44. ročník MO, úloha A-III-1

Nech $ABCD$ je štvorsten taký, že platí

$$|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle CAD| + |\sphericalangle DAB| = 180°$$

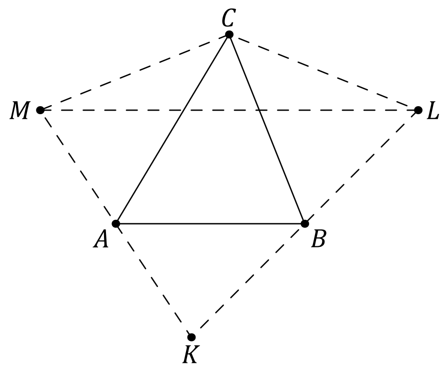
a

$$|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CBD| + |\sphericalangle DBA| = 180°.$$

Dokážte, že $|CD| \geq |AB|$.

Riešenie

Nech K, L, M sú obrazy vrcholu D v otočeniach postupne okolo hrán AB, BC, CA do roviny ABC mimo trojuholníka ABC.



Potom

$$|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle CAM| + |\sphericalangle KAB| = |\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle CAD| + |\sphericalangle DAB| = 180°$$

a

$$|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CBL| + |\sphericalangle KBA| = |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CBD| + |\sphericalangle DBA| = 180°,$$

takže body A a B ležia na úsečkách KM, resp. KL, a keďže

$$|AK| = |AD| = |AM|$$

a

$$|BK| = |BD| = |BL|,$$

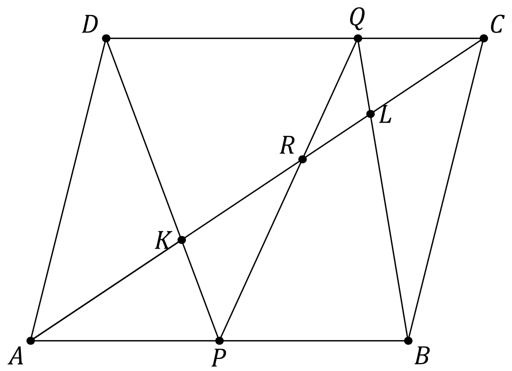
sú to ich stredy. Úsečka AB je teda stredná priečka trojuholníka KML rovnobežná s ML. Z trojuholníkovej nerovnosti

$$|CD| = \frac{1}{2} \cdot 2\,|CD| = \frac{1}{2} \cdot (|CD| + |CD|) = \frac{1}{2} \cdot (|CM| + |CL|) \geq \frac{1}{2} \cdot |ML| = |AB|\,.$$

40. ročník MO, úloha B-S-3

Nech $ABCD$ je rovnobežník a K a L sú body jeho uhlopriečky AC také, že $|AK| : |KL| : |LC| = 4 : 5 : 3$. Označme P priesečník priamok AB a DK, a Q priesečník priamok CD a BL. Nech R je priesečník úsečky AC a priamky PQ. Vypočítajte pomer $|PR| : |QR|$.

Riešenie



Keďže úsečka AP je rovnobežná s úsečkou CD, je jej obrazom v rovnoľahlosti so stredom K a koeficientom $\frac{|AK|}{|CK|}$. Analogicky, keďže úsečka CQ je rovnobežná s úsečkou AB, je jej obrazom v rovnoľahlosti so stredom L a koeficientom $\frac{|CL|}{|AL|}$.

Keďže $|AK| : |KL| : |LC| = 4 : 5 : 3$, existuje kladné reálne číslo t také, že $|AK| = 4t$, $|KL| = 5t$, $|LC| = 3t$.

Keďže úsečka AP je rovnobežná s úsečkou CQ, trojuholník APR je pri tomto poradí vrcholov obrazom trojuholníka CQR v rovnoľahlosti so stredom R a koeficientom $\frac{|AP|}{|CQ|}$. Preto

$$\frac{|PR|}{|QR|} = \frac{|AP|}{|CQ|} = \frac{\frac{|AK|}{|CK|} \cdot |CD|}{\frac{|CL|}{|AL|} \cdot |AB|} = \frac{|AK| \cdot |AL|}{|CK| \cdot |CL|} \cdot \frac{|CD|}{|AB|} = \frac{|AK| \cdot (\big|AK) + |KL|\big|}{(|LC| + |KL|) \cdot |LC|} \cdot 1 = \frac{4t \cdot (4t + 5t)}{(5t + 3t) \cdot 3t} = \frac{4t \cdot 9t}{8t \cdot 3t} = \frac{3}{2}.$$

40. ročník MO, úloha A-II-4

Nech f je všade rastúca funkcia z množiny kladných prirodzených čísel do seba taká, že pre každé dve kladné prirodzené čísla m a n platí $f(mn) = f(m)f(n)$ a $f(2) = 4$. Určte $f(30)$.

Riešenie 1

Dokážeme indukciou, že ak n je kladné prirodzené číslo, tak pre každé kladné prirodzené číslo k platí $f(n^k) = f(n)^k$:

1 Platí $f\left(n^1\right) = f(n) = f(n)^1$.

2 Nech k je kladné prirodzené číslo a nech $f(n^k) = f(n)^k$. Potom platí

$$f\left(n^{k+1}\right) = f\left(n^k \cdot n\right) = f\left(n^k\right) \cdot f(n) = f(n)^k \cdot f(n) = f(n)^{k+1}.$$

Potom podľa pomocného tvrdenia

$$8^2 = 64 = 4^3 = f(2)^3 = f\left(2^3\right) = f(8) < f(9) = f\left(3^2\right) = f(3)^2$$

a

$$f(3)^5 = f\left(3^5\right) = f(243) < f(256) = f\left(2^8\right) = f(2)^8 = 4^8 = 65536 < 10^5,$$

z čoho

$$8 < f(3) < 10,$$

$$f(3) = 9.$$

Potom opäť podľa pomocného tvrdenia

$$24^2 = 576 = 4^3 \cdot 9 = f(2)^3 \cdot f(3) = f\left(2^3\right) \cdot f(3) = f\left(2^3 \cdot 3\right) = f(24) < f(25) = f\left(5^2\right) = f(5)^2$$

a

$$f(5)^3 = f\left(5^3\right) = f(125) < f(128) = f\left(2^7\right) = f(2)^7 = 4^7 = 16384 < 17576 = 26^3,$$

z čoho

$$24 < f(5) < 26,$$

$$f(5) = 25.$$

Z toho už

$$f(30) = f(2 \cdot 3 \cdot 5) = f(2 \cdot 3) \cdot f(5) = f(2) \cdot f(3) \cdot f(5) = 4 \cdot 9 \cdot 25 = 900.$$

Treba ešte ukázať, že existuje aspoň jedna funcia spĺňajúca podmienku zo zadania. Zrejem vyhovuje f, kde $f(x) = x^2$. Vtedy totiž

$$f(mn) = (mn)^2 = m^2n^2 = f(m)f(n)$$

a

$$f(2) = 2^2 = 4.$$

Riešenie 2

Platí

$$f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) \cdot f(1),$$

takže

$$f(1) = 1.$$

Dokážeme indukciou, že ak n je kladné prirodzené číslo, tak pre každé prirodzené číslo k platí $f(n^k) = f(n)^k$:

1 Platí $f(n^0) = f(1) = 1 = f(n)^0$.

2 Nech k je prirodzené číslo a nech $f\left(n^k\right) = f(n)^k$. Potom platí

$$f\left(n^{k+1}\right) = f\left(n^k \cdot n\right) = f\left(n^k\right) \cdot f(n) = f(n)^k \cdot f(n) = f(n)^{k+1}.$$

Dokážeme, že $f(x) = x^2$: Nech ? je $<$ alebo $>$ a nech x je kladné prirodzené číslo také, že $f(x)$? x^2. Nech $y = f(x)$. Nech a a b sú kladné celé čísla také, že

$$\log_4 y \; ? \; \frac{a}{b} \; ? \; \log_4 x^2,$$

takže

$$y \; ? \; 4^{\frac{a}{b}} \; ? \; x^2,$$

$$y^b \; ? \; 4^a \; ? \; x^{2b},$$

z čoho

$$2^a \; ? \; x^b.$$

Potom z všade-rastúcosti f

$$f\left(x^b\right) = f(x)^b = y^b \; ? \; 4^a = f(2)^a = f\left(2^a\right) \; ? \; f\left(x^b\right),$$

čo je spor.

Z toho $f(30) = 30^2 = 900$.