ZBIERKA ÚLOH Z GEOMETRIE - I

1. Metrické priestory

Úloha 1.1. Zistite, či $(\mathbf{M}, d)$ je metrický priestor ak:

a) $\mathbf{M} = \mathbb{R}$ a $d(x, y) = |x \Leftrightarrow y|$ pre každé $x, y \in \mathbb{R}$.

b) $\mathbf{M} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$ a $d(x, x) = 0$ pre každé $x \in \mathbf{M}$; $d(1, \frac{1}{2}) = d(\frac{1}{2}, 1) = 1$;
$d(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) = d(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$; $d(1, \frac{1}{3}) = d(\frac{1}{3}, 1) = \frac{1}{3}$.

c) $\mathbf{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a $d\colon (\mathbb{R} \times \mathbb{R})^2 \to \mathbb{R}_0^+$, pričom $d([x, y], [u, v]) = \max\{|u \Leftrightarrow x|, |v \Leftrightarrow y|\}$.

d) $\mathbf{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a $d\colon (\mathbb{R} \times \mathbb{R})^2 \to \mathbb{R}_0^+$, pričom $d([x, y], [u, v]) = |u \Leftrightarrow x| + |v \Leftrightarrow y|$.

e) $\mathbf{M} = \mathbb{R}^+$ a $d(u, v) = |\ln \frac{u}{v}|$ pre každé $u, v \in \mathbb{R}^+$.

Úloha 1.2. Dokážte, že vlastnosti metriky sú navzájom nezávislé.

Návod. Zostrojte množinu $\mathbf{M}$ a zobrazenie $d\colon \mathbf{M} \times \mathbf{M} \to \mathbb{R}_0^+$, pričom bude splnená niektorá z nasledujúcich podmienok:

d má vlastnosť 1 a 2 a nemá 3. vlastnosť metriky,
d má vlastnosť 1 a 3 a nemá 2. vlastnosť metriky,
d má vlastnosť 2 a 3 a nemá 1. vlastnosť metriky.

Úloha 1.3. Nech d_1, d_2 sú dve metriky na $\mathbf{M}$. Sú zobrazenia $d_1 + d_2$, $\max\{d_1, d_2\}$, $\min\{d_1, d_2\}$ metrikami na $\mathbf{M}$?

Úloha 1.4. Nech $(\mathbf{M}, d)$ je metrický priestor a nech $X_1, X_2, \ldots, X_m \in \mathbf{M}$. Dokážte, že platí $d(X_1, X_m) \leq d(X_1, X_2) + d(X_2, X_3) + \cdots + d(X_{m-1}, X_m)$.

2. Množiny bodov v $\mathbb{E}_n$

Úloha 2.1. Nájdite parametrické rovnice množiny bodov v priestore $\mathbb{E}_3$, ktorej všeobecná rovnica je

a) $x^2 + y^2 = 16$; **b**) $\frac{x^2}{16} \Leftrightarrow \frac{z^2}{9} = 1$; **c**) $y^2 = 6x$; **d**) $x^2 \Leftrightarrow y^2 = 0$;
e) $x^2 + y^2 + 8 = 0$; **f**) $x^2 \Leftrightarrow y^2 + 2x + 2y = 0$.

Úloha 2.2. Po kružnici $\mathbf{k}_1$ sa kotúľa kružnica $\mathbf{k}_2$. Nájdite parametrické rovnice krivky, ktorú pri tomto pohybe opisuje bod $A \in \mathbf{k}_2$, ak v istom momente sú rovnice $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ a súradnice bodu A nasledujúce:

a) $\mathbf{k}_1 :\ x^2 + y^2 = 1$ $\quad \mathbf{k}_2 :\ 2x^2 + 2y^2 \Leftrightarrow 3x + 1 = 0$ $\quad A = [1, 0]$.

Úloha 2.3. Po kružnici s polomerom r_1 sa zvnútra kotúľa kružnica s polomerom r_2. Nájdite parametrické rovnice krivky, ktorú opisuje bod polomeru pohybujúcej sa kružnice, ktorého vzdialenosť od stredu tejto kružnice je d.

a) $r_1 = r$, $\quad r_2 = \frac{r}{2}$, $\quad d = \frac{r}{4}$.

Jaroslav Ivančo, Marián Trenkler - Zbierka úloh z geometrie - I (September 2001)

Úloha 2.4. Nájdite množinu stredov všetkých kružníc dotýkajúcich sa priamky **p** a kružnice **k**.

a) **p** : $y = 0$ **k** : $x^2 + y^2 = 2ay$ *pre* $a > 0$.

Úloha 2.5. Nájdite množinu všetkých bodov v priestore, ktoré majú od roviny R_{xz} vzdialenosť $d_1 = 5$ a od bodu $A = [3, 4, -2]$ vzdialenosť $d_2 = 3$.

Úloha 2.6. Určte množinu všetkých bodov priestoru $\mathbb{E}_3$, ktoré majú

a) od danej roviny a daného bodu neležiaceho v rovine konštantný pomer vzdialeností,

b) od danej roviny a danej priamky, ktorá je kolmá na rovinu rovnakú vzdialenosť,

c) od daných dvoch bodov konštantný súčet vzdialeností.

Úloha 2.7. Určte prienik trojuholníka ABC s polpriamkou $\overrightarrow{MN}$.

a) $A = [-1, 1]$, $B = [3, 2]$, $C = [2, 7]$, $M = [1, 2]$, $N = [-1, 4]$.

b) $A = [-2, -3]$, $B = [4, -1]$, $C = [1, 3]$, $M = [2, -5]$, $N = [-1, 3]$.

Úloha 2.8. Určte prienik trojuholníka ABC s úsečkou $\overline{MN}$.

a) $A = [1, -1, 1]$, $B = [1, 0, 1]$, $C = [-1, 1, 1]$, $M = [0, 0, 1]$, $N = [-2, 1, 1]$.

b) $A = [1, 1, 1]$, $B = [1, 2, 3]$, $C = [0, 1, 2]$, $M = [2, 1, 0]$, $N = [-1, 1, 3]$.

Úloha 2.9. Určte prienik trojuholníka ABC s rovinou ϱ.

a) $A = [1, -1, 1]$, $B = [1, 0, 1]$, $C = [-1, 1, 1]$, $\varrho : x + 2y + 3z - 3 = 0$.

b) $A = [1, 1, 1]$, $B = [1, 2, 3]$, $C = [0, 1, 2]$, $\varrho : 2x - y + 2z - 3 = 0$.

Úloha 2.10. Určte prienik priamky a guľovej plochy, ak ich rovnice sú:

a) $\frac{x+5}{7} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-8}{-3}$, $x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 2y - 4z + 16 = 0$;

b) $\frac{x-6}{1} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z-2}{1}$, $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 2z + 34 = 0$.

Úloha 2.11. Určte prienik guľovej plochy $x^2 + y^2 + z^2 = 144$ a roviny

a) $2x + 3y - z + 6 = 0$; **b**) $x + y - z - 30 = 0$; **c**) $2x + 2y + z - 36 = 0$.

Úloha 2.12. Napíšte rovnicu rezu hyperboloidu $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{9} = 1$ rovinou:

a) $x = 3$; **b**) $x = -5$; **c**) $y = -5$; **d**) $y = 4$; **e**) $z = 3$.

Úloha 2.13. Nájdite priesečník P danej kvadratickej plochy a priamky, ak ich rovnice sú:

a) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} + \frac{z^2}{16} = 1$, $\frac{x}{3} = \frac{y-8}{-4} = \frac{z-4}{-2}$; **b**) $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1$, $\frac{x-27}{9} = \frac{y+3}{-9} = \frac{z+15}{-20}$;

c) $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{5} = z$, $\frac{x}{4} = \frac{y-10}{-5} = \frac{z+14}{11}$.

3. Vektory priestoru $\mathbb{E}_n$

Úloha 3.1. Rozhodnite, či množina **M** spolu s operáciami '+' a '·' tvorí vektorový priestor.

a) **M** je množina všetkých reálnych spojitých funkcií na intervale $\langle a, b \rangle$ a operácie '+' a '·' sú súčet a násobok funkcií.

b) **M** je množina všetkých polynómov stupňa $\leq n$ a operácie '+' a '·' sú súčet a násobok polynómov.

c) **M** je množina všetkých polynómov stupňa n a operácie '+' a '·' sú súčet a násobok polynómov.

d) $\mathbf{M}$ je množina všetkých polynómov stupňa $\leq n$, ktorých hodnota v bode 0 je rovná $k \in \mathbb{R}$, a operácie '+' a '·' sú súčet a násobok polynómov.

e) $\mathbf{M} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n = k\}$ $(k \in \mathbb{R})$ a '+', '·' sú bežné operácie súčtu a násobku usporiadaných n-tic.

d) $\mathbf{M}$ je množina všetkých komplexných čísiel a '+', '·' sú bežné operácie súčtu a súčinu.

4. Lineárna závislosť vektorov

Úloha 4.1. Zistite, či dané sústavy vektorov sú lineárne závislé alebo nezávislé.

a) $(1,2)$ $(2,0)$ **b**) $(1,2)$ $(2,4)$

c) $(1,2,1)$ $(2,0,6)$ $(0,-1,1)$ **d**) $(2,3,-5)$ $(1,-1,1)$ $(3,2,-2)$

e) $(1,-1,1)$ $(2,0,3)$ $(0,-2,-1)$ **f**) $(2,-3,1)$ $(3,-1,5)$ $(1,-4,3)$

g) $(1,1,1)$ $(1,a,1)$ $(2,2,a)$ **h**) $(a,-4,-1)$ $(4,-6,-3)$ $(1,1,-a)$

i) $(3,4,2)$ $(6,8,7)$ $(9,12,a)$ **j**) $(2,4,7)$ $(5,6,a)$ $(1,3,5)$

k) $(1,a,b)$ $(0,1,c)$ $(0,0,1)$

Úloha 4.2. Nech $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ je sústava lineárne nezávislých vektorov. Zistite, či vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ tvoria lineárne závislú alebo nezávislú sústavu vektorov.

a) $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{a}$; $\quad \vec{v} = \vec{a} + \vec{c}$; $\quad \vec{w} = \vec{b} + \vec{c}$.

b) $\vec{u} = \vec{a}$; $\quad \vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$; $\quad \vec{w} = \vec{a} + \vec{c}$.

c) $\vec{u} = \vec{a}$; $\quad \vec{v} = \vec{b} + \vec{c}$; $\quad \vec{w} = \vec{c}$.

d) $\vec{u} = \vec{a}$; $\quad \vec{v} = 2\vec{a}$; $\quad \vec{w} = \vec{c}$.

e) $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$; $\quad \vec{v} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$; $\quad \vec{w} = \vec{a} + 6\vec{c}$.

f) $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$; $\quad \vec{v} = \vec{b} + \vec{c}$; $\quad \vec{w} = \vec{a} + \vec{c}$.

Úloha 4.3. Zistite kedy je sústava dvoch (troch) vektorov vektorového priestoru $\mathbf{V_p}$ $(\mathbf{V_k})$ lineárne závislá (nezávislá).

Úloha 4.4. Pre aký parameter a je vektor $\vec{u}$ lineárnou kombináciou vektorov sústavy $\mathcal{S}$.

a) $\vec{u} = (5,9,a)$, $\quad \mathcal{S} = \{(4,4,3), (7,2,1), (4,1,6)\}$.

b) $\vec{u} = (7,-2,a)$, $\quad \mathcal{S} = \{(2,3,5), (3,7,8), (1,-6,1)\}$.

5. Podpriestory vektorového priestoru

Úloha 5.1. Zistite, či množina $\mathcal{P}$ je podpriestor vektorového priestoru $\mathbb{V}_3$.

a) $\mathcal{P} = \{(a, 2a, 3a); \quad a \in \mathbb{R}\}$ **b**) $\mathcal{P} = \{(2a+b, a-b, 3a+b); \quad a, b \in \mathbb{R}\}$

c) $\mathcal{P} = \{(a, 2a+1, 3a-1); \quad a \in \mathbb{R}\}$

Úloha 5.2. Nech $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ sú podpriestory vektorového priestoru $\mathbb{V}$. Je množina $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ tiež podpriestorom tohto priestoru?

Úloha 5.3. Dokážte:

a) $\mathfrak{L}(\mathfrak{L}(\mathcal{S})) = \mathfrak{L}(\mathcal{S})$.

b) Ak $\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \alpha_3 \vec{u}_3 = \vec{o}$ a $\alpha_1 \alpha_3 \neq 0$, tak $\mathfrak{L}(\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}) = \mathfrak{L}(\{\vec{u}_2, \vec{u}_3\})$.

6. Báza vektorového priestoru

Úloha 6.1. Zistite, či sústavy vektorov z cvičenia 4.1. generujú príslušný vektorový priestor.

Úloha 6.2. Zistite, či sústava vektorov $\mathcal{S}$ je bázou vektorového priestoru $\mathbb{V}$.

a) $\mathcal{S} = \{(2,1,3,4),\ (1,0,0,0)\}$ a $\mathbb{V}$ je priestor riešení sústavy lineárnych rovnic:
$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \quad 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \quad 4x_1 + 7x_2 - x_3 = 0.$

b) $\mathcal{S} = \{(1,2,-1,-2),\ (2,3,0,-1),\ (1,2,1,3),\ (1,3,-1,0)\} \quad \mathbb{V} = \mathbb{V}_4.$

c) $\mathcal{S} = \{(1,2,-1,-2),\ (2,3,0,-1),\ (1,2,1,4),\ (1,3,-1,0)\} \quad \mathbb{V} = \mathbb{V}_4.$

d) $\mathcal{S} = \{(2,2,-1),\ (2,-1,2),\ (-1,2,2)\} \quad \mathbb{V} = \mathbb{V}_3.$

e) $\mathcal{S} = \{(1,5,3),\ (2,7,3),\ (3,9,4)\} \quad \mathbb{V} = \mathbb{V}_3.$

Úloha 6.3. Nájdite ľubovoľnú bázu vektorového priestoru $\mathbb{V}$.

a) $\mathbb{V} = \mathfrak{L}(\{(1,1,1),\ (0,1,1),\ (-1,2,2)\}.$

b) $\mathbb{V}$ je priestor riešení sústavy rovníc:
$x_1 + x_2 + x_5 + x_6 = 0, \quad x_1 + x_3 + x_5 = 0, \quad x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 0, \quad x_4 + x_5 + x_6 = 0.$

Úloha 6.4. Určte dimenzie priestorov $\mathfrak{L}(\mathcal{S})$, $\mathfrak{L}(\mathcal{T})$, $\mathfrak{L}(\mathcal{S}) \cap \mathfrak{L}(\mathcal{T})$ a $\mathfrak{L}(\mathcal{S}) + \mathfrak{L}(\mathcal{T})$.

a) $\mathcal{S} = \{(1,2,1,1), (2,3,1,0), (3,1,1,-2)\} \quad \mathcal{T} = \{(0,4,1,3), (1,0,-2,-6), (1,0,3,5)\}.$

b) $\mathcal{S} = \{(2,2,4,3),\ (2,1,3,2),\ (1,1,2,1)\} \quad \mathcal{T} = \{(2,1,4,1),\ (2,2,5,1),\ (3,1,6,2)\}.$

Úloha 6.5. Dokážte nasledujúce tvrdenia.

a) Ak $\dim(\mathbb{V}) = k$ a $|\mathcal{T}| > k$, tak $\mathcal{T}$ je lineárne závislý systém vektorov.

b) Nech $\mathcal{S}$ je lineárne nezávislý systém vektorov vektorového priestoru $\mathbb{V}$. Potom existuje taký systém vektorov $\mathcal{T}$, že $\mathcal{S} \cup \mathcal{T}$ je báza priestoru $\mathbb{V}$.

c) Každý generujúci systém vektorov vektorového priestoru $\mathbb{V}$ obsahuje bázu vektorového priestoru $\mathbb{V}$.

7. Skalárny súčin

Úloha 7.1. Určte skalárny súčin vektorov $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, ak

a) $\|\overrightarrow{a}\| = 5$, $\|\overrightarrow{b}\| = 8$ a ich odchýlka je $\frac{\pi}{2}$; **b**) $\|\overrightarrow{a}\| = 1$ a $\overrightarrow{b} = 3\overrightarrow{a}$;

c) $\|\overrightarrow{a}\| = \|\overrightarrow{b}\| = 3$ a ich odchýlka je 135 stupňov.

Úloha 7.2. Vypočítajte skalárny súčin $(B - A)(C - B)$, ak

a) $d(B,C) = 5, \quad d(A,C) = 6, \quad d(A,B) = 7.$

Úloha 7.3. Vypočítajte skalárny súčin, normy a odchýlku vektorov $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, ak

a) $\overrightarrow{a} = (4,3)$, $\overrightarrow{b} = (1,7)$; **b**) $\overrightarrow{a} = (6,-8)$, $\overrightarrow{b} = (12,9)$;

c) $\overrightarrow{a} = (8,4,1)$, $\overrightarrow{b} = (2,-2,1)$; **d**) $\overrightarrow{a} = (2,5,1)$, $\overrightarrow{b} = (3,-2,4)$.

Úloha 7.4. Zistite aká je odchýlka vektorov $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, ak viete, že vektory $(\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b})$ a $(5\overrightarrow{a} - 4\overrightarrow{b})$ sú ortogonálne.

Úloha 7.5. Nájdite ľubovoľnú ortogonálnu bázu podpriestoru $\mathbb{V}$ zamerania $\mathbb{V}_3$.

a) $\mathbb{V} = \mathfrak{L}(\{(3,-2,1),(1,2,3)\})$; **b**) $\mathbb{V} = \{(x,y,z) \in \mathbb{V}_3 : \quad 3x + y - 2z = 0\}.$

Úloha 7.6. Nech $\mathcal{U}$, $\mathcal{W}$ sú podpriestory vektorového priestoru $\mathbb{V}$. Dokážte, že platia nasledujúce tvrdenia:

a) $(\mathcal{U}^{\perp})^{\perp} = \mathcal{U}$; **b)** $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}^{\perp} = \{\vec{o}\}$; **c)** $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{W} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{W}^{\perp} \subseteq \mathcal{U}^{\perp}$;
d) $(\mathcal{U} + \mathcal{W})^{\perp} = \mathcal{U}^{\perp} \cap \mathcal{W}^{\perp}$; **e)** $(\mathcal{U} \cap \mathcal{W})^{\perp} = \mathcal{U}^{\perp} + \mathcal{W}^{\perp}$.
f) $\dim(\mathcal{U}) + \dim(\mathcal{U}^{\perp}) = \dim(\mathbb{V})$.

8. Vonkajší súčin

Úloha 8.1. Body $A = [5, 1]$, $B = [-2, 2]$ sú dva vrcholy trojuholníka, ktorého obsah je 10. Určte súradnice tretieho vrchola, ak viete, že leží na osi $\mathbf{o}_x$.

Úloha 8.2. Vypočítajte súradnice ostatných vrcholov rovnobežníka $ABCD$, ak poznáte jeho obsah $\mathcal{O}$, súradnice vrcholov A, B a viete, že priesečník jeho uhlopriečok leží na priamke $\mathbf{p}$.

a) $\mathcal{O} = 12, \quad A = [2, 5], \quad B = [1, 6], \quad \mathbf{p} = \mathbf{o}_x.$
b) $\mathcal{O} = 17, \quad A = [-2, 4], \quad B = [1, 0], \quad \mathbf{p} = \mathbf{o}_y.$

Úloha 8.3. Vypočítajte objem pravidelného štvorstena.

Úloha 8.4. Vypočítajte obsah trojuholníka ABC, ak

$$A = [-1, 0, 1], \quad B = [0, 2, -3], \quad C = [4, 4, 1].$$

Úloha 8.5. Vypočítajte objem štvorstena $ABCD$ a vzdialenosť vrchola A od steny BCD, ak $\quad A = [1, -5, 4], \quad B = [0, 3, 1], \quad C = [-2, -4, 3], \quad D = [-4, 4, -2].$

9. Podpriestory priestoru $\mathbb{E}_n$

Úloha 9.1. Nájdite parametrické a všeobecné rovnice priamky prechádzajúcej bodmi A, B.

a) $A = [2, -1], \quad B = [4, 5]$; **b)** $A = [6, 1, -1], \quad B = [4, 1, 1]$;
c) $A = [3, 2, 1], \quad B = [2, 6, 0]$.

Úloha 9.2. Nájdite parametrické a všeobecné rovnice roviny prechádzajúcej bodmi A, B, C.

a) $A = [0, 0, 4], \quad B = [3, 2, -1], \quad C = [0, 5, 2]$.

Úloha 9.3. Nájdite parametrické rovnice podpriestoru určeného bodmi

a) $A = [1, 1, 2, 0, 1]$, $B = [3, 2, 1, 1, 2]$, $C = [5, 3, 0, 2, 3]$.

Úloha 9.4. Dokážte, že pre ľubovoľné podpriestory $\mathbb{E}'$, $\mathbb{E}^*$, $\mathbb{E}^\circ$ euklidovského priestoru $\mathbb{E}$ platia nasledujúce tvrdenia.

a) $\mathbb{E}' \vee \mathbb{E}^* = \mathbb{E}^* \vee \mathbb{E}'$
b) $(\mathbb{E}' \subseteq \mathbb{E}^\circ \quad \& \quad \mathbb{E}^* \subseteq \mathbb{E}^\circ) \quad \Rightarrow \quad (\mathbb{E}' \vee \mathbb{E}^* \subseteq \mathbb{E}^\circ)$
c) $(\mathbb{E}' \subseteq \mathbb{E}^* \quad \& \quad \mathbb{E}' \subseteq \mathbb{E}^\circ) \quad \Rightarrow \quad (\mathbb{E}' \subseteq \mathbb{E}^* \cap \mathbb{E}^\circ)$
d) $(\mathbb{E}' \vee \mathbb{E}^*) \vee \mathbb{E}^\circ = \mathbb{E}' \vee (\mathbb{E}^* \vee \mathbb{E}^\circ)$
e) $\mathbb{E}' \cap (\mathbb{E}^* \vee \mathbb{E}^\circ) \supseteq (\mathbb{E}' \cap \mathbb{E}^*) \vee (\mathbb{E}' \cap \mathbb{E}^\circ)$
f) $\mathbb{E}' \vee (\mathbb{E}^* \cap \mathbb{E}^\circ) \subseteq (\mathbb{E}' \vee \mathbb{E}^*) \cap (\mathbb{E}' \vee \mathbb{E}^\circ)$

Úloha 9.5. Určte vzájomnú polohu podpriestorov **P**, **Q** priestoru $\mathbb{E}_2$.

a) $\mathbf{P}:\ x+2y-3=0 \qquad \mathbf{Q}:\ 3x-y+2=0$

Úloha 9.6. Určte vzájomnú polohu podpriestorov **P**, **Q** priestoru $\mathbb{E}_3$.

a) $\mathbf{P}:\ x=2+t,\ y=1,\ z=1+t; \qquad \mathbf{Q}:\ x=1+2t+k,\ y=1+t+k,\ z=3t+k.$

b) $\mathbf{P}:\ x=3+t,\ y=1+k,\ z=1; \qquad \mathbf{Q}:\ x=2+t+2k,\ y=2+k,\ z=2+t.$

c) $\mathbf{P}:\ x=2+2t,\ y=3+2t,\ z=-t; \qquad \mathbf{Q}:\ x=1+t,\ y=2t+2k,\ z=2+t+3k.$

d) $\mathbf{P}:\ x-z-1=0,\ y-3=0; \qquad \mathbf{Q}:\ x-y-1=0,\ y-z+1=0.$

e) $\mathbf{P}:\ x=2+2t,\ y=1+2t,\ z=1+t; \qquad \mathbf{Q}:\ x+y-4z=0,\ x-2y+2z=0.$

Úloha 9.7. Určte vzájomnú polohu rovín ϱ a σ.

a) $\varrho:\ ax-3y+2z-2=0; \qquad \sigma:\ 2x-by-z+3=0.$

Úloha 9.8. Určte vzájomnú polohu priamok **p**, **q**.

a) $\mathbf{p}:\ 3x+y-2z+8=0,\ 5x-y-2z+11=0;$
$\mathbf{q}:\ x+y-z=4,\ 3x-y-z=12.$

b) $\mathbf{p}:\ x=a+t,\ y=18+9t,\ z=10+at;$
$\mathbf{q}:\ x+y-2z+3=0,\ 3x-2y+3z+9=0.$

c) $\mathbf{p}:\ x=t,\ y=-14+5t,\ z=-14+7t;$
$\mathbf{q}:\ x+5y-6z+34=0,\ 6x-2y-az+9=0.$

Úloha 9.9. Určte vzájomnú polohu priamky **p** a roviny ϱ.

a) $\mathbf{p}:\ x=1+2t,\ y=3+7t,\ z=7-13t; \qquad \varrho:\ 2x+3y+z-6=0.$

b) $\mathbf{p}:\ x=2+9t,\ y=7+16t,\ z=3+5t; \qquad \varrho:\ 3x-2y+z-4=0.$

c) $\mathbf{p}:\ 3x-y+z=1,\ x+y+z=7; \qquad \varrho:\ 2x+y-z+2=0.$

d) $\mathbf{p}:\ 3x-y+4z=10,\ x+2y-5z=-7; \qquad \varrho:\ 2x-17y+47z=79.$

Úloha 9.10. Nájdite rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom M a je rovnobežná s priamkou **p**.

a) $M=[3,4] \qquad \mathbf{p}:\ x-y+3=0.$

b) $M=[3,4] \qquad \mathbf{p}:\ x=2+2t, \quad y=5+2t.$

Úloha 9.11. Nájdite rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom $M=[-2,1]$ a medzi priamkami $x+2y+14=0$ a $x-y+1=0$ vytvára úsečku so stredom v bode M.

Úloha 9.12. Rovnobežník $ABCD$ má vrcholy $A=[4,2]$, $C=[1,2]$, uhlopriečku BD rovnobežnú s vektorom $(7,6)$ a stranu BC rovnobežnú s vektorom $(5,3)$. Nájdite vrcholy B, C uvažovaného rovnobežníka.

Úloha 9.13. Nájdite rovnicu strany **a** trojuholníka ABC, ak

a) $A=[-3,-3]$, $S_{\mathbf{a}}=[1,4]$, bod $D=[-2,1]$ leží na strane **c** a bod $E=[2,2]$ leží na strane **b**.

b) $A=[3,3], \qquad S_{\mathbf{a}}=[-2,1], \qquad \mathbf{v_c}:\ x+y-4=0.$

Úloha 9.14. Nájdite vrchol C trojuholníka ABC, ak

a) $A=[-4,3]$, $B=[4,-1]$ a priesečník výšok je $V=[3,3]$.

Úloha 9.15. Nájdite vrcholy B, C trojuholníka ABC, ak

a) $A=[4,3], \qquad \mathbf{t_c}:\ 2x-7y=3, \qquad \mathbf{t_b}:\ 2x+5y=7.$

Úloha 9.16. Nájdite rovnicu priamky prechádzajúcej bodom $D = [1, 3]$ a vrcholom A trojuholníka ABC, ak poznáme:

a) $B = [\Leftrightarrow 4, 2], \quad C = [4, 3], \quad T = [2, 1].$

b) $S_{\mathbf{a}} = [0, 3], \quad S_{\mathbf{b}} = [5, 1], \quad S_{\mathbf{c}} = [1, 0].$

Úloha 9.17. Nájdite všeobecnú rovnicu roviny, ktorá prechádza bodom A a je rovnobežná s priamkami $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$.

a) $\mathbf{p}: \ 2x + y \Leftrightarrow z + 3 = 0, \ x \Leftrightarrow y \Leftrightarrow z + 4 = 0; \qquad A = [1, 2, 2];$
$\mathbf{q}: \ x \Leftrightarrow y \Leftrightarrow z + 3 = 0, \ x \Leftrightarrow 2y \Leftrightarrow z + 4 = 0.$

Úloha 9.18. Nájdite rovnicu roviny prechádzajúcej priamkou $\mathbf{p}$ a rovnobežnej s priamkou $\mathbf{q}$.

a) $\mathbf{p}: \ x = 1 + 3t, \ y = 7 + t, \ z = \Leftrightarrow 1 + 2t; \qquad \mathbf{q}: \ x = 3 \Leftrightarrow t, \ y = 2 + 4t, \ z = 1 \Leftrightarrow t.$

Úloha 9.19. Nájdite rovnicu roviny, ktorej priesečnice so súradnicovými rovinami vytvárajú trojuholník so stranami a, b, c.

a) $a = 2\sqrt{3}, \quad b = c = 4.$

Úloha 9.20. Nájdite rovnicu roviny, v ktorej ležia priamky $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$.

a) $\mathbf{p}: \ 3x \Leftrightarrow 2y \Leftrightarrow z + 1 = 0, \ x + y \Leftrightarrow 3z + 3;$
$\mathbf{q}: \ 5x + y + 4z \Leftrightarrow 3 = 0, \ 2x + y + 2z \Leftrightarrow 2 = 0.$

b) $\mathbf{p}: \ 4x \Leftrightarrow y \Leftrightarrow 4z + 4 = 0, \ x \Leftrightarrow 4y + 5z \Leftrightarrow 5 = 0;$
$\mathbf{q}: \ 3x + 2z \Leftrightarrow 1 = 0, \ x \Leftrightarrow y + 1 = 0.$

c) $\mathbf{p}: \ x + 2y + z \Leftrightarrow 5 = 0, \ 2x + y + 3z \Leftrightarrow 11 = 0;$
$\mathbf{q}: \ x \Leftrightarrow 3y \Leftrightarrow 2z = 0, \ 2x \Leftrightarrow 4y \Leftrightarrow 5z = 0.$

Úloha 9.21. Nájdite rovnice priamok, ktoré sú rovnobežné s rovinou ϱ a pretínajú priamky $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$.

a) $\mathbf{p}: \ x + y \Leftrightarrow z + 2 = 0, \ x \Leftrightarrow 2y \Leftrightarrow z + 5 = 0; \qquad \varrho: \ x + y + z \Leftrightarrow 1 = 0;$
$\mathbf{q}: \ x \Leftrightarrow y \Leftrightarrow z + 12 = 0, \ x + y \Leftrightarrow z = 0.$

Úloha 9.22. Nájdite také d, aby priamka $\mathbf{p}$ pretínala priamku $\mathbf{q}$.

a) $\mathbf{p}: \ x + 3y + 2z + 6 + 0, \ 3x \Leftrightarrow y + z + d = 0; \qquad \mathbf{q}: \ \text{os } \mathbf{o}_y.$

Úloha 9.23. Nájdite rovnice priamky, ktorá leží v rovine ϱ a pretína priamky $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$.

a) $\mathbf{p}: \ x = 3 \Leftrightarrow 2t, \ y = 5 \Leftrightarrow 3t, \ z = 3 + 3t; \qquad \varrho: \ 3x + y \Leftrightarrow z + 1 = 0;$
$\mathbf{q}: \ x = 4 \Leftrightarrow 6t, \ y = 2 + 2t, \ z = 8 \Leftrightarrow 9t.$

Úloha 9.24. Určte parametrické a všeobecné rovnice priamky, ktorá je rovnobežná s rovinami ϱ, ν a prechádza bobom A.

a) $\varrho: \ x \Leftrightarrow 4y + 2z \Leftrightarrow 5 = 0, \qquad \nu: \ 3x + y \Leftrightarrow z + 2 = 0, \qquad A = [\Leftrightarrow 1, 1, 2].$

b) $\varrho: \ x + y \Leftrightarrow z + 2 = 0, \qquad \nu: \ 2x \Leftrightarrow y + 5z \Leftrightarrow 4 = 0, \qquad A = [1, 5, 7].$

c) $\varrho: \ x \Leftrightarrow 2y \Leftrightarrow 1 = 0, \qquad \nu: \ x \Leftrightarrow 2 = 0, \qquad A$ je ťažisko trojuholníka EFG, kde $E = [2, 14, 3]$, $F = [1, \Leftrightarrow 10, \Leftrightarrow 7]$, $G = [0, 2, 7]$.

d) $\varrho: \ x \Leftrightarrow y \Leftrightarrow z = 4, \qquad \nu: \ x + y \Leftrightarrow 3z = 0, \qquad A = [4, 5, 1].$

Úloha 9.25. Nájdite rovnicu priečky mimobežiek $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, ktorá má smerový vektor $\vec{w}$.

a) $\mathbf{p}: \ x = 4 + t, \ y = 6 + 2t, \ z = -1 - 2t;$ $\quad \vec{w} = (2, 3, -1);$
$\mathbf{q}: \ x = 3 + 2t, \ y = 5 + 2t, \ z = -1 + t.$

b) $\mathbf{p}: \ x = 2 + 3t, \ y = -5 - 2t, \ z = 3 - t;$ $\quad \vec{w} = (3, 2, -1);$
$\mathbf{q}: \ x = 5 + 2t, \ y = -3 + 3t, \ z = 2 - 5t.$

c) $\mathbf{p}: \ x = 1 + 2t, \ y = t, \ z = 1;$ $\quad \vec{w} = (2, 1, 4);$
$\mathbf{q}: \ x = 2 + 3t, \ y = 2, \ z = 3 + 2t.$

d) $\mathbf{p}: \ x = t, \ y = -1 + t, \ z = 2t;$ $\quad \vec{w} = (-2, 6, 2);$
$\mathbf{q}: \ x = 3 + 3t, \ y = 3, \ z = 2 + t.$

e) $\mathbf{p}: \ x = 7 + 3t, \ y = 1 + 2t, \ z = 2 + t;$ $\quad \vec{w} = (1, -4, 5);$
$\mathbf{q}: \ x = 3 + t, \ y = 6 + 2t, \ z = 8 - 3t.$

Úloha 9.26. Nájdite rovnicu priečky mimobežiek $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, ktorá prechádza bodom M.

a) $\mathbf{p}: \ x = -1 + 3t, \ y = -3 - 2t, \ z = 4 - t;$ $\quad M = [2, -5, 3];$
$\mathbf{q}: \ x = 3 + 2t, \ y = -6 + 3t, \ z = -3 - 5t.$

b) $\mathbf{p}: \ x = 3 + t, \ y = 4 + 2t, \ z = 1 - 2t;$ $\quad M = [1, 1, 2];$
$\mathbf{q}: \ x = 1 + 2t, \ y = 3 + 2t, \ z = -2 + t.$

c) $\mathbf{p}: \ x = 1 + 2t, \ y = t, \ z = 1;$ $\quad M = [2, 2, 1];$
$\mathbf{q}: \ x = 2 + 3t, \ y = 2, \ z = 3 + 2t.$

d) $\mathbf{p}: \ x = 2 + 3t, \ y = -5 - 2t, \ z = 3 - t;$ $\quad M = [-1, -7, 4];$
$\mathbf{q}: \ x = 5 + 2t, \ y = -3 + 3t, \ z = 2 - 5t.$

e) $\mathbf{p}: \ x = -1 + 3t, \ y = -3 - 2t, \ z = 2 - t;$ $\quad M = [-4, -5, 3];$
$\mathbf{q}: \ x = 2 + 2t, \ y = -1 + 3t, \ z = 1 - 5t.$

Úloha 9.27. Nájdite rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom M a pretína priamky $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$.

a) $\mathbf{p}: \ 2x - 3y - 11 = 0, \ x - 3z - 1 = 0;$ $\quad \mathbf{q}: \ 2x - y = 0, \ 3y + 2z = 34;$
$M = [1, 15, 8].$

b) $\mathbf{p}: \ \{[0, -2, 1]; \ (2, -1, 5)\};$ $\quad \mathbf{q}: \ \{[1, 1, -1]; \ (3, -2, -4)\};$ $\quad M = [9, -11, -15].$

Úloha 9.28. Nájdite rovnice priamok, ktoré pretínajú priamky $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$.

a) $\mathbf{p}_1: \ x = 0, \ z = 0;$ $\quad \mathbf{p}_2: \ y = 2, \ z = 1;$ $\quad \mathbf{p}_3: \ x = -1, \ z = 1.$

10. Zväzky a trsy nadrovín

Úloha 10.1. Zistite či dané roviny určujú zväzok alebo trs rovín.

a) $x + y + 2z = 1; \quad 2x - y + z = -3; \quad x - 5y - 4z = 2.$

b) $2x - y + 3z + 1 = 0; \quad 6x - 5y + z - 1 = 0; \quad -8x + 4y - 12z + 9 = 0.$

Úloha 10.2. Nájdite rovnicu roviny, ktorá patrí trsu $\mathcal{T}$

a) $\mathcal{T}: \quad 2x + 5y + 6z - 3 = 0, \ 3x + 5y + 9z - 11 = 0, \ x + 7y + 3z + 1 = 0;$
a je rovnobežná s rovinou $2x - 4y + 6z - 15 = 0.$

b) $\mathcal{T}: \quad 2x - 3y + 5z + 4 = 0, \ x - 3y - 4z - 3 = 0, \ 7x - 5y + z + 8 = 0;$
a prechádza bodmi $P = [5, 7, 2]$, $Q = [4, 5, 1]$.

Úloha 10.3. Nájdite rovnicu roviny, v ktorej ležia priamky **p**, **q**.

a) **p** : $x \Leftrightarrow 3z + 1 = 0,\ y + 5z \Leftrightarrow 7 = 0;$
q : $2x \Leftrightarrow y \Leftrightarrow 5 = 0,\ 7x \Leftrightarrow z + 2 = 0.$

b) **p** : $3x + y + 3z + 7 = 0,\ 5x \Leftrightarrow 3y + 2z + 5 = 0;$
q : $8x \Leftrightarrow 2y + 5z = 0,\ 4x + 6y + 7z + 4 = 0.$

c) **p** : $7x \Leftrightarrow 8y \Leftrightarrow 15z \Leftrightarrow 8 = 0,\ 3x + 12y + 9z + 12 = 0;$
q : $11x + 7y + 2z \Leftrightarrow 32 = 0,\ 14x + 3y \Leftrightarrow z \Leftrightarrow 49 = 0.$

d) **p** : $3x + 2y \Leftrightarrow z + 1 = 0,\ x + y \Leftrightarrow 3z + 3 = 0;$
q : $5x + y \Leftrightarrow 4z \Leftrightarrow 3 = 0,\ 2x + y + 2z \Leftrightarrow 2 = 0.$

e) **p** : $5x \Leftrightarrow 7y + 3z \Leftrightarrow 21 = 0,\ 3x \Leftrightarrow 5y + 2z \Leftrightarrow 14 = 0;$
q : $7x + 3y + z \Leftrightarrow 7 = 0,\ 7x \Leftrightarrow y + 2z \Leftrightarrow 14 = 0.$

Úloha 10.4. Nájdite rovnicu roviny, ktorá patrí trsu $\mathcal{T}$ a zväzku $\mathcal{Z}$.

a) $\mathcal{T}$: $9x \Leftrightarrow 16y + 5z \Leftrightarrow 31 = 0,\ 7x \Leftrightarrow 6y + 6z \Leftrightarrow 31 = 0,\ 8x \Leftrightarrow 14y + z \Leftrightarrow 34 = 0;$
$\mathcal{Z}$: $x \Leftrightarrow 3y + 2z + 5 = 0,\ 2x \Leftrightarrow 6y + 4z \Leftrightarrow 1 = 0.$

b) $\mathcal{T}$: $8x + 15y + 24z + 10 = 0,\ 7x + 17y + 21z + 1 = 0,\ 7x + 8y + 22z + 20 = 0;$
$\mathcal{Z}$: $x \Leftrightarrow 2y + 3z + 2 = 0,\ 2x \Leftrightarrow 4y + 6z \Leftrightarrow 7 = 0.$

c) $\mathcal{T}$: $2x \Leftrightarrow 5y + 7z \Leftrightarrow 14 = 0,\ x + 2y \Leftrightarrow 6z + 7 = 0,\ 3x + 4y + 11z \Leftrightarrow 10 = 0;$
$\mathcal{Z}$: $5x \Leftrightarrow 8y \Leftrightarrow 6z \Leftrightarrow 23 = 0,\ 4x \Leftrightarrow y \Leftrightarrow 3z \Leftrightarrow 4 = 0.$

d) $\mathcal{T}$: $2x \Leftrightarrow 5y + z + 1 = 0,\ 3x \Leftrightarrow 7y + 5z + 8 = 0,\ x + 3y \Leftrightarrow 6z \Leftrightarrow 18 = 0;$
$\mathcal{Z}$: $x \Leftrightarrow 3y + 2z + 5 = 0,\ 2x \Leftrightarrow 6y + 4z + 1 = 0.$

e) $\mathcal{T}$: $x \Leftrightarrow 2y + 3z \Leftrightarrow 4 = 0,\ 3x + 5y + 9z \Leftrightarrow 11 = 0,\ x + 7y + 3z + 1 = 0;$
$\mathcal{Z}$: $x \Leftrightarrow 2y + 3z + 2 = 0,\ 2x \Leftrightarrow 4y + 6z \Leftrightarrow 7 = 0.$

f) $\mathcal{T}$: $9x \Leftrightarrow 16y + 5z \Leftrightarrow 1 = 0,\ 7x \Leftrightarrow 6y \Leftrightarrow 6z \Leftrightarrow 27 = 0,\ 8x \Leftrightarrow 14y + z \Leftrightarrow 8 = 0;$
$\mathcal{Z}$: $x \Leftrightarrow 3y + 2z + 5 = 0,\ 2x \Leftrightarrow 6y + 4z \Leftrightarrow 1 = 0.$

g) $\mathcal{T}$: $8x + 15y + 24z \Leftrightarrow 25 = 0,\ 7x + 17y + 21z \Leftrightarrow 21 = 0,\ 7x + 8y + 21z \Leftrightarrow 26 = 0;$
$\mathcal{Z}$: $x \Leftrightarrow 2y + 3z + 2 = 0,\ 2x \Leftrightarrow 4y + 6z \Leftrightarrow 7 = 0.$

h) $\mathcal{T}$: $5x \Leftrightarrow 12y + 6z + 9 = 0,\ 4x \Leftrightarrow 4y \Leftrightarrow z \Leftrightarrow 10 = 0,\ 3x \Leftrightarrow 2y \Leftrightarrow 5z \Leftrightarrow 17 = 0;$
$\mathcal{Z}$: $x \Leftrightarrow 3y + 2z + 5 = 0,\ 2x \Leftrightarrow 6y + 2z + 5 = 0.$

i) $\mathcal{T}$: $4x + 3y + 12z \Leftrightarrow 15 = 0,\ 4x + 12y + 12z \Leftrightarrow 10 = 0,\ 3x + 5y + 9z \Leftrightarrow 11 = 0;$
$\mathcal{Z}$: $x \Leftrightarrow 2y + 3z + 2 = 0,\ 2x \Leftrightarrow 4y + 6z \Leftrightarrow 7 = 0.$

j) $\mathcal{T}$: $2x + 5y + 6z \Leftrightarrow 3 = 0,\ 3x + 5y + 9z \Leftrightarrow 11 = 0,\ x + 7y + 3z + 1 = 0;$
$\mathcal{Z}$: $x \Leftrightarrow 2y + 3z + 2 = 0,\ 2x \Leftrightarrow 4y + 6z \Leftrightarrow 5 = 0.$

k) $\mathcal{T}$: $x + 2y + z \Leftrightarrow 5 = 0,\ 2x + 3y + z \Leftrightarrow 1 = 0,\ 2x + y + 3z \Leftrightarrow 11 = 0;$
$\mathcal{Z}$: $5x + 7y \Leftrightarrow 19z = 0,\ 2x + 12y \Leftrightarrow 13z = 0.$

l) $\mathcal{T}$: $2x + 4y + z = 3,\ 7x + 4y \Leftrightarrow 9z = 5,\ 4x + 8y \Leftrightarrow 3z = 7;$
$\mathcal{Z}$: $x + y \Leftrightarrow z = 1,\ 4x + 2y \Leftrightarrow 7z = 3.$

Úloha 10.5. Určte prienik úsečky $\overleftrightarrow{AB}$ s rovinou α, ak $A = [1, 3, 1]$, $B = [3, \Leftrightarrow 1, 2]$ a α je rovina patriaca trsu $\mathcal{T}$ a zväzku $\mathcal{Z}$, pričom
$\mathcal{T}$: $x \Leftrightarrow 2y + 3z \Leftrightarrow 4 = 0,\ 3x \Leftrightarrow 5y + 9z \Leftrightarrow 11 = 0,\ x + 7y + 3z + 1 = 0;$
$\mathcal{Z}$: $x \Leftrightarrow 2y + 3z + 2 = 0,\ 2x \Leftrightarrow 4y + 6z \Leftrightarrow 7 = 0.$

11. Vzájomná poloha podpriestorov $\mathbb{E}_n$

Úloha 11.1. Určte súčet vzdialeností ťažiska trojuholníka ABC od jeho strán, ak

a) $A = [1, 1], \qquad B = [-1, 2], \qquad C = [0, -1].$

Úloha 11.2. Vypočítajte dĺžky výšok trojuholníka ABC, ak

a) $A = [6, -2], \qquad B = [-4, 2], \qquad C = [4, 3].$

Úloha 11.3. Na priamke **p** nájdite bod, ktorý je rovnako vzdialený od rovín ϱ a σ.

a) $\mathbf{p}$: os $\mathbf{o}_z$; $\qquad \varrho:\ 6x - 2y + 3z - 14 = 0; \qquad \sigma:\ 2x - 2y - z - 8 = 0.$

Úloha 11.4. Určte vzdialenosť bodu A od priamky **p**.

a) $A = [2, 3, -1], \qquad \mathbf{p}:\ 2x - 2y + z + 3 = 0,\ 3x - 2y + 2z + 17 = 0.$

b) $A = [-2, 4, 3], \qquad \mathbf{p}:\ x - 2y - z + 8 = 0,\ x + y - z + 2 = 0.$

Úloha 11.5. Nájdite rovnicu guľovej plochy, ktorá má stred v bode S a dotýka sa priamky **p**.

a) $S = [2, 3, -1], \qquad \mathbf{p}:\ x = 1 + 2t,\ y = -5 + t,\ z = -15 - 2t.$

b) $S = [-2, 4, 3], \qquad \mathbf{p}:\ x - 2y - z + 8 = 0,\ x + y - z + 2 = 0.$

Úloha 11.6. Určte bod, ktorý je symetrický s bodom P podľa priamky **p**.

a) $P = [2, -5, 7], \qquad \mathbf{p} := \{[5, 4, 6], [-2, -17, -8]\}.$

b) $P = [1, 2, 3], \qquad \mathbf{p}:\ x = 8 + t,\ y = 13 + 3t,\ z = 4 - t.$

Úloha 11.7. Nájdite parametrické rovnice priamky, ktorá je súmerná s priamkou **p** podľa osi súmernosti **o**.

a) $\mathbf{p}:\ x = 3 + t,\ y = 7 + t,\ z = -2 + t, \qquad \mathbf{o}:\ x - 2y - 2z - 2 = 0,\ x + 2y - 6z + 10 = 0.$

Úloha 11.8. Nájdite vzdialenosť priamok **p**, **q**.

a) $\mathbf{p}:\ x - 1 = y + 1 = z - 1, \qquad \mathbf{q}:\ x - 2 = 0 = y - 1.$

b) $\mathbf{p} := \{[3, 4, 0], [0, 0, 12]\}, \qquad \mathbf{q} := \{[3, 0, 0], [0, 4, 0]\}.$

Úloha 11.9. Stredy dvoch rovnakých gúľových plôch sa pohybujú po úsečkách $\overleftrightarrow{AB}$ a $\overleftrightarrow{CD}$. Pri tomto pohybe sa guľové plochy navzájom neobmedzujú, ale v istom momente sa dotýkajú. Určte ich polomer a bod dotyku.

a) $A = [-6, 0, 4], \qquad B = [0, 6, 1], \qquad C = [7, 2, 1], \qquad D = [-1, 2, 9].$

Úloha 11.10. Nájdite polomer najmenšej guľovej plochy, ktorá sa dotýka priamok **p**, **q**.

a) $\mathbf{p}:\ x = -2 + 2t,\ y = 3 + t,\ z = 2 + t, \qquad \mathbf{q}:\ y - z - 1 = 0,\ x - 2z + 4 = 0.$

b) $\mathbf{p}:\ x = 7t,\ y = -2 + 3t,\ z = 1 + 5t, \qquad \mathbf{q}:\ x = 1 + 4t,\ y = 3 + 3t,\ z = -2 + 2t.$

Úloha 11.11. Nájdite objem najmenšej kocky, ktorá má s priamkami **p** a **q** neprázdny prienik.

a) $\mathbf{p}:\ x = -2 + 2t,\ y = 3 + t,\ z = 2 + t, \qquad \mathbf{q}:\ x + y - 3z + 3 = 0,\ x - y - z + 5 = 0.$

Úloha 11.12. Určte vzdialenosť dvoch mimobežných hrán pravidelného štvorstena.

Úloha 11.13. Určte vzdialenosť telesovej a s ňou mimobežnej stenovej uhlopriečky kocky.

Úloha 11.14. Nájdite vzdialenosť nepretinajúcich sa uhlopriečok dvoch susedných stien kocky.

Úloha 11.15. Kváder má hrany dĺžky a, b, c. Nájdite vzdialenosť jeho telesovej uhlopriečky od uhlopriečky jeho najmenšej steny.

a) $a = 3, \qquad b = 4, \qquad c = 12.$

Úloha 11.16. Vypočítajte objem kvádra $ABCDA'B'C'D'$ ak poznáme:

a) $d(A,B) : d(A,D) : d(A,A') = 1 : 2 : 3; \quad d(\overleftrightarrow{AC'}, \overleftrightarrow{DA'}) = \sqrt{157}.$

b) $d(A,B) = d(A,D) = d(A,A'); \quad d(\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{A'D}) = 3.$

Úloha 11.17. Určte vzájomnú polohu podpriestorov z cvičení 9.5. – 9.9. v zmysle metrických vlastností.

Úloha 11.18. Nájdite rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom A, pričom je kolmá na priamku $\mathbf{p}$ a pretína priamku $\mathbf{q}$.

a) $\mathbf{p}: \ x = 4 + 4t, \ y = 2 + 4t, \ z = 3 \Leftrightarrow 9t; \qquad A = [1, 15, 8];$
$\mathbf{q}: \ x = 1 + 3t, \ y = \Leftrightarrow 3 + 4t, \ z = 2t.$

b) $\mathbf{p}: \ x = 1 + t, \ y = \Leftrightarrow 1 + 2t, \ z = t, \qquad \mathbf{q} = \mathbf{p}, \qquad A = [4, 1, 2].$

Úloha 11.19. Nájdite všeobecnú rovnicu roviny, ktorá obsahuje priamku $\mathbf{p}$ a je kolmá na rovinu ϱ.

a) $\mathbf{p}: \ 2x + 3y \Leftrightarrow z + 5 = 0, \ 3x \Leftrightarrow 2y + 7z \Leftrightarrow 4 = 0;$
$\varrho: \ x = 1 + 2u + 2v, \ y = \Leftrightarrow 5 \Leftrightarrow 3v, \ z = 1 \Leftrightarrow u \Leftrightarrow v.$

b) $\mathbf{p}: \ 3x \Leftrightarrow 4y + z \Leftrightarrow 12 = 0, \ 4x \Leftrightarrow 7y + 3z + 4 = 0; \qquad \varrho: \ 5x + 2y \Leftrightarrow z + 30 = 0.$

c) $\mathbf{p}: \ x = \Leftrightarrow 5 + 5t, \ y = 1 \Leftrightarrow 2t, \ z = 5t; \qquad \varrho: \ x \Leftrightarrow 4y + 8z + 4 = 0.$

Úloha 11.20. Svetelný lúč sa šíri po priamke $\mathbf{p}$. Pri dopade na priamku $\mathbf{q}$ sa lúč odráža. Nájdite rovnicu priamky, po ktorej sa šíri odrazený lúč.

a) $\mathbf{p}: \ x + 3y + 1 = 0 \qquad \mathbf{q}: \ 3x + 4y + 5 = 0$

b) $\mathbf{p}: \ 2x \Leftrightarrow y + 7 = 0 \qquad \mathbf{q}: \ 2x \Leftrightarrow 3y + 10 = 0$

Úloha 11.21. Svetelný lúč prechádza bodom A, odráža sa od roviny ϱ a dopadá do bodu B. Nájdite parametrické rovnice dráhy dopadajúceho a odrazeného svetelného lúča.

a) $A = [2, 3, \Leftrightarrow 3]; \qquad B = [5, 2, \Leftrightarrow 6]; \qquad \varrho: \ x \Leftrightarrow y \Leftrightarrow 4z \Leftrightarrow 9 = 0.$

12. Transformácia sústavy súradníc

Úloha 12.1. Určte koeficienty a, b, c tak, aby rovnice

$$x = \tfrac{1}{2}x' + ay' + 2, \quad y = bx' + cy'$$

boli transformačnými rovnicami sústavy súradníc v $\mathbb{E}_2$.

Úloha 12.2. Zistite, či dané rovnice sú transformačné rovnice sústavy súradníc.

a) $x = x' + 3, \quad y = \Leftrightarrow y' + 2, \quad z = z' \Leftrightarrow 1;$ **b)** $x = z' + 2, \quad y = x' \Leftrightarrow 1, \quad z = z' + 3;$

c) $x = \frac{2}{7}x' \Leftrightarrow \frac{6}{7}y' + \frac{3}{7}z', \quad y = \frac{3}{7}x' \Leftrightarrow \frac{2}{7}y' \Leftrightarrow \frac{6}{7}z', \quad z = \frac{6}{7}x' + \frac{3}{7}y' + \frac{2}{7}z';$

Úloha 12.3. Nájdite transformačné rovnice sústavy súradníc

$$\langle [2,1]; \ (\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}), \ (\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \Leftrightarrow\tfrac{1}{2}) \rangle.$$

Určte súradnice bodu $[1,1]$ a rovnicu priamky $2x \Leftrightarrow y + 1 = 0$ v novej sústave súradníc.

13. Kanonický tvar rovnice plochy druhého stupňa

Úloha 13.1. Zistite aká množina bodov priestoru $\mathbb{E}_2$ je určená rovnicou

a) $2x^2 \Leftrightarrow 3xy \Leftrightarrow 2y^2 \Leftrightarrow 10x \Leftrightarrow 5y = 0$; **b**) $3x^2 + 3y^2 \Leftrightarrow 2xy \Leftrightarrow 10x + 10y + 13 = 0$;
c) $x^2 + y^2 + 6xy + 10x \Leftrightarrow 2y \Leftrightarrow 9 = 0$; **d**) $x^2 + y^2 + 2xy + 2x \Leftrightarrow 2y \Leftrightarrow 5 = 0$;
e) $x^2 \Leftrightarrow 4xy + 4y^2 \Leftrightarrow 6x + 12y + 9 = 0$; **f**) $x^2 + 4xy + 5y^2 \Leftrightarrow 2x \Leftrightarrow 6y + 2 = 0$;
g) $25x^2 + 30xy + 9y^2 + 70x + 42y + 49 = 0$; **h**) $9x^2 \Leftrightarrow 12xy + 4y^2 \Leftrightarrow 30x + 20y \Leftrightarrow 11 = 0$;
i) $x^2 \Leftrightarrow xy + y^2 \Leftrightarrow 8x + 4y + 2 = 0$; **j**) $x^2 + 6xy + y^2 + 12x + 20y + 51 = 0$;
k) $8x^2 \Leftrightarrow 6xy + y^2 \Leftrightarrow 4x \Leftrightarrow 4 + 0$; **l**) $9x^2 \Leftrightarrow 6xy + y^2 \Leftrightarrow 12x + 4y + 4 = 0$.

Úloha 13.2. Zistite, aká plocha priestoru $\mathbb{E}_3$ je daná rovnicou:

a) $x^2 + y^2 = 16$; **b**) $\frac{x^2}{16} \Leftrightarrow \frac{z^2}{9} = 1$; **c**) $y^2 = 6x$; **d**) $x^2 \Leftrightarrow y^2 = 0$;
e) $x^2 + y^2 + 8 = 0$; **f**) $x^2 \Leftrightarrow y^2 + 2x + 2y = 0$; **g**) $2x^2 + y^2 + 20x \Leftrightarrow z^2 + 34 = 0$.

Úloha 13.3. Určte typ kvadratickej plochy a jej základné parametre.

a) $5x^2 + 3y^2 + 3z^2 \Leftrightarrow 2xy \Leftrightarrow 2xz + 2yz \Leftrightarrow 6x + 2y \Leftrightarrow 2z = 0$;
b) $x^2 \Leftrightarrow y^2 + 4xz \Leftrightarrow 4yz + 4x + 4y + 7z \Leftrightarrow 9 = 0$; **c**) $z = xy$;
d) $x^2 + y^2 + 5z^2 + 6xy + 2xz + 2yz + 2x \Leftrightarrow 2y + 6z = 0$;
e) $7x^2 \Leftrightarrow 24xz \Leftrightarrow 38x + 24z + 175 = 0$; **f**) $x^2 \Leftrightarrow 4xz + 4z^2 \Leftrightarrow 6x + 12z + 9 = 0$.

Úloha 13.4. Zistite, aká množina bodov je daná rovnicou:

a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = a$; **b**) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} \Leftrightarrow \frac{z^2}{4} = a$; **c**) $\frac{x^2}{25} \Leftrightarrow \frac{y^2}{16} \Leftrightarrow \frac{z^2}{9} = a$;
d) $x^2 + y^2 + 4az = 0$; **e**) $16x^2 + 16y^2 \Leftrightarrow 8az \Leftrightarrow a^2 = 0$; **f**) $3x^2 \Leftrightarrow 3y^2 + a^2 z = 0$;
g) $3x^2 + 5y^2 \Leftrightarrow 3z^2 + 15a^2 = 0$; **h**) $x^2 \Leftrightarrow 3y^2 \Leftrightarrow 3z^2 \Leftrightarrow 6ax + 30az + 84a^2 = 0$;
kde a je ľubovoľné reálne číslo.

Úloha 13.5. Nájdite priesečník danej kvadratickej plochy a priamky, ak ich rovnice sú:

a) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} + \frac{z^2}{16} = 1$, $\frac{x}{3} = \frac{y-8}{-4} = \frac{z-4}{-2}$; **b**) $\frac{x^2}{81} \Leftrightarrow \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1$, $\frac{x-27}{9} = \frac{y+3}{-9} = \frac{z+15}{-20}$;
c) $\frac{x^2}{8} \Leftrightarrow \frac{y^2}{5} = z$, $\frac{x}{4} = \frac{y-10}{-5} = \frac{z+14}{11}$.

Úloha 13.6. Nájdite kužeľosečku, v ktorej daná rovina pretína kvadratickú plochu.

a) $x + z \Leftrightarrow 1 = 0$, $\frac{x^2}{3} \Leftrightarrow \frac{y^2}{4} = 2z$; **b**) $4x \Leftrightarrow 3y \Leftrightarrow z = 0$, $\frac{x^2}{16} \Leftrightarrow \frac{y^2}{9} \Leftrightarrow \frac{z^2}{25} = 1$;
c) $x \Leftrightarrow 3y + z \Leftrightarrow 1 = 0$, $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{3} = 1$.

Úloha 13.7. Napíšte rovnice priemetov rezu danej kvadratickej plochy rovinou do súradnicových rovín:

a) $z = x^2 \Leftrightarrow y^2$, $x + y + z \Leftrightarrow 1 = 0$; **b**) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$, $3x + 2y + z = 0$.

Úloha 13.8. Napíšte rovnicu rotačnej plochy, ktorá vznikne rotáciou krivky **k** okolo priamky **p**.

a) $\mathbf{k}:$ $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1,\ z = 0$; $\mathbf{p} = o_x$; **b**) $\mathbf{k}:$ $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1,\ z = 0$; $\mathbf{p} = o_y$;
c) $\mathbf{k}:$ $x^2 \Leftrightarrow z^2 = 9,\ y = 0$; $\mathbf{p} = o_z$; **d**) $\mathbf{k}:$ $x^2 \Leftrightarrow z^2 = 9,\ y = 0$; $\mathbf{p} = o_x$;
e) $\mathbf{k}:$ $z^2 = 4x,\ y = 0$; $\mathbf{p} = o_x$; **f**) $\mathbf{k}:$ $y + x = 0,\ z = 0$; $\mathbf{p} = o_y$.

14. Klasifikácia kužeľosečiek

Úloha 14.1. Nájdite bod kužeľosečky $\mathbf{k}$, ktorý má najmenšiu vzdialenosť od bodu A.

a) $\mathbf{k}:\ 2x^2+3xy-2y^2-5x+5y-3=0;\qquad A=[0,0]$.

b) $\mathbf{k}:\ 3x^2+4xy+12x+16y-36=0;\qquad A=[-2,4]$.

Úloha 14.2. Nájdite rovnice dotyčníc kužeľosečky $\mathbf{k}$, ktoré sú rovnobežné s priamkou $\mathbf{p}$.

a) $\mathbf{k}:\ 9x^2+24xy+41y^2+18x+24y-36=0;\qquad \mathbf{p}:$ priamka prechádzajúca hlavnou polosou kužeľosečky $\mathbf{k}$.

b) $\mathbf{k}:\ 4x^2-4xy+y^2-2x-14y+7=0;\qquad \mathbf{p}:$ priamka kolmá na os symetrie kužeľosečky $\mathbf{k}$.

Úloha 14.3. Nájdite rovnicu kružnice, ktorá má zo všetkých kružníc, dotýkajúcich sa kužeľosečky $\mathbf{k}$ práve vo dvoch bodoch, najväčší polomer.

a) $\mathbf{k}:\ x^2-xy+y^2-8x+4y+2=0$.

15. Klasifikácia kvadratických plôch

Úloha 15.1. Nájdite stred a polomer guľovej plochy, ak jej rovnica je:

a) $x^2+y^2+z^2+8x=0$; **b)** $x^2+y^2+z^2-2x-4y-5=0$;

c) $x^2+y^2+z^2-6x+2y-4z-11=0$; **d)** $x^2+y^2+z^2+2x+2y+4z-15=0$;

e) $4x^2+4y^2+4z^2-8x+24y-16z-25=0$;

Úloha 15.2. Napíšte rovnicu guľovej plochy, ak

a) jej stred je $S=[-1,2,-5]$ a prechádza počiatkom súr. systému;

b) jej stred je $S=[5,-6,3]$ a prechádza bodom $A=[7,-3,9]$;

c) koncové body jedného jej priemeru sú $A=[3,-5,2]$, $B=[9,7,6]$;

d) jej stred je $S=[-1,3,4]$ a dotyková rovina je $3x+6y+2z+12=0$;

e) prechádza troma bodmi $A=[4,-1,0]$, $B=[-1,2,4]$ a $C=[-4,-2,3]$ a jej stred leží v rovine $2x+y-z+6=0$;

f) prechádza štyrmi bodmi $A=[2,-4,2]$, $B=[-4,8,2]$, $C=[5,-1,14]$ a $D=[-7,-4,5]$;

g) jej stred je $S=[-7,3,4]$ a dotýka sa osi o_y.

Úloha 15.3. Napíšte rovnicu guľovej plochy, ktorá prechádza:

a) počiatkom súr. systému a kružnicou $x^2+y^2+z^2=16$, $3x-2y+6z-8=0$;

b) kružnicou $x^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$, $x-y-z-1=0$ a bodom $A=[2,2,-2]$;

c) kružnicami $x^2+y^2+z^2=25$, $z=3$ a $x^2+y^2+z^2=113$, $z=7$.

Úloha 15.4. Napíšte rovnicu guľovej plochy opísanej štvorstenu s vrcholmi $O=[0,0,0]$, $A=[3,0,0]$, $B=[0,4,0]$, $C=[0,0,3]$ a nájdite jej stred a polomer.

Úloha 15.5. Napíšte rovnicu guľovej plochy, ktorá

a) má polomer $r=7$ a dotýka sa roviny $3x-6y+2z-12=0$ v bode $M=[2,1,6]$;

b) dotýka sa rovín $2x+2y+z-12=0$, $2x+2y+z+18=0$, pričom bod dotyku je $M=[2,-2,12]$;

c) dotýka sa rovín $2x-y-2z+2=0$, $2x-y-2z-4=0$ a jej stred leží na priamke $x+4y+5z-14=0$, $x-2y-4z+7=0$.

Úloha 15.6. Napíšte rovnicu guľovej plochy, ktorá má stred $S = [4, -2, 3]$ a na priamke $\frac{x-5}{2} = \frac{y-6}{-2} = \frac{z-2}{3} = t$ vytína tetivu dĺžky 12.

Úloha 15.7. Sú dané dve guľové plochy rovnicami $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 16$ a $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 92,2$

a) Napíšte rovnicu roviny, ktorá obsahuje ich spoločné body.

b) Napíšte rovnicu guľovej plochy, ktorá prechádza ich spoločnými bodmi a počiatkom súr. systému.

Úloha 15.8. Napíšte rovnicu guľovej plochy, ktorá je určená

a) kružnicou $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$, $x + y - 2z = 0$ a bodom $M = [1, 2, 3]$;

b) kružnicou $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y - 6z - 5 = 0$, $5x + 2y - z - 3 = 0$ a bodom $M = [2, -1, 1]$.

Úloha 15.9. Zistite, aká je vzájomná poloha priamky a guľovej plochy, ak ich rovnice sú:

a) $\frac{x+5}{7} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-8}{-3}$, $x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 2y - 4z + 16 = 0$;

b) $\frac{x-6}{1} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z-2}{1}$, $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 2z + 34 = 0$.

Úloha 15.10. Zistite, aká je vzá jomnápoloha guľovej plochy $x^2 + y^2 + z^2 = 144$ a roviny

a) $2x + 3y - z + 6 = 0$; **b**) $x + y - z - 30 = 0$; **c**) $2x + 2y + z - 36 = 0$.

Úloha 15.11. Nájdite stred a polomer kružnice, ktorá je rezom guľovej plochy $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 14y + 2z + 30 = 0$ s rovinou $3x + y - z - 9 = 0$.

Úloha 15.12. Napíšte rovnice dotykových rovín ku guľovej ploche $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z+2)^2 = 36$

a) v bode $M = [3, 1, 2]$;

b) v priesečníkoch tejto guľovej plochy s priamkou $\frac{x-9}{4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}$.

Úloha 15.13. Napíšte rovnice dotykových rovín ku guľovej ploche $(x+3)^2 + (y-7)^2 + (z+4)^2 = 49$, ktoré sú rovnobežné

a) s rovinou $2x - 6y + 3z - 5 = 0$;

b) s priamkami $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{2}$, $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+1}{6}$.

Úloha 15.14. Napíšte rovnicu guľovej plochy, ktorá prechádza danými kružnicami k_1, k_2, kde $k_1 :\ x^2 + z^2 = 25, y = 2$; $k_2 : x^2 + z^2 = 16, y = 3$.

Úloha 15.15. Napíšte rovnice dotykových rovín ku guľovej ploche $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 2y + 26z - 113 = 0$, ktoré súrovnobežné s priamkami $x = 5 + 2t$, $y = 1 - 3t$, $z = -13 + 2t$; $x = -7 + 3t$, $y = 1 - 2t$, $z = 8$.

Úloha 15.16. Dokážte, že priamkou $8x - 11y + 8z = 30$, $x - y - 2z = 0$ môžeme viesť jedinú dotykovú rovinu ku guľovej ploche $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 4z - 15 = 0$ a napíšte jej rovnicu.

Úloha 15.17. Dokážte, že cez priamku $8x - 11y + 8z - 30 = 0$, $x - 2z = 0$ možno viesť dve roviny dotýkajúce sa guľovej plochy $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 4z - 15 = 0$. Napíšte ich rovnice.

Úloha 15.18. Napíšte rovnicu rezu elipsoidu $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$ rovinou:
a) R_{xy}; **b**) R_{yz}; **c**) $x=5$; **d**) $x+y=0$; **e**) $x+y+z=0$.

Úloha 15.19. Trojosovému elipsoidu je opísaný kváder tak, že dotykovými bodmi sú vrcholy elipsoidu. Vypočítajte dĺžku tej časti telesovej uhlopriečky kvádra, ktorá leží vo vnútri elipsoidu.

Úloha 15.20. Nájdite dotykovú rovinu k elipsoidu $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{36}=1$, ak
a) bod dotyku je $M=[6,\frac{5}{3},4]$;
b) dotyková rovina je rovnobežná s rovinou $25x+18y+105z=0$.

Úloha 15.21. Napíšte rovnicu tetivy elipsoidu $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$, ktorá leží v rovine $x=2$ a jej stred je v bode $S=[2,1,\Leftrightarrow 1]$.

Úloha 15.22. Napíšte rovnicu rezu hyperboloidu $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}\Leftrightarrow\frac{z^2}{9}=1$ rovinou:
a) $x=3$; **b**) $x=\Leftrightarrow 5$; **c**) $y=\Leftrightarrow 5$; **d**) $y=4$; **e**) $z=3$.

Úloha 15.23. Napíšte rovnice povrchových priamok hyperboloidu $\frac{x^2}{9}\Leftrightarrow\frac{y^2}{4}\Leftrightarrow\frac{z^2}{4}=\Leftrightarrow 1$, ktoré prechádzajú bodom $M=[\Leftrightarrow 6,2,4]$.

Úloha 15.24. Dokážte, že rez jednodielneho rotačného hyperboloidu rovinou, ktorá je rovnobežná s osou rotácie vo vzdialenosti rovnej polomeru "hrdla" hyperboloidu, je dvojica priamok.

Úloha 15.25. Nájdite rovnicu množiny bodov všetkých priamok, ktoré prechádzajú bodom V a niektorým bodom kužeľosečky **k**.
a) $\mathbf{k}:\ x^2+y^2=1,\ z=1$; $V=[0,0,0]$.
b) $\mathbf{k}:\ x^2\Leftrightarrow z^2=\Leftrightarrow 1,\ y=1$; $V=[0,0,0]$.
c) $\mathbf{k}:\ y^2+2x\Leftrightarrow 1=0,\ x\Leftrightarrow z=1$; $V=[0,0,0]$.

Úloha 15.26. Napíšte rovnicu kužeľovej plochy, ktorej vrchol je v počiatku súr. systému, ak určujúca krivka má rovnice:
a) $x^2+y^2=16,\ z=3$; **b**) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1,\ z=1$;
c) $\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{8}=1,\ x=\Leftrightarrow 1$; **d**) $y^2=2x\Leftrightarrow 1,\ x\Leftrightarrow z\Leftrightarrow 1=0$.

Úloha 15.27. Napíšte rovnicu rotačnej kužeľovej plochy, ak
a) jej os je o_z, prechádza bodom $M=[6,8,\Leftrightarrow 3]$ a vytvárajúce priamky zvierajús jej osou uhol $\frac{\pi}{4}$;
b) jej os je o_x a vytvárajúce priamky prechádzajú počiatkom súr. systému a zvierajús touto osou uhol $\frac{\pi}{4}$;
c) osi o_x, o_y, o_z sú jej povrchové priamky.

Úloha 15.28. Napíšte rovnicu kužeľovej plochy, ktorá má:
a) vrchol $V=[0,5,0]$ a dotýka sa guľovej plochy $x^2+y^2+z^2=16$;
b) vrchol $V=[0,0,0]$ a dotýka sa guľovej plochy $(x\Leftrightarrow 2)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=4$;

Úloha 15.29. Napíšte rovnice kužeľových plôch opísaných guľovým plochám
$x^2+y^2+z^2=36,\ x^2+y^2+(z\Leftrightarrow 10)^2=1$.

Úloha 15.30. Napíšte rovnicu dotykovej roviny k dvojdielnemu hyperboloidu $\frac{x^2}{25} \Leftrightarrow \frac{y^2}{16} \Leftrightarrow \frac{z^2}{25} = 1$ v bode $A = [15, \Leftrightarrow 8, \Leftrightarrow 10]$.

Úloha 15.31. Nájdite dotykové roviny k dvojdielnemu hyperboloidu danému rovnicou $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} \Leftrightarrow \frac{z^2}{4} + 1 = 0$, ktoré prechádzajú priamkou:

a) $\frac{x+9}{3} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$; **b)** $\frac{x}{3} = \frac{y}{-6} = \frac{z+2}{-4}$.

Úloha 15.32. Napíšte rovnicu dotykovej roviny k dvojdielnemu hyperboloidu $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \Leftrightarrow \frac{z^2}{10} = \Leftrightarrow 1$, ktorá obsahuje priamku $y = z \Leftrightarrow 1 = 0$.

Úloha 15.33. Napíšte rovnicu dotykovej roviny k paraboloidu $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{12}$, ktorá je rovnobežná s rovinou $x \Leftrightarrow y + 2z + 2 = 0$.

Úloha 15.34. Nájdite kužeľosečku, v ktorej daná rovina pretína hyperbolický paraboloid $\frac{x^2}{12} \Leftrightarrow \frac{y^2}{9} = 4z$, ak rovnica roviny je:

a) $x + 4 = 0$; **b)** $y \Leftrightarrow 1 = 0$; **c)** $z = 0$;
d) $x \Leftrightarrow y = 0$; **e)** $z \Leftrightarrow 1 = 0$; **f)** $z + 1 = 0$.

Úloha 15.35. Dokážte, že rovina $2x + y \Leftrightarrow 3 = 0$ pretína hyperbolický paraboloid $4x^2 \Leftrightarrow y^2 + z = 0$ v priamke.

Úloha 15.36. Dokážte, že rovina $5x + 2y \Leftrightarrow z \Leftrightarrow 10 = 0$ pretína hyperbolický paraboloid $z = xy$ v dvoch priamkach.

Úloha 15.37. Nájdite rovnicu rotačnej valcovej plochy, ktorá prechádza bodom M a jej osou je priamka $\mathbf{p}$.

a) $\mathbf{p}: \ x = 1 + 3t, \ y = \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 2t, \ z = 2 + t$; $M = [2, \Leftrightarrow 1, 1]$.

Úloha 15.38. Nájdite rovnice rotačnej valcovej plochy, ktorej povrchové priamky sú kolmé na rovinu ϱ a dotýkajú sa guľovej plochy $\mathbf{g}$.

a) $\varrho: \ 2x \Leftrightarrow y \Leftrightarrow z + 11 = 0$; $\mathbf{g}: \ x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Úloha 15.39. Nájdite rovnicu rotačnej valcovej plochy opísanej guľovým plochám $\mathbf{g}_1$ a $\mathbf{g}_2$.

a) $\mathbf{g}_1: \ x^2 + y^2 + z^2 \Leftrightarrow 2x \Leftrightarrow 2y \Leftrightarrow 4z = 10$; $\mathbf{g}_2: \ x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

Úloha 15.40. Napíšte rovnicu rotačnej valcovej plochy, ak

a) prechádza bodom $A = [4, 1, 8]$ a jej os je určená priamkou $(x \Leftrightarrow 1) : (y \Leftrightarrow 1) : (z + 1) = 1 : 0 : 1$;

b) jej povrchové priamky sú kolmé na rovinu $2x \Leftrightarrow y \Leftrightarrow z + 11 = 0$ a dotýkajú sa guľovej plochy $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Úloha 15.41. Nájdite rovnicu kvadratickej plochy, ktorá

a) pozostáva práve z tých bodov, ktoré sú rovnako vzdialené od rovín $x \Leftrightarrow 5y + 4z + 5 = 0$ a $2x \Leftrightarrow 10y + 8z + 3 = 0$.

Úloha 15.42. Nájdite rovnice všetkých rovín symetrií danej kvadratickej plochy.

a) $3y^2 \Leftrightarrow 4xy \Leftrightarrow 10xz + 4yz = 0$.

Úloha 15.43. Nájdite rovnicu guľovej plochy so stredom v bode S, ktorá sa dotýka kvadratickej plochy $\mathbf{k}$.

a) $\mathbf{k}: \ x^2 + 6xz + z^2 + 12x + 20z + 48 = 0; \qquad S = [-3, 3, -1].$

Úloha 15.44. Nájdite bod kvadratickej plochy $\mathbf{k}$, ktorý leží najbližšie k bodu A.

a) $\mathbf{k}: \ x^2 - y^2 + 4xz - 4yz + 3 = 0; \qquad A = [0, 0, 0] \ ([2, 2, -1]).$

b) $\mathbf{k}: \ 4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 4xz + 2uz - 9 = 0; \qquad A = [1, 1, 1].$

Úloha 15.45. Elipsoid s polosami a, b, c sa dotýka roviny ϱ a kvadratickej plochy $\mathbf{k}$. Napíšte rovnicu daného elipsoidu.

a) $a = b = 1, \ c = 3; \qquad \varrho: \ 2x - 2y + z - 19 = 0;$

$\mathbf{k}: \ 5x^2 + 5y^2 + 8z^2 + 8xy - 4xz + 4yz + 10x - 10y - 13z + 5 = 0.$

Úloha 15.46. Určte vzdialenosť bodu A od kvadratickej plochy $\mathbf{k}$.

a) $\mathbf{k}: \ 5x^2 + 4xz + 8z^2 - 32x - 56z + 80 = 0; \qquad A = [2, 1, 3].$

Úloha 15.47. Napíšte rovnicu valcovej plochy, ak

a) určujúca krivka je $x^2 + y^2 = 16$, $z = 2$ a os valca je určená vektorom $\vec{a} = (1, 1, 3)$;

b) určujúca krivka je $y^2 = 2x$, $z = 0$ a povrchové priamky sú rovnobežnés priamkou $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-0}{3}$;

c) určujúca krivka je $x^2 - y^2 = 1$, $z = 1$ a povrchové priamky zvierajú so súradnicovými osami rovnaké uhly.

Literatúra:

1. M.Hejný, V.Zaťko, P.Kršňak, *Geometria* 1, SPN Bratislava, 1985.
2. M.Sekanina a kol., *Geometrie* 1 *a* 2, SPN Praha, 1986, 1988.
3. J.Duplák, *Geometria* 1, 2, PedF UPJŠ, Prešov, 1985.
4. J.Eliaš, J.Horváth, J.Kajan, *Zbierka úloh z vyššej matematiky* 1, Bratislava.