35. ročník MO, úloha C-II-1

Nájdite najmenšie kladné prirodzené číslo také, že jeho polovica je druhou mocninou prirodzeného čísla a jeho tretina je treťou mocninou prirodzeného čísla.

Riešenie

Nech n je hľadané číslo. Nech a je najväčšie prirodzené číslo také, že 2^a delí n, a b je najväčšie prirodzené číslo také, že 3^b delí n. Potom $2^a \cdot 3^b$ delí n, takže existuje kladné celé číslo c také, že c nie je násobok 2 ani 3 a

$$n = 2^a \cdot 3^b \cdot c.$$

Potom

$$\frac{n}{2} = 2^{a-1} \cdot 3^b \cdot c,$$

a

$$\frac{n}{3} = 2^a \cdot 3^{b-1} \cdot c,$$

takže čísla $a - 1$ a b sú prirodzené a párne a čísla a a $b - 1$ sú prirodzené a deliteľné 3. Platí teda $a \geq 3$ a $b \geq 4$, takže

$$n = 2^a \cdot 3^b \cdot c \geq 2^3 \cdot 3^4 \cdot 1 = 648.$$

Číslo 648 pritom vyhovuje, lebo $\frac{648}{2} = 324 = 18^2$ a $\frac{648}{3} = 216 = 6^3$.

Hľadané číslo je teda 648.

35. ročník MO, úloha A-I-4

Nájdite najmenšie kladné prirodzené číslo n také, že existujú dva nezhodné pytagorejské trojuholníky s preponou dĺžky n.

Riešenie

Použijeme tento (pomerne známy) fakt:

- Trojuholník je pytagorejský práve vtedy, keď existujú kladné prirodzené čísla k, a, b také, že a a b sú nesúdeliteľné, $a > b$ a jeho strany majú dĺžky $k\left(a^2 - b^2\right)$, $2kab$, $k\left(a^2 + b^2\right)$.

  Zrejme $a > b$ a strana $k(a^2 + b^2)$ je najdlhšia, je to teda prepona.

Všimnime si, že ak $(k, a, b) = (5, 2, 1)$, tak príslušný pravouhlý trojuholník má strany $5(2^2 - 1^2)$, $2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1$, $5(2^2 + 1^2)$, t. j. 15, 20, 25, a ak že ak $(k, a, b) = (1, 4, 3)$, tak príslušný pravouhlý trojuholník má strany $1(4^2 - 3^2)$, $2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1$, $1(4^2 + 3^2)$, t. j. 7, 24, 25. Platí teda $n \leq 25$.

Nech $n \leq 24$. Majme teda pytagorejský trojuholník s preponou dĺžky n, teda existujú kladné prirodzené čísla k, a, b také, že a a b sú nesúdeliteľné, $a > b$ a $n = k\left(a^2 + b^2\right)$. Preto $a^2 + b^2 \leq n \leq 24$. Z toho $a^2 \leq 24$, takže $a \leq \sqrt{24} < 5$, a teda $a \in \{1, 2, 3, 4\}$, Preto

$$\left(a, b, a^2 + b^2\right) \in \{(2, 1, 5), (3, 1, 10), (3, 2, 13), (4, 1, 17), (4, 3, 25)\},$$

a keďže $a^2 + b^2 \leq n < 25$, platí

$$(a, b, a^2 + b^2) \in \{(2, 1, 5), (3, 1, 10), (3, 2, 13), (4, 1, 17)\}.$$

Keďže $k\left(a^2 + b^2\right) = n \leq 24$, platí $k \leq \frac{24}{a^2+b^2}$, takže

$$\left(a, b, a^2 + b^2, k, k\left(a^2 + b^2\right)\right)$$
$$\in \{(2, 1, 5, 1, 5), (2, 1, 5, 2, 10), (2, 1, 5, 3, 15), (2, 1, 5, 4, 20),$$
$$(3, 1, 10, 1, 10), (3, 1, 10, 2, 20), (3, 2, 13, 1, 13), (4, 1, 17, 1, 17)\}.$$

Opakované hodnoty $k\left(a^2 + b^2\right)$ sú len 10 a 20, a to v týchto dvoch prípadoch:

- Nech $k\left(a^2 + b^2\right) = 10$.

  Potom
  $$(a, b, k) \in \{(2, 1, 2), (3, 1, 1)\},$$
  takže
  $$\left(a, b, k, k\left(a^2 - b^2\right), 2kab, k\left(a^2 + b^2\right)\right) \in \{(2, 1, 2, 6, 8, 10), (3, 1, 1, 8, 6, 10)\},$$
  čo je však dvakrát ten istý trojuholník.

- Nech $k\left(a^2 + b^2\right) = 20$.

  Potom
  $$(a, b, k) \in \{(2, 1, 4), (3, 1, 2)\},$$
  takže
  $$\left(a, b, k, k\left(a^2 - b^2\right), 2kab, k\left(a^2 + b^2\right)\right) \in \{(2, 1, 4, 12, 16, 20), (3, 1, 2, 16, 12, 20)\},$$
  čo je však dvakrát ten istý trojuholník.

Neexistujú teda dva pytagorejské trojuholníky s preponou dĺžky menšej než 25, a teda $n \geq 25$.

Zhrnutím dostávame, že $n = 25$.

35. ročník MO, úloha A-S-3a

Zistite, či existujú celé čísla x_1, x_2, x_3, x_4 také, že číslo

$$\left|(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4)\right|$$

je mocninou čísla 2 s prirodzeným exponentom.

Riešenie 1

Najprv dokážeme pomocné tvrdenie:

- Nech x a y sú prirodzené čísla. Potom $2^x + 2^y$ je mocnina 2 s prirodzeným exponentom, práve keď $x = y$.
  - $\rightarrow$ Bez ujmy na všeobecnosti $x \geq y$. Nech z je prirodzené číslo také, že

    $$2^x + 2^y = 2^z.$$

    Keďže $2^y \geq 1 > 0$, platí $2^x < 2^x + 2^y = 2^z$, t. j. $x < z$, a teda $x + 1 \leq z$ potom

    $$2^y\left(2^{x-y} + 1\right) = 2^z,$$

    $$2^{x-y} + 1 = 2 \cdot 2^{z-y-1}.$$

    $$2^{x-y} = 2 \cdot 2^{z-y-1} - 1.$$

    Číslo 2^{x-y} je teda nepárne a zároveň je to mocnina 2, takže $2^{x-y} = 1$, a teda $x - y = 0$, t. j. $x = y$.

    $\rightarrow$ Platí

    $$2^x + 2^y = 2^x + 2^x = 2 \cdot 2^x = 2^{x+1}.$$

Nech také čísla existujú. Bez ujmy na všeobecnosti $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4$. Keďže

$$|x_1 - x_2| \cdot |x_1 - x_3| \cdot |x_1 - x_4| \cdot |x_2 - x_3| \cdot |x_2 - x_4| \cdot |x_3 - x_4|$$

je mocninou čísla 2 s prirodzeným exponentom, aj každý z činiteľov tohto súčinu je mocninou čísla 2 s prirodzeným exponentom. Existujú teda prirodzené čísla a, b, c také, že

$$x_1 - x_2 = |x_1 - x_2| = 2^a,$$

$$x_2 - x_3 = |x_2 - x_3| = 2^b,$$

$$x_3 - x_4 = |x_3 - x_4| = 2^c.$$

Potom

$$|x_1 - x_3| = x_1 - x_3 = (x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) = 2^a + 2^b,$$

$$|x_2 - x_4| = x_2 - x_4 = (x_2 - x_3) + (x_3 - x_4) = 2^b + 2^c,$$

z čoho však opakovane podľa pomocného tvrdenia vyplýva, že $a = b = c$. Z toho

$$|x_1 - x_4| = x_1 - x_4 = (x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) + (x_3 - x_4) = 2^a + 2^b + 2^c = 2^a + 2^a + 2^a = 3 \cdot 2^a,$$

čo však nie je mocnina 2, To je spor, takže hľadané čísla neexistujú.

Riešenie 2

Medzi 4 celými číslami x_1, x_2, x_3, x_4 existujú 2, ktoré dávajú po delení 3 rovnaký zvyšok. Ich rozdiel je teda deliteľný 3, a teda aj aj číslo zo zadania, ktoré je jeho násobkom, je deliteľný 3, a preto nie je mocninou čísla 2 s prirodzeným exponentom. Žiadne také celé čísla teda neexistujú.

35. ročník MO, úloha A-III-1

Nech n je kladné prirodzené číslo a $\mathcal{S}$ množina podmnožín množiny $\{1, \dots, n\}$ taká, že ak $M_1, M_2 \in \mathcal{S}$, tak množina $(M_1 \cup M_2) \setminus (M_1 \cap M_2)$ má párny počet prvkov. Určte najväčší možný počet prvkov množiny $\mathcal{S}$.

Riešenie

Keďže

$$\left|(M_1 \cup M_2) \setminus (M_1 \cap M_2)\right| = |M_1| + |M_2| - 2 \cdot |M_1 \cap M_2|,$$

má táto množina párny počet prvkov práve vtedy, keď je číslo t. j. $|M_1| + |M_2|$ párne, čiže keď majú čísla $|M_1|$ a $|M_2|$ rovnakú paritu. To teda znamená, že buď majú všetky množiny z $\mathcal{S}$ párny počet prvkov, alebo majú všetky nepárny počet prvkov.

Všetkých 2^n podmnožín množiny $\{1, \dots, n\}$ môžeme rozdeliť na disjunktné dvojice $\{A, A \cup \{n\}\}$, kde A je podmnožina $\{1, \dots, n-1\}$, pričom $\left|A \cup \{n\}\right| = |A|$, takže jedna množina z takejto dvojice má párny počet prvkov a druhá nepárny. To znamená, že počet podmnožín množiny $\{1, \dots, n\}$ s párnym počtom prvkov a rovnaký ako počet jej podmnožín s nepárnym počtom prvkov, a teda oba počty sú $\frac{1}{2} \cdot 2^n$ čiže 2^{n-1}.

Najväčší možný počet prvkov množiny $\mathcal{S}$ je teda 2^{n-1}. Vtedy $\mathcal{S}$ obsahuje buď všetky podmnožiny $\{1, \dots, n\}$ s párnym počtom prvkov, alebo všetky s nepárnym počtom prvkov.

34. ročník MO, úloha C-I-2

Určte rozmery pravidelného štvorbokého hranola s celočíselnými rozmermi, ktorého objem i povrch sú rovnaké.

Riešenie

Veľkosť strany štvorcovej podstavy hranola označme a, a jeho výšku v. Potom platí

$$a^2 v = 2a^2 + 4av,$$

t. j. ekvivalentne

$$av = 2a + 4v,$$

$$av - 2a - 4v + 8 = 8,$$

$$(a-4)(v-2) = 8.$$

Čísla $a-4$ a $v-2$ sú celé a sú to delitele čísla 8. Platí teda ekvivalentne

$$(a-4, v-2) \in \{(-1,-8), (-2,-4), (-4,-2), (-8,-1), (1,8), (2,4), (4,2), (8,1)\},$$

$$(a, v) \in \{(3,-6), (2,-2), (1,0), (-5,1), (5,10), (6,6), (8,4), (12,3)\},$$

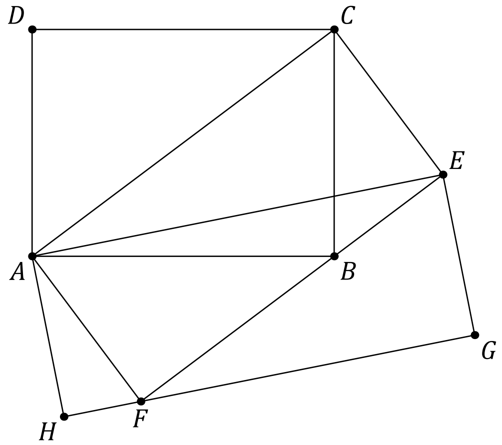
a keďže obe čísla a a v sú kladné, ekvivalentne

$$(a, v) \in \{(5,10), (6,6), (8,4), (12,3)\}.$$

34. ročník MO, úloha C-S-2

Nech a a b sú kladné čísla. Nech $ABCD$ je obdĺžnik taký, že $|AB| = a$ a $|BC| = b$. Nech E a F sú body také, že $ACEF$ je obdĺžnik a priamka EF prechádza bodom B. Nech G a H sú body také, že $AEGH$ je obdĺžnik a priamka GH prechádza bodom F. Vyjadrite dĺžky strán obdĺžnika $AEGH$ pomocou a a b.

Riešenie



Platí

$$\text{obsah}(ACEF) = |AC| \cdot |EC| = |AC| \cdot |E, AC| = |AC| \cdot |B, AC|$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |B, AC|\right) = 2 \cdot \text{obsah}(ABC) = \text{obsah}(ABCD) = |AB| \cdot |BC| = ab,$$

takže podobne

$$\text{obsah}(AEGH) = |AE| \cdot |GE| = |AE| \cdot |G, AE| = |AE| \cdot |F, AE|$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} \cdot |AE| \cdot |F, AE|\right) = 2 \cdot \text{obsah}(AFE) = \text{obsah}(ACEF) = ab.$$

Z toho podľa Pytagorovej vety

$$|AC| = \sqrt{|AB|^2 + |BC|^2} = \sqrt{a^2 + b^2},$$

takže

$$|CE| = \frac{\text{obsah}(ACEF)}{|AC|} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Z toho podľa Pytagorovej vety

$$|AE| = \sqrt{|AC|^2 + |CE|^2} = \sqrt{\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2} = \sqrt{(a^2 + b^2) + \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)^2 + a^2b^2}{a^2 + b^2}} = \sqrt{\frac{(a^4 + 2a^2b^2 + b^4) + a^2b^2}{a^2 + b^2}} = \sqrt{\frac{a^4 + 3a^2b^2 + b^4}{a^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{a^4 + 3a^2b^2 + b^4}}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

takže

$$|GE| = \frac{\text{obsah}(AEGH)}{|AE|} = \frac{ab}{\frac{\sqrt{a^4+3a^2b^2+b^4}}{\sqrt{a^2+b^2}}} = \frac{ab\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^4 + 3a^2b^2 + b^4}}.$$

34. ročník MO, úloha Z8-I-6

Nech ABC je rovnostranný trojuholník so stranou dĺžky 8. Nech x je reálne číslo také, že $0 < x < 4$. Nech $XYZW$ je obdĺžnik taký, že body X a Y ležia na strane AB, bod Z na úsečke BC, bod W na úsečke CA a $|AX| = x$.

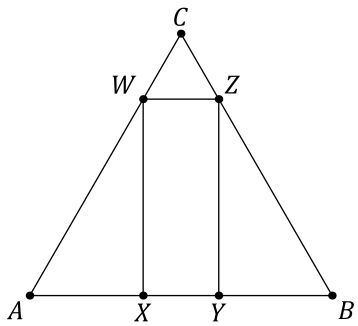
a) Vyjadrite obsah obdĺžnika $XYZW$ pomocou x.

b) Nájdite hodnotu x, pre ktorú je tento obsah najväčší.

c) Nájdite hodnotu x, pre ktorú je tento obsah rovný $\frac{3}{8}$ obsahu trojuholníka ABC.

Riešenie

Nech a je dĺžka strany trojuholníka ABC, podľa zadania $a = 8$. Potom $0 < x < \frac{a}{2}$. Zo súmernosti ABC a $XYZW$ podľa osi úsečky AB dostávame $|BY| = |AX|$.



a) Vyjadrite obsah obdĺžnika $XYZW$ pomocou x. Potom platí

$$\begin{aligned}
&\text{obsah}(XYZW)\\
&= \text{obsah}(ABC) - \text{obsah}(WZC) - \text{obsah}(AXW) - \text{obsah}(BYZ)\\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}|AB|^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}|WZ|^2 - \frac{1}{2}\cdot|AX|\cdot|XW| - \frac{1}{2}\cdot|BY|\cdot|YZ|\\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}|AB|^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}|XY|^2 - \frac{1}{2}\cdot|AX|\cdot|XW| - \frac{1}{2}\cdot|AX|\cdot|XW|\\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}|AB|^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}|XY|^2 - |AX|\cdot|XW|\\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}|AB|^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}(|AB| - |AX| - |BY|)^2 - |AX|\cdot\sqrt{3}\,|AX|\\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}|AB|^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}(|AB| - 2\,|AX|)^2 - \sqrt{3}\,|AX|^2\\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}(a-2x)^2 - \sqrt{3}x^2\\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(a^2 - (a-2x)^2 - 4x^2\right)\\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(a^2 - (a^2 - 4ax + 4x^2) - 2x^2\right)\\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}(4ax - 8x^2)\\
&= \sqrt{3}x(a-2x)
\end{aligned}$$

takže

$$\text{obsah}(XYZW) = \sqrt{3}x(8-2x) = 2\sqrt{3}x(4-x).$$

b) Podľa nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom platí

$$\text{obsah}(XYZW) = \sqrt{3}x(a-2x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2x(a-2x)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\sqrt{(2x)(a-2x)}\right)^2 \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2x+(a-2x)}{2}\right)^2$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2,$$

pričom rovnosť sa nadobúda práve v prípade $2x = a - 2x$, t. j. $4x = a$, t. j. $x = \frac{a}{4}$, čiže $x = \frac{8}{4} = 2$.

c) Platí

$$\text{obsah}(XYZW) = \frac{3}{8} \cdot \text{obsah}(ABC),$$

ekvivalentne

$$\sqrt{3}x(a-2x) = \frac{3}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2,$$

$$32x(a-2x) = 3a^2,$$

$$32ax - 64x^2 = 3a^2,$$

$$0 = 64x^2 3 - 32ax + a^2,$$

$$0 = (8x-a)(8x-3a),$$

$$0 = \left(x - \frac{1}{8}a\right)\left(x - \frac{3}{8}a\right),$$

$$x \in \left\{\frac{1}{8}a, \frac{3}{8}a\right\},$$

takže

$$x \in \left\{\frac{1}{8} \cdot 8, \frac{3}{8} \cdot 8\right\} = \{1, 3\}.$$