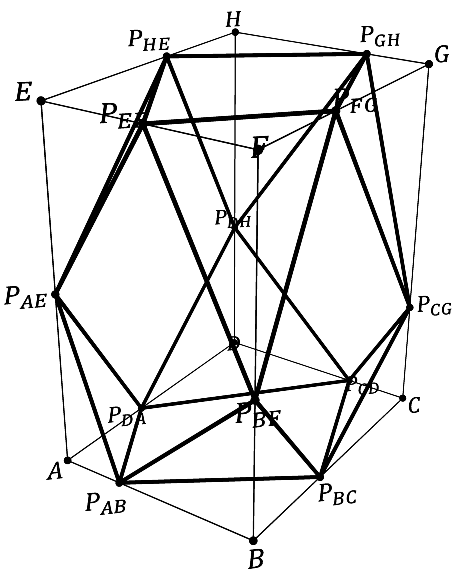
43. ročník MO, úloha A-III-2

V kvádri je umiestnený konvexný mnohosten. ktorého kolmý priemet na každú stenu kvádra je totožný s touto stenou. Aký najmenší môže byť pomer objemov mnohostena a kvádra?

Leischner

Riešenie

Označme kváder $ABCDEFGH$ a mnohosten $\mathcal{M}$ Priemet $\mathcal{M}$ do ľubovoľnej steny obsahuje jej vrcholy, do ktorých sa premietajú hrany kvádra na túto stenu. Každá hrana kvádra je kolmá na niektorú stenu, takže na nej existuje aspoň jeden bod z $\mathcal{M}$. Ak XY, vyberme ľubovoľný taký bod a označme ho P_{XY}. Keďže týchto bodov je najviac 12, ich konvexný obal je tiež konvexný mnohosten, ktorý je časťou $\mathcal{M}$, a teda aj $ABCDEFGH$. Označme ho $\mathcal{N}$. Vznikne teda odrezaním (prípadne degenerovaných) 8 štvorstenov $XP_{XY}P_{XZ}P_{XW}$, kde X je vrchol kvádra a Y, Z, W sú všetky jeho susedné vrcholy.



Potom platí

$$\begin{aligned}&\text{objem}(\mathcal{N})\\ &= \text{objem}(ABCDEFGH)\\ &- (\text{objem}(AP_{AB}P_{AD}P_{AE}) + \text{objem}(EP_{EF}P_{EH}P_{EA}))\\ &- (\text{objem}(BP_{BC}P_{BA}P_{BF}) + \text{objem}(FP_{FG}P_{FE}P_{FB}))\\ &- (\text{objem}(CP_{CD}P_{CB}P_{CG}) + \text{objem}(GP_{GH}P_{GF}P_{GC}))\\ &- (\text{objem}(DP_{DA}P_{DC}P_{DH}) + \text{objem}(HP_{HE}P_{HG}P_{HD}))\,.\end{aligned}$$

Pritom

$$\begin{aligned}&\text{objem}(AP_{AB}P_{AD}P_{AE}) + \text{objem}(EP_{EF}P_{EH}P_{EA})\\ &= \frac{1}{3}\cdot \text{obsah}(AP_{AB}P_{AD})\cdot |AP_{AE}| + \frac{1}{3}\cdot \text{obsah}(EP_{EF}P_{EH})\cdot |EP_{EA}|\\ &= \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot |AP_{AB}|\cdot|AP_{AD}|\right)\cdot |AP_{AE}| + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot |EP_{EF}|\cdot|EP_{EH}|\right)\cdot |EP_{EA}|\\ &= \frac{1}{6}\cdot |AP_{AB}|\cdot|AP_{AD}|\cdot|AP_{AE}| + \frac{1}{6}\cdot |EP_{EF}|\cdot|EP_{EH}|\cdot|EP_{EA}|\\ &\le \frac{1}{6}\cdot |AB|\cdot|AD|\cdot|AP_{AE}| + \frac{1}{6}\cdot |EF|\cdot|EH|\cdot|EP_{EA}|\\ &= \frac{1}{6}\cdot |AB|\cdot|AD|\cdot|AP_{AE}| + \frac{1}{6}\cdot |AB|\cdot|AD|\cdot|EP_{EA}|\\ &= \frac{1}{6}\cdot |AB|\cdot|AD|\cdot(|AP_{AE}| + |EP_{EA}|)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot |AB| \cdot |AD| \cdot |AE|$$
$$= \frac{1}{6}\text{objem}(ABCDEFGH).$$

Analogicky

$$\text{objem}(BP_{BC}P_{BA}P_{BF}) + \text{objem}(FP_{FG}P_{FE}P_{FB}) \leq \frac{1}{6}\text{objem}(ABCDEFGH),$$
$$\text{objem}(CP_{CD}P_{CB}P_{CG}) + \text{objem}(GP_{GH}P_{GF}P_{GC}) \leq \frac{1}{6}\text{objem}(ABCDEFGH),$$
$$\text{objem}(DP_{DA}P_{DC}P_{DH}) + \text{objem}(HP_{HE}P_{HG}P_{HD}) \leq \frac{1}{6}\text{objem}(ABCDEFGH),$$

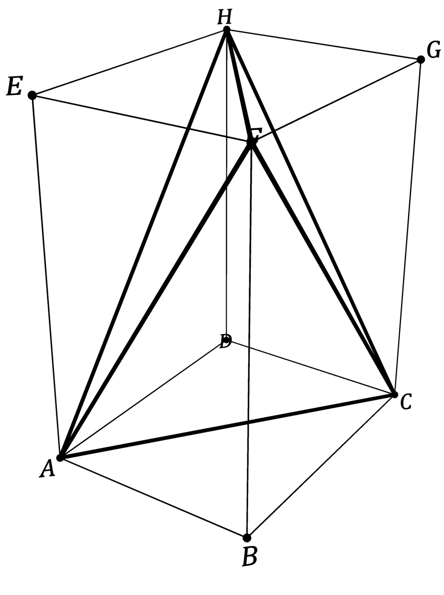
takže

$$\text{objem}(\mathcal{M}) \geq \text{objem}(\mathcal{N}) \geq \text{objem}(ABCDEFGH) - 4 \cdot \frac{1}{6}\text{objem}(ABCDEFGH) = \frac{1}{3}\text{objem}(ABCDEFGH),$$

a teda

$$\frac{\text{objem}(\mathcal{M})}{\text{objem}(ABCDEFGH)} \geq \frac{1}{3}.$$

Najmenšia hodnota je dosiahnuteľná, a to napríklad vtedy, keď je $\mathcal{M}$ štvorsten $ACFH$.



Vtedy $P_{AB} = P_{AD} = P_{AE} = A$, $P_{CD} = P_{CB} = P_{CG} = C$, $P_{FG} = P_{FE} = P_{FB} = F$, $P_{HE} = P_{HG} = P_{HD} = H$ a $\mathcal{N} = \mathcal{M}$, takže vo všetkých nerovnostiach nastáva rovnosť.

Hľadaný najmenší pomer je teda $\frac{1}{3}$.

43. ročník MO, úloha C-I-3

Na šachovom turnaji hranom systémom každý s každým sa zúčastnili len prváci a druháci. Napriek tomu, že druhákov bolo 3-krát viac ako prvákov, získali spolu len o 3 body viac ako prváci. Koľko žiakov sa zúčastnilo turnaja?
(V šachu sa výhru dáva 1 bod, za remízu 0,5 boda a za prehru 0 bodov.)

Riešenie

Nech n je počet prvákov, ktorí sa zúčastnili turnaja. Druhákov potom bolo $3n$ a celkový počet žiakov bol $4n$. Tí medzi sebou zohrali spolu $\frac{1}{2}\cdot 4n(4n-1)$ čiže $2n(4n-1)$ zápasov. Keďže v každom zápase sa rozdeľuje vždy 1 bod, celkový počet bodov je tiež $2n(4n-1)$.
Počty bodov prvákov a druhákov označme postupne a a b. Z toho

$$a + b = 2n(4n-1)$$

a

$$a = b - 3.$$

Z toho

$$(b-3) + b = 2n(4n-1),$$
$$2b - 3 = 2n(4n-1),$$
$$2b = 2n(4n-1) + 3,$$
$$b = \frac{2n(4n-1)+3}{2}.$$

Vzájomných zápasov druhákov je $\frac{1}{2}\cdot 3n(3n-1)$, takže získali aspoň toľko bodov. Preto

$$b \ge \frac{1}{2}\cdot 3n(3n-1),$$
$$\frac{2n(4n-1)+3}{2} \ge \frac{1}{2}\cdot 3n(3n-1),$$
$$2n(4n-1) + 3 \ge 3n(3n-1),$$
$$8n^2 - 2n + 3 \ge 9n^2 - 3n,$$
$$0 \ge n^2 - n - 3,$$
$$0 \ge 4n^2 - 4n - 12,$$
$$13 \ge 4n^2 - 4n + 1,$$
$$13 \ge (2n-1)^2,$$
$$\sqrt{13} \ge 2n - 1,$$
$$\sqrt{13} + 1 \ge 2n,$$
$$\frac{\sqrt{13}+1}{2} \ge n,$$
$$2{,}4 \ge n,$$
$$n \in \{1, 2\}.$$

Rozoberme prípady:

- Nech $n = 1$.

  Potom
  $$b = \frac{2\cdot 1(4\cdot 1-1)+3}{2} = \frac{2(4-1)+3}{2} = \frac{2\cdot 3+3}{2} = \frac{6+3}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5,$$
  takže
  $$a = 4{,}5 - 3 = 1{,}5.$$

  Turnaja sa teda zúčastnil 1 prvák a 3 druháci. Ak sa všetky zápasy skončili remízou, prvák získal $3\cdot 0{,}5$ čiže 1,5 bodu a druháci zvyšných $\binom{3+1}{2} - 1{,}5$ čiže 4,5 bodu, čo je 3-krát viac. Situácia teda naozaj mohla nastať.

- Nech $n = 2$.

  Potom
$$b = \frac{2 \cdot 2(4 \cdot 2 - 1) + 3}{2} = \frac{4(8 - 1) + 3}{2} = \frac{4 \cdot 7 + 3}{2} = \frac{28 + 3}{2} = \frac{31}{2} = 15{,}5,$$
  takže
$$a = 15{,}5 - 3 = 12{,}5.$$

  Turnaja sa teda zúčastnil 2 prváci a 6 druháci. Ak jeden z prvákov porazil všetkých druhákov, druhý všetkých okrem jedného, s ktorým remizoval, a navzájom napríklad remizovali, získali spolu $6 \cdot 1 + (5 \cdot 1 + 1 \cdot 0{,}5) + 1$ čiže 12,5 bodov. Druháci potom získali zvyšných $\binom{6+2}{2} - 12{,}5$ čiže 15,5 bodu, čo je 3-krát viac. Situácia teda naozaj mohla nastať.

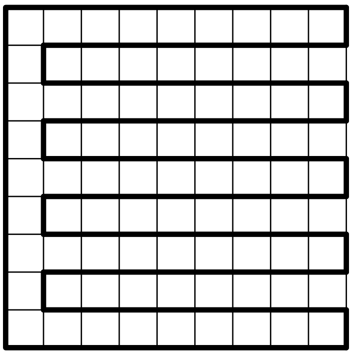
Turnaja sa teda zúčastnilo $1 + 3$ čiže 4 alebo $2 + 6$ čiže 8 žiakov.

43. ročník MO, úloha C-I-4

V meste je 10 severojužných a 10 východozápadných ulíc, ktoré sa pretínajú v 100 križovatkách. Autobus má po uzavretom okruhu prejsť všetky križovatky práve raz. Navrhnite jeho trasu tak, aby počet zmien smeru jazdy bol čo najmenší.

Riešenie

Trasa na obrázku prechádza všetkými križovatkami a má 20 zmien smeru:



Ukážeme, že zmien nemôže byť menej. Rozoberme prípady:

- Nech autobus prechádza každou severojužnou ulicou.

  Na každej z 10 severojužných ulíc sú aspoň 2 zmeny smeru – tam, kde na ňu príde, a tam, kde z nej odbočuje. Smerov zmien je teda aspoň $2 \cdot 10$ čiže 20.

- Nech existuje severojužná ulica, ktorou autobus neprechádza.

  Potom každou jeho križovatkou autobus prechádza východozápadným smerom, takže prechádza každou východozápadnou ulicou.

  Na každej z 10 východozápadných ulíc sú aspoň 2 zmeny smeru – tam, kde na ňu príde, a tam, kde z nej odbočuje. Smerov zmien je teda aspoň $2 \cdot 10$ čiže 20.