39. ročník MO, úloha C-I-2

Označme $d(x)$ počet deliteľov kladného prirodzeného čísla x. Nech n je kladné prirodzené číslo. Dokážte, že platí

$$d\left(\underbrace{8\ldots8}_{n}\right) \geq 8d(n) - 8.$$

Riešenie

Keďže

$$\underbrace{8\ldots8}_{n} = 8 \cdot \underbrace{1\ldots1}_{n} = 2^3 \cdot \underbrace{1\ldots1}_{n},$$

platí

$$d\left(\underbrace{8\ldots8}_{n}\right) = d\left(2^3\right) \cdot d\left(\underbrace{8\ldots8}_{n}\right) = 4d\left(\underbrace{8\ldots8}_{n}\right),$$

stačí teda dokázať, že

$$d\left(\underbrace{1\ldots1}_{n}\right) \geq \frac{8d(n) - 8}{4} = 2d(n) - 2.$$

Nech k je deliteľ čísla n rôzny od 1 a n a $m = \frac{n}{k}$. Potom

$$\underbrace{1\ldots1}_{n} = \underbrace{\underbrace{1\ldots1}_{k}\ldots\underbrace{1\ldots1}_{k}}_{\frac{n}{k}} = \underbrace{1\ldots1}_{k} \cdot \left(10^{(m-1)k} + \cdots + 10^{0k}\right).$$

Číslo $\underbrace{1\ldots1}_{n}$ má $d(n) - 2$ deliteľov tvaru $\underbrace{1\ldots1}_{k}$ a $d(n) - 2$ deliteľov tvaru $10^{(m-1)k} + \cdots + 10^{0k}$, kde k je netriviálny deliteľ n. Keďže číslo $10^{(m-1)k} + \cdots + 10^{0k}$ sa končí na dvojčíslie 01, delitele oboch týchto tvarov sú rôzne. Okrem toho má toto číslo 2 triviálne delitele, takže

$$d\left(\underbrace{1\ldots1}_{n}\right) \geq (d(n) - 2) + (d(n) - 2) + 2 = 2d(n) - 2.$$

39. ročník MO, úloha C-II-3

Dokážte, že číslo

$$\underbrace{1\dots1}_{k}\underbrace{2\dots2}_{k+1}5$$

je druhou mocninou prirodzeného čísla, a toto číslo nájdite.

Riešenie 1

Platí

$$\begin{aligned}
&\underbrace{1\dots1}_{k}\underbrace{2\dots2}_{k+1}5\\
&= \underbrace{1\dots1}_{k}\underbrace{0\dots0}_{k+2}+\underbrace{2\dots2}_{k+1}0+5\\
&= \underbrace{1\dots1}_{k}\cdot 10^{k+2}+\underbrace{2\dots2}_{k+1}\cdot 10+5\\
&= \frac{1}{9}\cdot\underbrace{9\dots9}_{k}\cdot 10^{k+2}+\frac{2}{9}\cdot\underbrace{9\dots9}_{k+1}\cdot 10+5\\
&= \frac{1}{9}\cdot\left(1\underbrace{0\dots0}_{k}-1\right)\cdot 10^{k+2}+\frac{2}{9}\cdot\left(1\underbrace{0\dots0}_{k+1}-1\right)\cdot 10+5\\
&= \frac{1}{9}\cdot\left(10^{k}-1\right)\cdot 10^{k+2}+\frac{2}{9}\cdot\left(10^{k+1}-1\right)\cdot 10+5\\
&= \frac{1}{9}\left(\left(10^{k}-1\right)\cdot 10^{k+2}+2\left(10^{k+1}-1\right)\cdot 10+45\right)\\
&= \frac{1}{9}\left(\left(10^{2k+2}-10^{k+2}\right)+\left(2\cdot 10^{k+2}-20\right)+45\right)\\
&= \frac{1}{9}\left(10^{2k+2}+10^{k+2}+25\right)\\
&= \frac{1}{9}\left(\left(10^{k+1}\right)^2+2\cdot 10^{k+1}\cdot 5+5^2\right)\\
&= \frac{1}{9}\left(10^{k+1}+5\right)^2\\
&= \left(\frac{10^{k+1}+5}{3}\right)^2\\
&= \left(\frac{1\underbrace{0\dots0}_{k+1}+5}{3}\right)^2\\
&= \left(\frac{\left(\underbrace{9\dots9}_{k+1}+1\right)+5}{3}\right)^2\\
&= \left(\frac{\underbrace{9\dots9}_{k+1}+6}{3}\right)^2\\
&= \left(\underbrace{3\dots3}_{k+1}+2\right)^2\\
&= \left(\underbrace{3\dots3}_{k}5\right)^2.
\end{aligned}$$

Hľadané číslo je teda

$$\underbrace{3\ldots3}_{k}5.$$

Riešenie 2

Rovnako ako v prvom riešení ukážeme, že

$$\underbrace{1\ldots1}_{k}\underbrace{2\ldots2}_{k+1}5=\left(\frac{10^{k+1}+5}{3}\right)^2.$$

Ciferný súčet čísla $10^{k+1}+5$ je 6, takže je deliteľné 3, a teda aj číslo $10^{k+1}+5$ je deliteľné 3. Číslo $\frac{10^{k+1}+5}{3}$ je preto prirodzené, a to je hľadané číslo.

39. ročník MO, úloha C-I-3

Na kružnici je napísaných 108 prirodzených čísel, pričom súčet ľubovoľných 20 čísel vedľa seba je 1990. Na 37. mieste je číslo 158, na 66. mieste číslo 1 a na 83. mieste číslo 200. Aké číslo je na 40. mieste?

Riešenie

Súčet všetkých 108 čísel označme s.

Vezmime ľubovoľných 8 čísel vedľa seba a zvyšných 100 čísel rozdeľme na 5 skupín 20 čísel vedľa seba. Súčet týchto 8 čísel je teda $s - 5 \cdot 1990$, čo nezávisí od výberu 8-ice.

Vezmime ľubovoľné 4 čísla vedľa seba a zvyšných 104 čísel rozdeľme na 13 skupín 8 čísel vedľa seba. Súčet týchto 4 čísel je teda $s - 13\,(s - 5 \cdot 1990)$, čo nezávisí od výberu 4-ice. Toto číslo označme t.

Vezmime ľubovoľných 20 čísel vedľa seba a rozdeľme ich na 5 skupín 4 čísel vedľa seba. Platí teda $1990 = 5 \cdot t$, z čoho $t = 398$.

Nech (a, b, c, d, e) je ľubovoľných 5 čísel vedľa seba v tomto poradí. Potom platí

$$a - e = (a + b + c + d) - (b + c + d + e) = 398 - 398 = 0,$$

takže $a = e$. To teda znamená, že každé dve čísla, ktorých poradových čísla sa líšia o 4, sú rovnaké, takže rovnaké sú aj čísla, ktorých poradových čísla sa líšia o násobok 4.

Na 37. mieste je 158. Keďže $38 - 66 = -28 = (-7) \cdot 4$, na 38. mieste je také isté číslo ako na 66. mieste, čo je 1. Keďže $39 - 83 = -44 = (-11) \cdot 4$, na 39. mieste je také isté číslo ako na 83. mieste, čo je 200. Súčet 4 susedných čísel na 37., 38., 39. a 40. mieste je 398, takže na 40. mieste je číslo $398 - 158 - 1 - 200$ čiže 39.

Na kružnici sa teda pravidelne opakujú čísla 158, 1, 200, 39. V skupine 20 čísel vedľa seba je teda 5-krát každé z nich, takže ich súčet je $5 \cdot 158 + 5 \cdot 1 + 5 \cdot 200 + 5 \cdot 398$, čo je naozaj 1990.

39. ročník MO, úloha C-II-1

Nájdite kladné prirodzené číslo n také, že číslo n má práve 3 delitele a číslo $n + 32$ práve 5 deliteľov.

Riešenie

Ak $p_1, \dots, p_k$ sú prvočísla a $a_1, \dots, a_k$ kladné prirodzené čísla, číslo $p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$ má práve $(a_1 + 1) \cdots (a_k + 1)$ deliteľov. Ak je tento počet prvočíslo r, tak platí $k = 1$ a $a_1 + 1 = r$, t. j. $a_1 = r - 1$.

Keďže čísla n a $n + 32$ majú 3, resp. 5 deliteľov, čo sú prvočísla, existujú prvočísla p a q také, že $n = p^2$ a $n + 32 = q^4$. Platí teda

$$p^2 + 32 = q^4,$$

$$32 = q^4 - p^2,$$

$$2^5 = \left(q^2 - p\right)\left(q^2 + p\right).$$

Existuje teda prirodzené číslo a také, že $a \leq 5$,

$$q^2 - p = 2^a,$$

$$q^2 + p = 2^{5-a}.$$

Potom

$$2^a = q^2 - p < q^2 + p = 2^{5-a},$$

takže $a < 5 - a$, t. j. $2a < 5$, t. j. $a < \frac{5}{2}$, a teda $a \leq 2$. Keďže

$$\left(q^2 + p\right) - \left(q^2 - p\right) = 2p,$$

čísla $q^2 + p$ a $q^2 - p$ čiže 2^{5-a} a 2^a majú rovnakú paritu, takže sú obe párne, a teda $a \geq 1$. Zhrnutím dostávme $a \in \{1, 2\}$. Rozoberme prípady:

- Nech $a = 1$.

  Potom
  $$2q^2 = \left(q^2 + p\right) + \left(q^2 - p\right) = 2^{5-1} + 2^1 = 2^4 + 2 = 16 + 2 = 18,$$
  z čoho $q^2 = 9$, a teda $q = 3$. Potom $p^2 + 32 = 3^4 = 81$, takže $n = p^2 = 49$.

  Keďže $n = 49 = 7^2$, má naozaj $2 + 1$ čiže 3 delitele, potom $n + 32 = 81 = 3^4$, takže má naozaj $4 + +$ deliteľov.

- Nech $a = 2$.

  Potom
  $$2q^2 = \left(q^2 + p\right) + \left(q^2 - p\right) = 2^{5-2} + 2^2 = 2^3 + 2^2 = 8 + 4 = 12,$$
  z čoho $q^2 = 6$, a teda $q = \sqrt{6} \notin \mathbb{N}^+$, čo je spor.

  Tento prípad teda nenastáva.

Jediná vyhovujúca hodnota n je 49.

39. ročník MO, úloha B-I-4

Určte najväčšie prirodzené číslo, ktoré sa nedá vyjadriť ako súčet dvoch prirodzených čísel s cifernými súčtami aspoň 10.

Riešenie

Ukážeme, že číslo 199 sa takto nedá napísať:

Nech existujú dve čísla s cifernými súčtami aspoň 10 také, že ich súčet je 199. Zrejme sú obe najviac trojciferné.

Ak by boli obe najviac dvojciferné, ich súčet by bol najviac $2 \cdot 99$ čiže 198, takže aspoň jedno je aspoň trojciferné.

Ak by bolo trojciferné obe, ich súčet by bol aspoň $2 \cdot 100$ čiže 200. Preto je jedno trojciferné a druhé najviac dvojciferné. To trojciferné pritom sa začína cifrou 1.

Existujú teda cifry a, b, c, d také, že

$$\overline{1ab} + \overline{cd} = 199,$$

pričom $1 + a + b \geq 10$ a $c + d \geq 10$, t. j. $a \geq 9 - b$ a $c \geq 10 - d$. Potom

$$(100 + 10a + b) + (10c + d) = 199,$$

$$10a + 10c + b + d - 99 = 99,$$

$$b + d - 9 = 90 - 10a - 10c,$$

$$b + d - 9 = 10(9 - a - c),$$

takže 10 delí $b + d - 9$. Avšak

$$-9 = 0 + 0 - 9 \leq b + d - 9 \leq 9 + 9 - 9 = 9,$$

takže $b + d - 9 = 0$, a teda $b + d = 9$. Z toho

$$0 = 10(9 - a - c),$$

$$0 = 9 - a - c,$$

$$a + c = 9.$$

Potom

$$19 = 1 + 9 + 9 = 1 + (a + c) + (b + d) = (1 + a + b) + (c + d) \geq 10 + 10 = 20 > 19,$$

čo je spor.

Nech $n > 199$, ukážeme, že sa takto napísať dá:

Rozoberme prípady:

- Nech $n = 10^k + 99$, kde $k \geq 3$.
  Ciferný súčet čísla $5 \cdot 10^{k-1} + 94$ je $5 + 9 + 4$ čiže 18, čo je aspoň 10, a ciferný súčet čísla $5 \cdot 10^{k-1} + 5$ je $5 + 5$ čiže 10. Pritom platí

  $$\left(5 \cdot 10^{k-1} + 94\right) + \left(5 \cdot 10^{k-1} + 94\right) = 10 \cdot 10^{k-1} + 99 = 10^k + 99 = n.$$

- Nech $n \notin \left\{10^k + 99 \colon k \geq 3\right\}$.
  Nech $m = n - 99$. Potom m nie je mocnina 10, takže jeho ciferný súčet je väčší než 1, a teda je aspoň 2.
  Nech $m = 10x + y$, kde y je cifra a x je kladné prirodzené číslo. Rozoberme prípady:
  - Nech $y = 0$.
    Platí teda $m = 10x$, takže ciferný súčet čísla $m + 8$ čiže $10x + 8$ je aspoň $2 + 8$ čiže 10. Ciferný súčet čísla 91 je 10 a platí

    $$(10x + 8) + 91 = 10x + 99 = (10x + y) + 99 = m + 99 = n.$$

  - Nech $y \neq 0$.
    Ciferný súčet čísla $10x + 9$ je aspoň 10 a ciferný súčet čísla $90 + z$ je $9 + y$, teda tiež aspoň 10. Pritom platí

    $$(10x + 9) + (90 + y) = (10x + y) + 99 = m + 99 = n.$$

Zhrnutím dostávame, že hľadané číslo je 199.