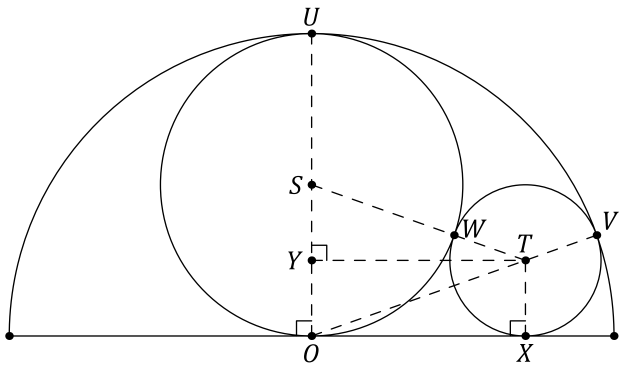
38. ročník MO, úloha C-II-2

Do polkruhu s polomerom 4 sú vpísané dva zvonku sa dotýkajúce sa kruhy, z ktorých jeden má priemer 4. Vypočítajte priemer druhého.

Riešenie

Nech O je stred polkruhu, S stred väčšieho kruhu a T stred menšieho. Keďže priemer väčšieho kruhu je rovnaký ako polomer polkruhu, dotýka sa ho v jeho strede O, a teda OU je jeho os súmernosti.

Nech U a V sú dotykové body oblúku polkruhu postupne s väčším a menším kruhom W dotykový bod oboch kruhov a X ďalší dotykový bod menšieho kruhu a polkruhu. Nech Y je päta kolmice z bodu T na úsečku OU. Potom je $OXTY$ obdĺžnik.



Nech t je polomer menšieho kruhu a s je polomer väčšieho a zároveň polovica polomeru polkruhu, podľa zadania $s = \frac{4}{2} = 2$.

Podľa Pytagorovej vety v trojuholníkoch OYT a SYT platí

$$\begin{aligned}
&|TX|^2 \\
&= |OY|^2 \\
&= |OT|^2 - |YT|^2 \\
&= |OT|^2 - \left(|ST|^2 - |SY|^2\right) \\
&= |OT|^2 + |SY|^2 - |ST|^2 \\
&= (|OV| - |TV|)^2 + (|SO| - |OY|)^2 - (|SW| + |TW|)^2 \\
&= (|OV| - |TV|)^2 + (|SO| - |TX|)^2 - (|SW| + |TW|)^2,
\end{aligned}$$

takže

$$\begin{aligned}
t^2 &= (2s - t)^2 + (s - t)^2 - (s + t)^2, \\
t^2 &= \left(4s^2 - 4st + t^2\right) + \left(s^2 - 2st + t^2\right) - \left(s^2 + 2st + t^2\right) \\
0 &= 4s^2 - 8st, \\
0 &= s - 2t, \\
2t &= s, \\
t &= \frac{s}{2},
\end{aligned}$$

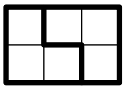
a teda $t = \frac{2}{2} = 1$, takže hľadaný priemer je $2 \cdot 1$ čiže 2.

38. ročník MO, úloha B-I-3

Nech n je kladné prirodzené číslo, ktoré nie je deliteľné 3. Zo šachovnice $n \times n$ odoberieme jedno rohové pole. Dokážte, že zvyšok je možné pokryť neprekrývajúcimi sa doskami tvaru písmena L zloženými z troch štvorcov 1×1.

Riešenie 1

Vieme pokryť tabuľku 2×3, a to takto:



Otočením o 90° dostaneme pokrytie tabuľky 3×2.

Potom možno pokryť aj tabuľku 6×2 a to tak, že ju 1 vertikálnym rezom rozdelíme na 2 tabuľky 3×2, ktoré už pokryť vieme, a aj tabuľku 6×3, a to tak, že ju 2 vertikálnymi rezmi rozdelíme na 3 tabuľky 2×3, ktoré už pokryť vieme.

Indukciou dokážeme, že potom vieme pokryť tabuľku $6 \times k$, kde $k \geq 2$:

1 Tabuľky 6×2 a 6×3 už pokryť vieme.

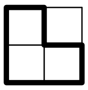
2 Tabuľku $6 \times k$, kde $k \geq 4$, rozdelíme vertikálnym rezom na tabuľku $6 \times (k-2)$ a tabuľku 6×2. Prvú vieme pokryť podľa indukčného predpokladu a druhú podľa vyššei uvedeného tvrdenia. Spolu tak získavame pokrytie tabuľky $6 \times k$.

Otočením o 90° dostaneme pokrytie tabuľky $k \times 6$, kde $k \geq 2$.

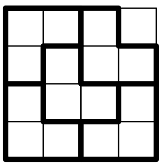
Tvrdenie úlohy dokážeme indukciou, pričom bez ujmy na všeobecnosti odoberáme pravý horný roh:

1 Tvrdenie platí pre nasledujúce čísla:

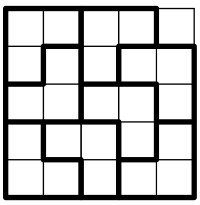
- 1:
  Tvrdenie je triviálne pravdivé, lebo sa odoberie jediné pole, a teda nie je čo pokrývať.
- 2:



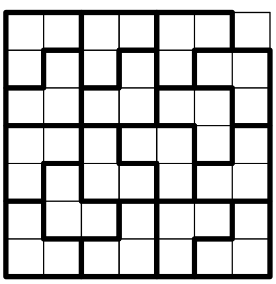
- 4:



- 5:



- 7:

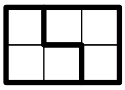


2 Nech n je prirodzené číslo a nedeliteľné 3 väčšie než 7. Predpokladajme, že tvrdenie úlohy platí pre všetky menšie čísla.

Šachovnicu $n \times n$ bez rohového poľa vpravo hore rozdelíme dvoma rezmi na obdĺžniky 6×6, $6 \times n - 6$, $6 \times n - 66$ a šachovnicu $(n-6) \times (n-6)$ bez rohového poľa vpravo hore. Prvé tri vieme pokryť podľa vyššie uvedeného tvrdenia a posledné podľa indukčného predpokladu. Tak získavame pokrytie celej šachovnice $n \times n$ bez rohového poľa vpravo hore.

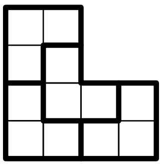
Riešenie 2

Všimnime si, že takýmito doštičkami možno pokryť šachovnicu $2 \times (3n)$ pre ľubovoľné kladné prirodzené číslo n, a to tak, že ju $n-1$ vertikálnymi rezmi rozdelíme na n tabuliek 3×2 a každú z nich pokryjeme takýmto spôsobom:



Analogicky možno pokryť tabuľku $(2n) \times 3$, stačí napríklad otočiť predchádzajúcu tabuľku o $90°$.

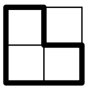
Pokryť tiež môžeme takýto útvar:



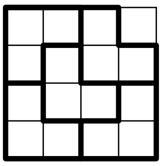
Tvrdenie úlohy dokážeme indukciou, pričom bez ujmy na všeobecnosti odoberáme pravý horný roh:

1 Tvrdenie platí pre nasledujúce čísla:

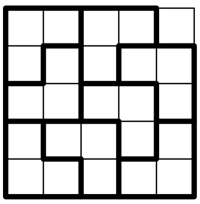
- 1:
  Tvrdenie je triviálne pravdivé, lebo sa odoberie jediné pole, a teda nie je čo pokrývať.
- 2:



- 4:



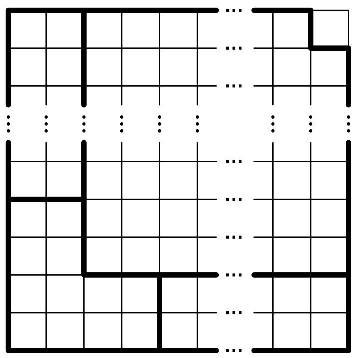
- 5:



2 Nech n je prirodzené číslo a nedeliteľné 3 väčšie než 6. Predpokladajme, že tvrdenie úlohy platí pre všetky menšie čísla.

Rozoberme prípady:

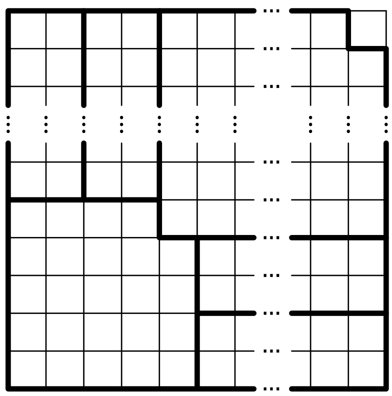
- Nech $n \bmod 3 = 1$ a $n > 5$.
  Potom šachovnicu $n \times n$ bez pravého horného rohu rozdelíme na štyri časti, a to na šachovnicu 4×4 bez štvorca 2×2 v pravom hornom rohu, šachovnicu $(n-2) \times (n-2)$ bez pravého horného rohu, šachovnicu $2 \times (n-4)$ a šachovnicu $(n-4) \times 2$.



Prvé dve možno pokryť podľa indukčného predpokladu, lebo $(n-4) \bmod 1 \neq 0$, druhú podľa druhého odseku a zvyšné dve podľa úvodného odseku, lebo $(n-4) \bmod 3 = 0$.

- Nech $n \bmod 3 = 2$ a $n > 5$.

  Potom šachovnicu $n \times n$ bez pravého horného rohu rozdelíme na šesť častí, a to na šachovnicu 5×5 bez pravého horného rohu, šachovnicu $(n-4) \times (n-4)$ bez pravého horného rohu, dve šachovnice $2 \times (n-5)$ a dve šachovnice $(n-5) \times 2$.



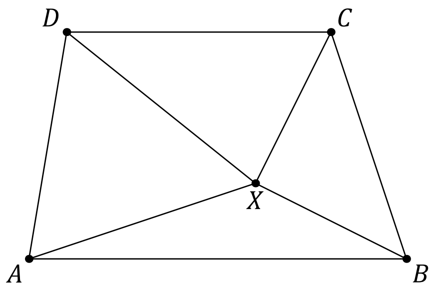
  Prvú možno pokryť podľa indukčného predpokladu, lebo $(n-2) \bmod 2 \neq 0$, a zvyšné štyri podľa úvodného odseku, lebo $(n-5) \bmod 3 = 0$.

38. ročník MO, úloha B-I-1

Nech $ABCD$ je lichobežník, ktorý nie je rovnobežník. Dokážte, že vnútri $ABCD$ neexistuje bod X taký, že trojuholníky ABX, BCX, CDX, DAX majú rovnaký obsah.

Riešenie

Nech X je ľubovoľný vnútorný bod lichobežníka.



Nech

$$\text{obsah}(ABX) = \text{obsah}(CDX) = \frac{1}{4}\text{obsah}(ABCD).$$

Potom platí

$$\begin{aligned}
&\text{obsah}(ABCD)\\
&= \frac{1}{2} \cdot (|AB| + |CD|) \cdot |AB, CD|\\
&= \frac{1}{2} \cdot (|AB| + |CD|) \cdot (|X, AB| + |X, CD|)\\
&= \frac{1}{2} \cdot (|AB| + |CD|) \cdot \left(\frac{2 \cdot \text{obsah}(ABX)}{|AB|} + \frac{2 \cdot \text{obsah}(CDX)}{|CD|}\right)\\
&= \frac{1}{2} \cdot (|AB| + |CD|) \cdot \left(\frac{2 \cdot \frac{1}{4}\text{obsah}(ABCD)}{|AB|} + \frac{2 \cdot \frac{1}{4}\text{obsah}(ABCD)}{2\,|CD|}\right)\\
&= \frac{1}{2} \cdot (|AB| + |CD|) \cdot \left(\frac{\frac{1}{2}\text{obsah}(ABCD)}{|AB|} + \frac{\frac{1}{2}\text{obsah}(ABCD)}{2\,|CD|}\right)\\
&= \frac{1}{2} \cdot (|AB| + |CD|) \cdot \frac{1}{2} \cdot \text{obsah}(ABCD) \cdot \left(\frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|CD|}\right)\\
&= \frac{1}{4} \cdot (|AB| + |CD|) \cdot \text{obsah}(ABCD) \cdot \frac{|CD| + |AB|}{|AB| \cdot |CD|}\\
&= \frac{1}{4} \cdot (|AB| + |CD|) \cdot \text{obsah}(ABCD) \cdot \frac{|AB| + |CD|}{|AB| \cdot |CD|}\\
&= \frac{1}{4} \cdot \text{obsah}(ABCD) \cdot \frac{(|AB| + |CD|)^2}{|AB| \cdot |CD|},
\end{aligned}$$

takže

$$\begin{aligned}
4 \cdot |AB| \cdot |CD| &= (|AB| + |CD|)^2,\\
4 \cdot |AB| \cdot |CD| &= |AB|^2 + 2 \cdot |AB| \cdot |CD| + |CD|^2,\\
0 &= |AB|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |CD| + |CD|^2,\\
0 &= (|AB| - |CD|)^2,\\
0 &= |AB| - |CD|,\\
|CD| &= |AB|,
\end{aligned}$$

takže $ABCD$ je rovnobežník, čo je spor.

38. ročník MO, úloha A-I-2

Nájdite najmenšie prirodzené číslo r také, že existujú podmnožiny A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 množiny $\{1, \dots, r\}$ také, že ak $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ platí

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = |A_4| = |A_5| = 5$$

a

$$|A_1 \cup A_2| = |A_2 \cup A_3| = |A_3 \cup A_4| = |A_4 \cup A_5| = |A_5 \cup A_1| = 10.$$

Riešenie 2

Nech r je vyhovujúce číslo. Platí

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cup A_2| - |A_1| - |A_2| = 10 - 5 - 5 = 0,$$

takže $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Analogicky $A_2 \cap A_3 = \emptyset$, $A_3 \cap A_4 = \emptyset$, $A_4 \cap A_5 = \emptyset$, $A_5 \cap A_1 = \emptyset$. Každé číslo z $\{1, \dots, r\}$ teda môže ležať najviac v 2 množinách spomedzi A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. Počet dvojíc (x, i) takých, že $x \in A_i$, je teda najviac $2r$, zároveň je však podľa predpokladu $5 \cdot 5$ čiže 25. Z toho $25 \leq 2r$, takže $13 \leq r$.

Ako ukazuje nasledujúci príklad, hodnota 13 je dosiahnuteľná:

- $A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
- $A_2 = \{6, 7, 8, 9, 10\}$,
- $A_3 = \{11, 12, 13, 1, 2\}$,
- $A_4 = \{3, 4, 5, 6, 7\}$,
- $A_5 = \{8, 9, 10, 11, 12\}$.

Hľadané číslo r je teda 13.

38. ročník MO, úloha A-S-1

Nech množina M má n prvkov. Vyjadrite pomocou n počet dvojíc množín (A, B) takých, že $A \subseteq B \subseteq M$.

Riešenie 1

Pre každé k z $\{0, \dots, n\}$ je $\binom{n}{k}$ počet k-prvkových podmnožín množiny M a každá z nich má 2^k podmnožín. Počet vyhovujúcich dvojíc označme p, potom podľa binomické vety platí

$$p = \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} 2^k \right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} \cdot 2^k \cdot 1^{n-k} \right) = (2+1)^n = 3^n.$$

Riešenie 2

Nech f je ľubovoľná funkcia z množiny M do množiny $\{0, 1, 2\}$. Potom nech $A = \{x \in M : f(x) = 0\}$ a $B = \{x \in M : f(x) \in \{0, 1\}\}$, potom $A \subseteq B \subseteq M$, takže (A, B) je vyhovujúca dvojica podmnožín M. Keďže rôzne funkcie sa líšia aspoň v jednej hodnote, líšia aj vzniknuté dvojice podmnožín.

Naopak, nech (A, B) je vyhovujúca dvojica. Nech f je funkcia taká, že ak $x \in \{1, \dots, n\}$, tak

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ak } x \in A, \\ 1, & \text{ak } x \in B \setminus A, \\ 2, & \text{ak } x \in M \setminus B. \end{cases}$$

Potom f je funkcia z množiny M do množiny $\{0, 1, 2\}$. Keďže rôzne dvojice podmnožín sa líšia v umiestnení aspoň jedného prvku, líšia aj vzniknuté funkcie.

Počet vyhovujúcich dvojíc je teda počet funkcií z M do $\{0, 1, 2\}$, a tých je 3^n.