**39. ročník MO, úloha A-I-2**

Dokážte, že existuje nekonečne veľa prirodzených čísel $n$ takých, že existuje konečná postupnosť taká, že každé $k$ z množiny $\{0, \dots, n\}$ má v nej práve dva výskyty a medzi nimi je práve $k$ jej členov.

**Riešenie**

Všimnime si, že postupnosť $(0, 0)$ vyhovuje, jedno z vyhovujúcich čísel je teda 0.

Ukážeme, že ak $n$ je vyhovujúce číslo, tak aj $4n + 3$ je vyhovujúce číslo:

Nech $(a_0, \dots, a_{2n+1})$ je vyhovujúca postupnosť pre číslo $n$. Vezmime postupnosť, ktorá je konkatenáciou týchto troch postupností:

1. $(2n, 2n - 2, \dots, 2, 0, 0, 2, \dots, 2n - 2, 2n)$,
2. $(4n + 3, 2a_0 + 1, 4n + 2, 2a_1 + 1, 4n + 1, \dots, 2n + 2, 2a_{2n+1} + 1)$,
3. $(4n + 3, 4n + 2, 4n + 1, \dots, 2n + 3, 2n + 2)$.

Ukážeme, že je to vyhovujúca postupnosť pre číslo $4n + 3$: Rozoberme prípady:

- Nech $k \in \{0, 2, \dots, 2n\}$.

  Existuje teda $m$ z $\{0, \dots, n\}$, že $k = 2m$.

  Oba výskyty čísla $k$ čiže $2m$ sa teda vyskytujú v 1. časti a medzi nimi sú práve všetky čísla z množiny $\{0, 2, \dots, 2(m-1)\}$, a to každé dvakrát. Je ich teda $2m$ čiže $k$.

- Nech $k \in \{1, 3, \dots, 2n + 1\}$.

  Existuje teda $m$ z $\{0, \dots, n\}$, že $k = 2m + 1$.

  Oba výskyty čísla $k$ čiže $2m + 1$ sa teda vyskytujú v 2. časti, a to na jej párnych miestach. Existujú $i$ a $j$ z $\{0, \dots, 2n + 1\}$ také, že $i < j$ a $k = 2a_i + 1 = 2a_j + 1 = k = 2m + 1$, a teda $a_i = a_j = m$. Podľa predpokladu o postupnosti $(a_0, \dots, a_{2n+1})$ platí $j - i - 1 = m$,

  Medzi oboma výskytmi čísla $2m+1$ v novej postupnosti je $j-i-1$ členov tvaru $2a_h+1$, kde $h \in \{i+1, \dots, j-1\}$, a $j - i$ členov tvaru $4n + 3 - g$, kde $g \in \{i + 1, \dots, j\}$. Spolu ich teda je $(j - i + 1) + (j - i)$ čiže $2(j - i) - 1$, čo je $2m + 1$ čiže $k$.

- Nech $k \in \{2n + 2, \dots, 4n + 3\}$.

  Existuje teda $m$ z $\{0, \dots, 2n + 1\}$, že $k = 4n + 3 - m$.

  Prvý výskyt je v 2. časti a druhý v 3. časti. Medzi nimi je v 2. časti $2n - m + 1$ členov tvaru $2a_h + 1$, kde $h \in \{m + 1, \dots, 2n + 1\}$, a $2n - m + 1$ členov tvaru $4n + 3 - g$, kde $g \in \{m + 1, \dots, 2n + 1\}$, a v 3. časti $m + 1$ členov tvaru $4n + 3 - g$, kde $g \in \{0, \dots, m\}$. Spolu ich teda je $(2n - m + 1) + (2n - m + i) + m$ čiže $4n - m + 3$ čiže $k$.

Pre každé vyhovujúce číslo teda existuje väčšie vyhovujúce číslo, je ich teda nekonečne veľa.

**Poznámka**

Pre číslo $4 \cdot 0 + 3$ čiže 3 podľa uvedeného postupu dostávame postupnosť

$$(0, 0)\,||(3, 1, 2, 1)\,||(3, 2)$$

a pre číslo $4 \cdot 3 + 3$ čiže 15

$$(6, 4, 2, 0, 0, 2, 4, 6)\,||(15, 1, 14, 1, 13, 7, 12, 3, 11, 5, 10, 3, 9, 7, 8, 5)\,||(15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8).$$

**39. ročník MO, úloha A-I-6**

Nájdite všetky reálne čísla $\alpha$ také, že ak sú $x$, $y$, $z$ dĺžky strán trojuholníka, tak

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq \alpha(xy + yz + zx).$$

**Riešenie 1**

Rozoberme prípady:

- Nech $\alpha \geq 2$.
  Z trojuholníkových nerovnosti dostávame
  $$\begin{aligned} x + y - z &> 0, \\ y + z - x &> 0, \\ z + x - y &> 0, \end{aligned}$$
  takže
  $$\begin{aligned} &0 \\ &< (x + y - z)(y + z - x) + (y + z - x)(z + x - y) + (z + x - y)(x + y - z) \\ &= \left(xy + zx - x^2 + y^2 + yz - xy - yz - z^2 + zx\right) \\ &+ \left(yz + xy - y^2 + z^2 + zx - yz - zx - x^2 + xy\right) \\ &+ \left(zx + yz - z^2 + x^2 + xy - zx - xy - y^2 + yz\right) \\ &= 2xy + 2yz + 2zx - x^2 - y^2 - z^2 \\ &= 2(xy + yz + zx) - \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \\ &\leq \alpha(xy + yz + zx) - \left(x^2 + y^2 + z^2\right), \end{aligned}$$
  z čoho
  $$x^2 + y^2 + z^2 < \alpha(xy + yz + zx).$$
- Nech $0 \leq \alpha < 2$.
  Nech $x = y = 1$. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:
  $$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &\leq \alpha(xy + yz + zx), \\ 1^2 + 1^2 + z^2 &\leq \alpha(1 \cdot 1 + 1 \cdot z + z \cdot 1), \\ 1 + 1 + z^2 &\leq \alpha(1 + z + z), \\ 2 + z^2 &\leq \alpha(1 + 2z), \\ 2 + z^2 &\leq \alpha + 2\alpha z, \\ z^2 - 2\alpha z + \alpha^2 &\leq \alpha^2 + \alpha - 2, \\ (\alpha - z)^2 &\leq (\alpha + 2)(\alpha - 1). \end{aligned}$$
  Rozoberme prípady:
  - Nech $-2 < \alpha < 1$.
    Potom však
    $$0 \leq (\alpha - z)^2 \leq (\alpha + 2)(\alpha - 1) < 0,$$
    čo je spor.

- Nech $\alpha \leq -2$ alebo $1 \leq \alpha < 2$.
  Potom sú obe strany nezáporné, takže
  $$|\alpha - z| \leq \sqrt{(\alpha+2)(\alpha-1)},$$
  z čoho
  $$\alpha - z \leq \sqrt{(\alpha+2)(\alpha-1)},$$
  $$\alpha - \sqrt{(\alpha+2)(\alpha-1)} \leq z.$$
  Keďže tvrdenie o platí pre každé $z$ také, že $x, y, z$ sú strany trojuholníka, čiže pre každé $z$ z $(0, 2)$, dostávame
  $$\alpha - \sqrt{(\alpha+2)(\alpha-1)} \leq 0,$$
  a teda
  $$\alpha \leq \sqrt{(\alpha+2)(\alpha-1)},$$
  $$\alpha^2 \leq (\alpha+2)(\alpha-1),$$
  $$\alpha^2 \leq \alpha^2 + \alpha - 2,$$
  $$2 \leq \alpha,$$
  čo je spor.

Zhrnutím dostávame, že hľadané $\alpha$ sú práve také, že $\alpha \geq 2$.

---

**Riešenie 2**
Nech $p = \frac{y+z-x}{2}$, $q = \frac{z+x-y}{2}$, $r = \frac{x+y-z}{2}$, potom z trojuholníkových nerovností $p, q, r > 0$ a
$$x = \frac{z+x-y}{2} + \frac{x+y-z}{2} = q + r$$
a analogicky $y = r + p$ a $z = p + q$. Tvrdenie zo zadania je teda ekvivalentné tomu, že pre každé kladné $a, b, c$ platí
$$(q+r)^2 + (r+p)^2 + (p+q)^2 \leq \alpha\left((q+r)(r+p) + (r+p)(p+q) + (p+q)(q+r)\right),$$
ďalej ekvivalentne
$$\left(q^2 + 2qr + r^2\right) + \left(r^2 + 2rp + p^2\right) + \left(p^2 + 2pq + q^2\right)$$
$$\leq \alpha\left(\left(qr + pq + r^2 + rp\right) + \left(rp + qr + p^2 + pq\right) + \left(pq + rp + q^2 + qr\right)\right),$$
$$\left(2p^2 + 2q^2 + 2r^2\right) + (2pq + 2qr + 2rp) \leq \alpha\left(\left(p^2 + q^2 + r^2\right) + (3pq + 3qr + 3rp)\right),$$
$$2\left(p^2 + q^2 + r^2\right) + 2(pq + qr + rp) \leq \alpha\left(\left(p^2 + q^2 + r^2\right) + 3(pq + qr + rp)\right),$$
$$2\left(p^2 + q^2 + r^2\right) + 2(pq + qr + rp) \leq \alpha\left(p^2 + q^2 + r^2\right) + 3\alpha(pq + qr + rp),$$
$$(2-\alpha)\left(p^2 + q^2 + r^2\right) + (2 - 3\alpha)(pq + qr + rp) \leq 0,$$

Rozoberme prípady:

- Nech $\alpha \geq 2$.
  Potom $2 - \alpha \leq 0$ a $2 - 3\alpha \leq 0$, takže na ľavej strane je súčet dvoch nekladných čísel, a teda nerovnosť platí.
- Nech $\alpha < 2$.
  Nech $p = q = 1$, potom
  $$(2-\alpha)\left(1^2 + 1^2 + r^2\right) + (2 - 3\alpha)(1 \cdot 1 + 1 \cdot r + r \cdot 1) \leq 0,$$
  $$(2-\alpha)\left(1 + 1 + r^2\right) + (2 - 3\alpha)(1 + r + r) \leq 0,$$
  $$(2-\alpha)\left(2 + r^2\right) + (2 - 3\alpha)(1 + 2r) \leq 0,$$
  $$4 - 2\alpha + (2-\alpha)r^2 + 2 - 3\alpha + 2(2 - 3\alpha)r \leq 0,$$
  $$(2-\alpha)r^2 + 2(2-3\alpha)r + (6 - 5\alpha) \leq 0.$$
  Potom je kvadratický koeficient $2 - \alpha$ vo výraze na ľavej strane kladný, takže jeho celý graf neleží pod vodorovnou osou. Existuje preto kladné číslo $r$ taká, že
  $$(2-\alpha)r^2 + 2(2-3\alpha)r + (6 - 5\alpha) > 0,$$
  čo je spor.