37. ročník MO, úloha C-I-3

Nech $p, q, pq, p + q$ sú dĺžky strán štvoruholníka, kde p a q sú prirodzené čísla také, že $p, q \geq 3$. Dokážte, že jedna z jeho uhlopriečok má dĺžku menšiu než 11.

Riešenie

Podľa davkrát použitej trojuholníkovej nerovnosti je súčet dĺžok troch strán štvoruholníka väčší než štvrtá. Preto

$$p + q + (p + q) > pq,$$

takže

$$2p + 2q > pq,$$

$$4 > pq - 2p - 2q + 4,$$

$$4 > (p - 2)(q - 2).$$

Bez ujmy na všeobecnosti $p \geq q$. Potom

$$4 > (p - 2)(q - 2) \geq (q - 2)(q - 2) = (q - 2)^2,$$

takže

$$2 > q - 2,$$

$$4 > q,$$

a teda $q = 3$. Potom

$$4 > (p - 2)(3 - 2) = (p - 2) \cdot 1 = p - 2,$$

$$6 > p,$$

a teda $p \in \{3, 4, 5\}$. Rozoberme prípady:

- Nech $p = 3$.

  Potom sú dĺžky strán štvoruholníka 3, 3, 3 + 3 čiže 6 a 3 · 3 čiže 9. Strana s dĺžkou 6 susedí aspoň s jednou stranou dĺžky 3, takže uhlopriečka, ktorá spája ich krajné body, má podľa trojuholníkovej nerovnosti dĺžku menšiu než 6 + 3 čiže 9, a teda menšiu než 11.

- Nech $p = 4$.

  Potom sú dĺžky strán štvoruholníka 3, 4, 3 + 4 čiže 7 a 3 · 4 čiže 12. Strana s dĺžkou 7 susedí aspoň s jednou stranou dĺžky najviac 4, takže uhlopriečka, ktorá spája ich krajné body, má podľa trojuholníkovej nerovnosti dĺžku menšiu než 7 + 4 čiže 11.

- Nech $p = 5$.

  Potom sú dĺžky strán štvoruholníka 3, 5, 3 + 5 čiže 8 a 3 · 5 čiže 15. Strana s dĺžkou 3 susedí aspoň s jednou stranou dĺžky najviac 8, takže uhlopriečka, ktorá spája ich krajné body, má podľa trojuholníkovej nerovnosti dĺžku menšiu než 3 + 8 čiže 11.

37. ročník MO, úloha C-S-2

Nájdite všetky štvorciferné čísla končiace sa číslicou 9, ktoré sú deliteľné každou svojou číslicou.

Riešenie

Hľadané číslo teda nie je deliteľné 2 ani 5, takže nie je deliteľné ani žiadnym párnym číslom. Môže byť teda byť deliteľné len ciframi 1, 3, 7, 9. Keďže je deliteľné svojou poslednou cifrou 9, jeho ciferný súčet je deliteľný 9, a teda aj súčet prvých troch cifier je deliteľný 9. Všetky sú nepárne, takže aj ich súčet je nepárny, môže to teda byť len 9 alebo 27. Rozoberme prípady:

- Nech je ciferný súčet prvých troch cifier 9.

  Žiadna z týchto cifier teda nie je 9. Rozoberme prípady:

  - Nech je jedna z týchto cifier 7.

    Potom zvyšné dve cifry majú súčet $9 - 7$ čiže 2, takže sú to dve 1. Ide teda o čísla 1179, 1719, 7119, pričom prvé dve nie sú deliteľné 7. Tretie vyhovuje, lebo $7119 = 9 \cdot 791 = 7 \cdot 1017 = 1 \cdot 7119$.
  - Nech ani jedna z týchto cifier nie je 7.

    Potom sú všetky tri najviac 3, takže všetky sú 3. Dostávame tak číslo 3339, ktoré vyhovuje, lebo $3339 = 9 \cdot 371 = 3 \cdot 1113$.

- Nech je ciferný súčet prvých troch cifier 27.

  Potom sú všetky tieto cifry 9. Dostávame tak číslo 9999, ktoré vyhovuje, lebo $9999 = 9 \cdot 1111$.

Hľadané čísla sú práve 3339, 7119, a 9999.

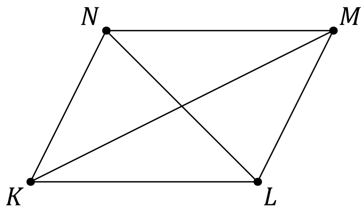
37. ročník MO, úloha B-I-4

Vyjadrite súčet štvorcov dĺžok telesových uhlopriečok rovnobežnostena pomocou dĺžok jeho hrán.

Riešenie 1

Najprv dokážeme pomocné tvrdenie:

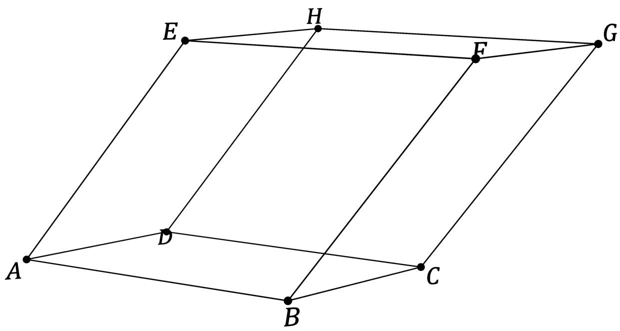
- Nech $KLMN$ je rovnobežník. Potom $|KM|^2 + |LN|^2 = 2\left(|KL|^2 + |LM|^2\right)$.
  -



Podľa kosínusovej vety v trojuholníkoch KLM a KMN platí

$$|KM|^2 + |LN|^2$$
$$= \left(|KL|^2 + |LM|^2 - 2 \cdot |KL| \cdot |LM| \cdot \cos|\sphericalangle KLM|\right)$$
$$+ \left(|NK|^2 + |KL|^2 - 2 \cdot |NK| \cdot |KL| \cdot \cos|\sphericalangle NKL|\right)$$
$$= \left(|KL|^2 + |LM|^2 - 2 \cdot |KL| \cdot |LM| \cdot \cos|\sphericalangle KLM|\right)$$
$$+ \left(|LM|^2 + |KL|^2 - 2 \cdot |LM| \cdot |KL| \cdot \cos(180° - |\sphericalangle NKL|)\right)$$
$$= 2\left(|KL|^2 + |LM|^2\right) - 2 \cdot |KL| \cdot |LM| \cdot \cos|\sphericalangle KLM| - 2 \cdot |KL| \cdot |LM| \cdot (-\cos|\sphericalangle KLM|$$
$$= 2\left(|KL|^2 + |LM|^2\right) - 2 \cdot |KL| \cdot |LM| \cdot \cos|\sphericalangle KLM| + 2 \cdot |KL| \cdot |LM| \cdot (-\cos|\sphericalangle KLM|$$
$$= 2\left(|KL|^2 + |LM|^2\right).$$

Označme rovnobežnosten $ABCDEFGH$.



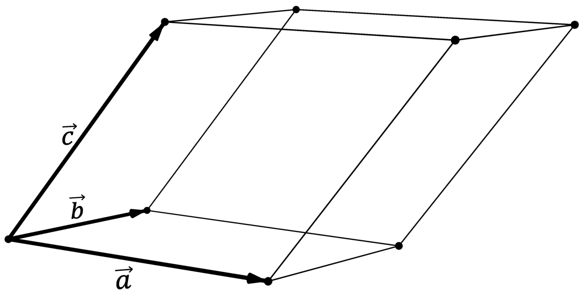
Potom $ACGE$, $BFHD$ a $ABCD$ sú rovnobežníky, takže opakovane podľa pomocného tvrdenia

$$|AG|^2 + |BH|^2 + |CE|^2 + |DF|^2$$
$$= \left(|AG|^2 + |CE|^2\right) + \left(|BH|^2 + |DF|^2\right)$$
$$= 2\left(|AE|^2 + |AC|^2\right) + 2\left(|BF|^2 + |BD|^2\right)$$
$$= 2\left(|AC|^2 + |BD|^2\right) + 2\left(|AE|^2 + |BF|^2\right)$$

$$= 2\left(2\left(|AB|^2 + |AD|^2\right)\right) + 2\left(|AE|^2 + |AE|^2\right)$$
$$= 4\left(|AB|^2 + |AD|^2\right) + 4\,|AE|^2$$
$$= 4\left(|AB|^2 + |AD|^2 + |AE|^2\right).$$

Riešenie 2

Vektory všetkých troch typov strán označme $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ich dĺžky sú potom $|\vec{a}|$, $\left|\vec{b}\right|$, $|\vec{c}|$.



Dĺžky telesových uhlopriečok sú potom $\left|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right|$, $\left|-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right|$, $\left|\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}\right|$, $\left|\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}\right|$. Potom

$$\left|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right|^2 + \left|-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right|^2 + \left|\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}\right|^2 + \left|\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}\right|^2$$
$$= \left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)^2 + \left(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)^2 + \left(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}\right)^2 + \left(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}\right)^2$$
$$= \left(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + 2\vec{b}\vec{c} + 2\vec{c}\vec{a}\right) + \left(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + 2\vec{b}\vec{c} - 2\vec{c}\vec{a}\right)$$
$$+ \left(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 - 2\vec{a}\vec{b} - 2\vec{b}\vec{c} + 2\vec{c}\vec{a}\right) + \left(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a}\vec{b} - 2\vec{b}\vec{c} - 2\vec{c}\vec{a}\right)$$
$$= 4\vec{a}^2 + 4\vec{b}^2 + 4\vec{c}^2,$$
$$= 4\left(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2\right),$$
$$= 4\left(|\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 + |\vec{c}|^2\right).$$

Poznámka

Všimnime si, že uhly zvierané stenami na výsledok nemajú žiaden vplyv.

37. ročník MO, úloha B-II-2

Dokážte, že na prázdnu klasickú šachovnicu nie je možné rozmiestniť 7 strelcov tak, aby ohrozovali všetky ostatné polia.

Riešenie

Ak je na šachovnici 7 strelcov, tak buď sú najviac 3 bielopoľní, alebo najviac 3 čiernopoľní, bez ujmy na všeobecnosti nastáva prvý prípad. Na okraji šachovnice je $4 \cdot 8 - 4$ čiže 28 polí, ktorých farby sa pravidelne striedajú, takže $\frac{28}{2}$ čiže 14 polí je bielych. Každý strelec obsadzuje alebo ohrozuje najviac 4 polia na okraji šachovnice, takže 3 bielopoľní strelci obsadzujú alebo ohrozujú najviac 12 rôznych polí. Aspoň 2 biele polia na okraji tak ostanú neobsadené alebo neohrozené.

Úloha je teda nesplniteľná.

37. ročník MO, úloha A-I-3

Nech každý bod roviny je ofarbený jednou z dvoch farieb. Dokážte, že existuje rovnostranný trojuholník, ktorého vrcholy sú ofarbené rovnakou farbou.

Riešenie 1

Nech taký trojuholník neexistuje.

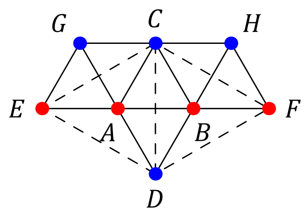
Nech A a B sú ľubovoľné dva body rovnakej farby.

Nech C a D sú rôzne body také, že ABC a ABD sú rovnostranné trojuholníky. Potom C a D majú inú farbu ako A a B.

Nech E a F sú rôzne body také, že CDE a CDF sú rovnostranné trojuholníky, pričom E leží v polrovine CDA a F v polrovine CDB, Potom E a F majú inú farbu ako C a D, takže takú istú ako A a B.

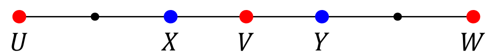
Nech G a H sú body polroviny ABC také, že EAG a BFH sú rovnostranné trojuholníky. Potom G a H majú inú farbu ako A a E, resp. B a F, takže takú istú ako D.

Potom všetkých 8 bodov sú uzly siete z rovnostranných trojuholníkov so stranami dĺžky $|AB|$ a trojuholník DGH je tiež rovnostranný. Jeho vrcholy C a D sú však ofarbené tou istou farbou, čo je spor.

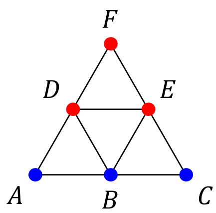


Riešenie 2

Najprv dokážeme, že existujú tri rôzne body rovnakej farby také, že jeden z nich je stred súmernosti zvyšných dvoch. Nech žiadne také tri body neexistujú. Nech X a Y sú dva rôzne body rovnakej farby. Nech U, V, W sú body také, že X je stred úsečky UY, V je stred úsečky XY a Y je stred úsečky XV. Body U a W sú teda súmerné podľa stredu V úsečky XY, takže V je stred úsečky UW. Potom však žiaden z bodov U, V, W nemôže mať farbu bodov X a Y, takže všetky tri majú tú druhú farbu, a to je spor.



Trvdenie zo zadania dokážeme sporom: Nech A, B, C sú tri body rovnakej farby, pričom B je stred úsečky AC. Nech F je bod taký, že ACF je rovnostranný trojuholník a D a E sú stredy strán AF, resp. CF. Keďže ABD, BCE, ACF sú rovnostranné trojuholníky. žiaden z bodov D, E, F nemôže mať farbu bodov A, B, C. Všetky tri teda majú tú druhú farbu, čo je však spor, lebo DEF je tiež rovnostarnný trojuholník.



37. ročník MO, úloha A-II-1

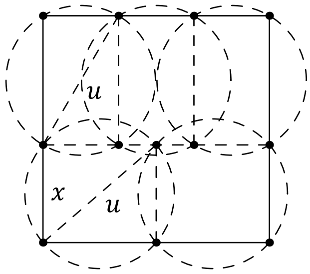
a) Dokážte, že ak štyri zhodné kruhy s polomerom r pokrývajú jednotkový štvorec, tak $r \geq \frac{\sqrt{2}}{4}$.

b) Zistite, či je možné jednotkový štvorec pokryť piatimi zhodnými kruhmi s polomerom menším než $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Riešenie

a) Uvažujme štyri vrcholy daného jednotkového štvorca a jeho stred. Ak je tento štvorec pokrytý štyrmi zhodnými kruhmi s polomermi r, jeden z nich obsahuje aspoň dva z týchto piatich bodov. A pretože každé dva z týchto bodov majú vzdialenosť aspoň $\frac{\sqrt{2}}{2}$, platí $r \geq \frac{\sqrt{2}}{4}$.

b) Rozdeľme tento štvorec na päť obdĺžnikov dvoch typov tak, že dva majú rozmery $\frac{1}{2} \times x$ a tri $\frac{1}{3} \times (1-x)$, a to tak, že oba typy majú uhlopriečku rovnakej dĺžky u. Každému z nich je potom opísaný kruh s priemerom u, t. j. s polomerom $\frac{u}{2}$.



Podľa Pytagorovej vety potom

$$x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = u^2 = (1-x)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2,$$

takže

$$x^2 + \frac{1}{4} = \left(1 - 2x + x^2\right) + \frac{1}{9},$$

$$2x = 1 + \frac{1}{9} - \frac{1}{4} = \frac{36+4-9}{36} = \frac{31}{36},$$

a teda

$$x = \frac{31}{72}.$$

Z toho

$$u^2 = x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{31}{72}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 < \left(\frac{36}{72}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

takže

$$u < \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

a teda

$$\frac{u}{2} < \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Príslušné kruhy teda majú polomer menší než $\frac{\sqrt{2}}{4}$.