcia jednotlivých bodov elipsy použitím dvoch sústredných kružníc s polomermi a a b (veľkosti poloosi.)

15. Úlohy v obmedzenej nárysni

Pri bežných geometrických konštrukciach predpokladáme, že vvšetky body roviny môžeme použiť, že v celej rovine môžeme robiť konštrukciu. Pri konštrukciach v obmedzenej nárysni máme k dispozícii len časť roviny. Rysovací papier je vždy obmedzený. (Podobné problémy majú aj geodeti pri topografických meraniach v teréne.)

Úloha 15.1. Sú dané dve rôznobežky a, b, ktoré sa pretínajú mimo nárysne a prístupný bod M. Zostrojte priamku p, ktorá prechádza bodom M a priesečíkom priamok a, b.

Úloha 15.2. Vpíšte kružnicu do trojuholníka, ktorého vrcholy sú mimo nárysne.

Úloha 15.3. Opíšte kružnicu trojuholníku, ktorého strany sú na prístupných priamkach a vrcholy sú mimo nárysne.

16. Kolineácie v projektívnej rovine

Úloha 16.1. Na priamke p sú dané tri body A, B, C. Zostrojte bod D tak, aby tieto štyri body tvorili harmonickú štvoricu bodov.

Úloha 16.2. V perspektívnej kolineácii $\mathcal{P}(A', A; S, o)$ v projektívnej rovine $\mathbb{P}_2$ zostrojte obraz

a) daného vlastného bodu X;
b) daného nevlastného bodu X;
c) danej priamky p;
d) danej nevlastnej priamky.

Úloha 16.3. Čo je obrazom kružnice k v perspektívnej kolineácii $\mathcal{P}(A', A; S, o)$?

Úloha 16.4. Zostrojte úlohu, pri riešení ktorej môžeme využiť perspektívnu kolineráciu.

Úloha 16.5. Daný je bod F a priamka p. Zostrojte dotyčnicu paraboly p s ohniskom F a direkčnou priamkou d, ktorá je rovnobežná s danou priamkou p.

Literatúra:

1. O.Šedivý a kol., *Geometria 2*, SPN Bratislava, 1987.
2. V.Piják a kol., *Konštrukčná geometria*, SPN Bratislava, 1985.
3. M.Sekanina a kol., *Geometrie 1 a 2*, SPN Praha, 1986, 1988.
4. J.Vyšín a kol., *Geometria pre pedagogické fakulty II*, SPN Bratislava, 1970.
5. B.Šofr, *Euklidovské geometrické konstrukcie*, Alfa Bratislava, 1976.
6. L.Boček, *Mate radi kružnice*, Prometheus Praha, 1995 (?).

7. A.M.Kommisaruk, *Projektivnaja geometrija v zadačach*, Vyššaja škola, Moskva, 1971.
8. J.Šedivý, *Zhodná zobrazení v konstruktivních ulohách*, Škola mladých matematiků 3, Praha.
9. J.Šedivý, *O podobnosti v geometrii*, Škola mladých matematiků, Praha.
10. I.M.Jaglom, *Geometričeskije preobrazovanija I, II*, Moskva.
11. L.S.Atanasjan, *Sbornik zadač po geometrii II*, Moskva 1975.