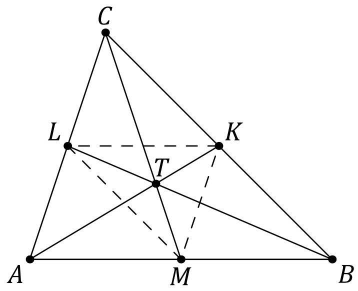
41. ročník MO, úloha C-I-5

Nech a, b, c sú veľkosti strán trojuholníka a p, q, r veľkosti jeho ťažníc. Dokážte, že

$$\frac{3}{4} < \frac{p+q+r}{a+b+c} < 1.$$

Riešenie

Označme trojuholník ABC, stredy jeho strán BC, CA, AB postupne K, L, M a jeho ťažisko T.



- Z trojuholníkových nerovností v trojuholníkoch AKM, BKL, CLM a z toho, že KL, LM, MK sú stredné priečky trojuholníka ABC, dostávame

$$p+q+r = |AK| + |BL| + |CM| < (|AM| + |MK|) + (|BK| + |KL|) + (|CL| + |LM|)$$

$$= \left(\frac{1}{2}|AB| + \frac{1}{2}|CA|\right) + \left(\frac{1}{2}|BC| + \frac{1}{2}|AB|\right) + \left(\frac{1}{2}|CA| + \frac{1}{2}|BC|\right) = |BC| + |CA| + |AB| = a+b+c,$$

takže

$$\frac{p+q+r}{a+b+c} < 1.$$

- Z trojuholníkových nerovností v trojuholníkoch BTC, CTA, ATB

$$a+b+c = |BC| + |CA| + |AB| < (|BT| + |CT|) + (|CT| + |AT|) + (|AT| + |BT|)$$

$$= 2\,|AT| + 2\,|BT| + 2\,|CT| = 2\cdot\frac{2}{3}\,|AK| + 2\cdot\frac{2}{3}\,|BL| + 2\cdot\frac{2}{3}\,|CM| = \frac{4}{3}(|AK| + |BL| + |CM|) = \frac{4}{3}(p+q+r),$$

takže

$$\frac{3}{4} < \frac{p+q+r}{a+b+c}.$$

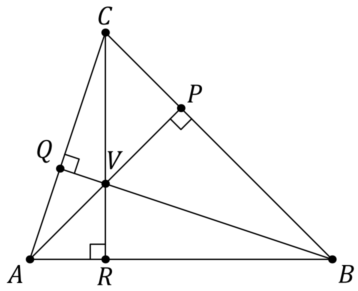
41. ročník MO, úloha C-II-4

Nech a, b, c sú veľkosti strán ostrouhlého trojuholníka a u, v, w veľkosti jeho výšok. Dokážte, že

$$\frac{1}{2} < \frac{u+v+w}{a+b+c} < 1.$$

Riešenie

Označme trojuholník ABC, päty jeho kolmíc na jeho strany BC, CA, AB postupne P, Q, R a jeho ortocentrum V.



- Z trojuholníkových nerovností v trojuholníkoch AVB, BVC, CVA a z toho, že V leží vnútri ostrouhlého trojuholníka ABC, dostávame

  $$a+b+c = |AB|+|BC|+|CA| < (|AV|+|BV|)+(|BV|+|CV|)+(|CV|+|AV|) < (|AP|+|BQ|)+(|BQ|+|CR|)+(|CR|+|AP|) =$$

  takže

  $$\frac{1}{2} < \frac{u+v+w}{a+b+c}.$$

- Keďže prepona je najdlhšia strana pravouhlého trojuholníka,

  $$u+v+w = |AP|+|BQ|+|CR| < |AB|+|BC|+|CA| = a+b+c,$$

  takže

  $$\frac{u+v+w}{a+b+c} < 1.$$

40. ročník MO, úloha A-II-2

Nech ABC je trojuholník a V priesečník jeho výšok, pričom $|VC| = |AB|$. Zistite veľkosť uhla ACB.

Riešenie

Rozoberme prípady:

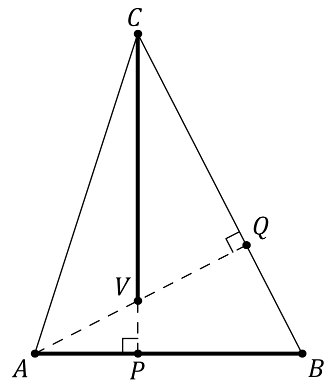
- Nech je uhol ACB je pravý.

  Potom však $V = C$, takže neplatí $|VC| = |AB|$.

  Tento prípad teda nenastáva.

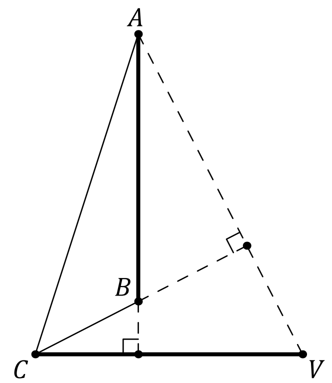
- Nech je uhol ACB je ostrý.

  - Nech ABC je ostrouhlý.
    Nech P a Q sú päty výšok ABC z bodov C, resp. A. Potom P a Q ležia vnútri ABC, a teda aj V leží vnútri ABC.

    Keďže uhly AVP a CVQ sú vrcholové, a teda zhodné, a uhly APV a CQV sú pravé, trojuholníky AVP a CVQ sú podľa vety *uu* pri tomto poradí vrcholov podobné. Uhly VAP čiže QAB a VCQ sú teda zhodné. Keďže uhly AQB a CQA čiže CQV sú pravé, trojuholníky AQB a CQV sú podľa vety *uu* pri tomto poradí vrcholov podobné. a pretože $|AB| = |CV|$, sú zhodné. Preto $|AQ| = |CQ|$, takže trojuholník AQC je rovnoramenný. Keďže jeho uhol AQC je pravý, jeho uhly ACQ a CAQ čiže ACB a CAV majú veľkosť 45°.

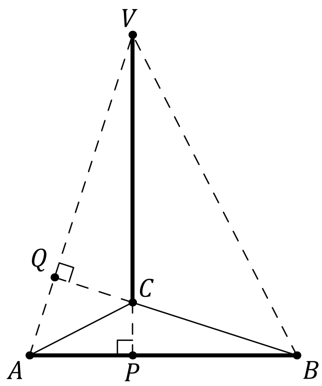
  - Nech ABC je tupouhlý s tupým uhlom iným ako ACB, bez ujmy všeobecnosti ABC.

    Potom je trojuholník CVA ostrouhlý a B je jeho ortocentrom. Situácia je teda po výmenách $A \leftrightarrow C$ a $B \leftrightarrow V$ identická s predchádzajúcim prípadom, takže uhol ACB má veľkosť 45°.

- Nech uhol ACB je tupý.

  Nech P a Q sú päty výšok ABC z bodov C, resp. A. Potom Q leží mimo ABC, a teda aj V leží mimo ABC.



Keďže uhly AVP a CVQ sú totožné a uhly APV a CQV sú pravé, trojuholníky AVP a CVQ sú podľa vety *uu* pri tomto poradí vrcholov podobné. Uhly VAP čiže QAB a VCQ sú teda zhodné. Keďže uhol AQB a jeho susedný uhol BQV čiže CQV sú pravé, trojuholníky AQB a CQV sú podľa vety *uu* pri tomto poradí vrcholov podobné. a pretože $|AB| = |CV|$, sú zhodné. Preto $|AQ| = |CQ|$, takže trojuholník AQC je rovnoramenný. Keďže jeho uhol AQC je pravý, jeho uhol ACQ má veľkosť 45°, a teda jeho susedný uhol ACB má veľkosť $180° - 45°$ čiže 135°.

40. ročník MO, úloha B-I-6

Nech α, β, γ sú veľkosti uhlov v trojuholníku. Dokážte, že

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Riešenie

Použijeme jednu z Jensenových nerovností:

> Nech f je funkcia konkávna na množine $[a, b]$. Nech n je kladné prirodzené číslo, x_1, …, x_n sú čísla z $[a, b]$ a c_1, …, c_n sú čísla z $[0, 1]$ také, že $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$. Potom
>
> $$f\left(\sum_{i=1}^{n}(c_i x_i)\right) \geq \sum_{i=1}^{n}(c_i f(x_i)).$$

Podľa nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom a podľa Jensenovej nerovnosti pre funkciu sin, ktorá je konkávna na $[0, \pi]$, platí

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = \left(\sqrt[3]{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}\right)^3 \leq \left(\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{3}\right)^3$$

$$\leq \left(\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)^3 = \left(\sin\frac{180°}{3}\right)^3 = (\sin 60°)^3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$