34. ročník MO, úloha B-II-2

Nájdite všetky riešenia sústavy rovníc

$$x + y + z = 3,$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = 3^3.$$

Riešenie

Z prvej rovnice

$$z = 3 - (x + y),$$

takže po dosadení do druhej

$$x^3 + y^3 + (3 - (x + y))^3 = 3^3,$$
$$(x + y)\left(x^2 - xy + y^2\right) + \left(27 - 27(x + y) + 9(x + y)^2 - (x + y)^3\right) = 27,$$
$$(x + y)\left(x^2 - xy + y^2\right) - 27(x + y) + 9(x + y)^2 - (x + y)^3 = 0,$$
$$(x + y)\left(x^2 - xy + y^2 - 27 + 9x + 9y - x^2 - 2xy - y^2\right) = 0,$$
$$(x + y)(-3xy + 9x + 9y - 27) = 0,$$
$$-3(x + y)(xy - 3x - 3y + 9) = 0,$$
$$(x + y)(xy - 3x - 3y + 9) = 0,$$
$$(x + y)(x - 3)(y - 3) = 0,$$
$$(3 - z)(x - 3)(y - 3) = 0,$$
$$(z - 3)(x - 3)(y - 3) = 0,$$
$$(x - 3)(y - 3)(z - 3) = 0.$$

Vzhľadom na symetriu bez ujmy na všeobecnosti $x - 3 = 0$, t. j. $x = 3$. Potom $3 + y + z = 3$, t. j. $z = -y$. Dosadením do pôvodnej sústavy sa presvedčíme, že $(3, y, -y)$ je jej riešením:

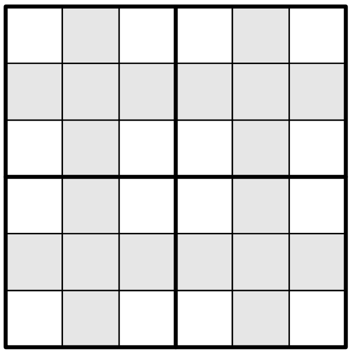
- $x + y + z = 3 + y + (-y) = 3.$
- $x^3 + y^3 + z^3 = 3^3 + y^3 + (-y)^3 = 3^3 - y^3 - y^3 = 27.$

Zhrnutím dostávame, že riešeniami sú práve všetky trojice $(3, a, -a)$, $(-a, 3, a)$, $(a, -a, 3)$, kde $a \in \mathbb{R}$.

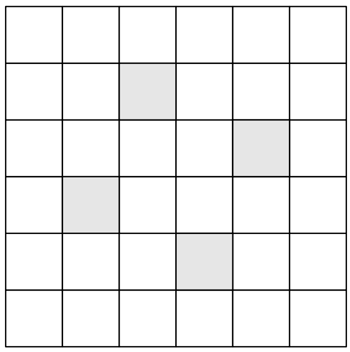
34. ročník MO, úloha Z7-I-5

Koľko štvorčekov na bielej tabuľke 6×6 treba zafarbiť, aby na nej neexistovalo 5 štvorčekov tvoriacich kríž?

Riešenie



Keďže do každej z častí 3×3 možno nakresliť kríž, v každej treba vyfarbiť aspoň jeden štvorček. Ak ich vyfarbíme takto, neexistuje 5 štvorčekov tvoriacich kríž:



33. ročník MO, úloha A-III-6

Nech f je zobrazenie množiny $\mathbb{Z}$ do seba také, že ak $m \in \mathbb{Z}$, tak

$$f(f(m)) = -m.$$

a) Dokážte, že f je bijekcia.

b) Dokážte, že ak $m \in \mathbb{Z}$, tak $f(-m) = -f(m)$,

c) Dokážte, že $f(m) = 0$, práve keď $m = 0$.

d) Nájdite príklad takéhoto zobrazenia.

Riešenie

a)
- Dokážeme, že f je injektívne zobrazenie:
  Nech $f(m_1) = f(m_2)$. Potom platí
  $$m_1 = -(-m_1) = -f(f(m_1)) = -f(f(m_2)) = -(-m_2) = m_2.$$
- Dokážeme, že obor hodnôt f je $\mathbb{Z}$.
  Nech $m \in \mathbb{Z}$. Potom
  $$m = -(-m) = f(f(-m)),$$
  takže m je v obore hodnôt f.

b) Platí
$$f(-m) = f(f(f(m))) = -f(m).$$

c) Potom špeciálne $f(0) = -f(-0) = -f(0)$, takže $2f(0) = 0$, a teda $f(0) = 0$.
Z injektivity f potom vyplýva, že ak $m \neq 0$, tak $f(m) \neq 0$.

d) Definujme zobrazenie f takto:

$$f(m) = \begin{cases} 0, & \text{ak } m = 0, \\ 2k, & \text{ak } m = 2k-1 \text{ a } k > 0, \\ -2k+1, & \text{ak } m = 2k \text{ a } k > 0, \\ -2k, & \text{ak } m = -2k+1 \text{ a } k > 0, \\ 2k-1, & \text{ak } m = -2k \text{ a } k > 0. \end{cases}$$

Potom platí:

- Ak $m = 0$, tak $f(f(m)) = f(f(0)) = f(0) = 0 = -0 = -m$.
- Ak $m = 2k-1$ a $k > 0$, tak $f(f(m)) = f(f(2k-1)) = f(2k) = -2k+1 = -(2k-1) = -m$.
- Ak $m = 2k$ a $k > 0$, tak $f(f(m)) = f(f(2k)) = f(-2k+1) = -2k = -m$.
- Ak $m = -2k+1$ a $k > 0$, tak $f(f(m)) = f(f(-2k+1)) = f(-2k) = 2k-1 = -(-2k+1) = -m$.
- Ak $m = -2k$ a $k > 0$, tak $f(f(m)) = f(f(-2k)) = f(2k-1) = 2k = -(-2k) = -m$.

33. ročník MO, úloha A-III-2

Nech $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sú uhly konvexného štvoruholníka a nech platí

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\delta = 0.$$

Dokážte, že je to tetivový štvoruholník alebo lichobežník.

Riešenie

Keďže $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi$, platí

$$(\cos\alpha + \cos\beta) + (\cos\gamma + \cos\delta) = 0,$$

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\cos\frac{\gamma+\delta}{2}\cos\frac{\gamma-\delta}{2} = 0,$$

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\gamma+\delta}{2}\cos\frac{\gamma-\delta}{2} = 0,$$

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{2\pi-(\alpha+\beta)}{2}\cos\frac{\gamma-\delta}{2} = 0,$$

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\left(\pi - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\frac{\gamma-\delta}{2} = 0,$$

$$= \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\gamma-\delta}{2} = 0,$$

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\gamma-\delta}{2}\right) = 0,$$

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot 2\sin\frac{\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{\gamma-\delta}{2}}{2}\sin\frac{\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{\gamma-\delta}{2}}{2} = 0,$$

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)}{4}\sin\frac{(\alpha+\delta)-(\beta+\gamma)}{4} = 0,$$

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{(\alpha+\gamma)-(2\pi-(\alpha+\gamma))}{4}\sin\frac{(\alpha+\delta)-(2\pi-(\alpha+\delta))}{4} = 0,$$

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\left(\frac{\alpha+\gamma}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\delta}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\delta}{2} = 0,$$

$$\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = 0\right) \vee \left(\cos\frac{\alpha+\gamma}{2} = 0\right) \vee \left(\cos\frac{\alpha+\delta}{2} = 0\right),$$

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\pi}{2}\right) \vee \left(\frac{\alpha+\gamma}{2} = \frac{\pi}{2}\right) \vee \left(\frac{\alpha+\delta}{2} = \frac{\pi}{2}\right),$$

$$(\alpha+\beta = \pi) \vee (\alpha+\gamma = \pi) \vee (\alpha+\delta = \pi).$$

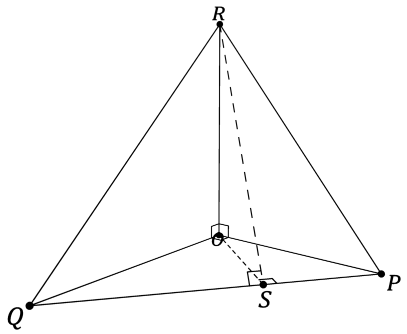
Súčet veľkostí dvoch susedných alebo dvoch protiľahlých uhlov tohto štvoruholníka je teda π, čo znamená, že je to tetivový štvoruholník alebo lichobežník.

35. ročník MO, úloha C-II-3a

Nech p, q, r sú kladné čísla. Nech O, P, Q, R sú rôzne body v priestore také, že každé dve z priamok OP, OQ, OR sú kolmé a platí $|OP| = p$, $|OQ| = q$, $|OR| = r$. Vyjadrite obsah trojuholníka PQR pomocou p, q, r.

Riešenie 1

Nech S je päta kolmice z bodu R na priamku PQ. Keďže RO je kolmá na rovinu OPQ, je kolmá aj na jej priamku PQ. Keďže aj RS je kolmá na PQ, aj ich rovina ROS je na ňu kolmá. Preto je na PQ kolmá aj jej priamka OS.



Potom platí

$$\frac{1}{2} \cdot |OP| \cdot |OQ| = \text{obsah}(OPQ) = \frac{1}{2} \cdot |PQ| \cdot |OS|,$$

z čoho

$$|OS| = \frac{|OP| \cdot |OQ|}{|PQ|} = \frac{|OP| \cdot |OQ|}{\sqrt{|OP|^2 + |OQ|^2}} = \frac{pq}{\sqrt{p^2 + q^2}},$$

takže

$$|SR| = \sqrt{|OS|^2 + |OR|^2} = \sqrt{\left(\frac{pq}{\sqrt{p^2 + q^2}}\right)^2 + r^2} = \sqrt{\frac{p^2q^2}{p^2 + q^2} + r^2}.$$

Z toho už

$$\text{obsah}(PQR) = \frac{1}{2} \cdot |PQ| \cdot |SR| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{|OP|^2 + |OQ|^2} \cdot |SR|$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{p^2 + q^2} \cdot \sqrt{\frac{p^2q^2}{p^2 + q^2} + r^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(p^2 + q^2)\left(\frac{p^2q^2}{p^2 + q^2} + r^2\right)}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{p^2q^2 + r^2\,(p^2 + q^2)} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{p^2q^2 + r^2p^2 + q^2r^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{p^2q^2 + q^2r^2 + r^2p^2}.$$

Riešenie 2

Najprv dokážeme pomocné tvrdenie:

- Nech $\mathcal{T}$ je trojuholník so stranami dĺžok x, y, z. Potom

$$16 \cdot \text{obsah}(\mathcal{T}) = -x^4 - y^4 - z^4 + 2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2z^2.$$

  - Podľa Herónovho vzorca

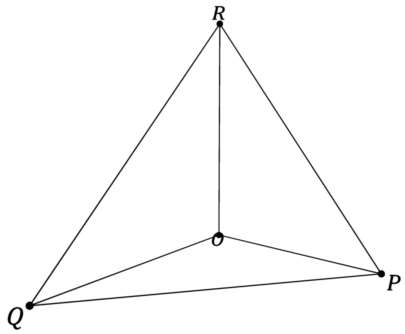
$$\text{obsah}(\mathcal{T}) = \sqrt{\frac{x+y+z}{2} \cdot \left(\frac{x+y+z}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{x+y+z}{2} - y\right) \cdot \left(\frac{x+y+z}{2} - z\right)},$$

  t. j.

$$\text{obsah}(\mathcal{T})^2 = \frac{x+y+z}{2} \cdot \frac{-x+y+z}{2} \cdot \frac{x-y+z}{2} \cdot \frac{x+y-z}{2},$$

z čoho

$$16 \cdot \text{obsah}(\mathcal{T})^2$$
$$= (x + y + z) \cdot (-x + y + z) \cdot (x - y + z) \cdot (x + y - z)$$
$$= ((y + z) + x) \cdot ((y + z) - x) \cdot (x - (y - z)) \cdot (x + (y - z))$$
$$= \left((y + z)^2 - x^2\right) \cdot \left(x^2 - (y - z^2)\right)$$
$$= (y + z)^2 \cdot x^2 - (y + z)^2 \cdot (y - z)^2 - x^2 \cdot x^2 + x^2 \cdot (y - z)^2$$
$$= -x^2 \cdot x^2 + \left((y + z)^2 \cdot x^2 + x^2 \cdot (y - z)^2\right) - (y + z)^2 \cdot (y - z)^2$$
$$= -x^4 + x^2 \left((y + z)^2 + (y - z)^2\right) - ((y + z)(y - z))^2$$
$$= -x^4 + x^2 \left(\left(y^2 + 2yz + z^2\right) + \left(y^2 + 2yz + z^2\right)\right) - \left(y^2 - z^2\right)^2$$
$$= -x^4 + x^2 \left(2y^2 + 2z^2\right) - \left(y^4 - 2y^2z^2 - z^4\right)$$
$$= -x^4 + 2x^2y^2 + 2z^2x^2 - y^4 + 2y^2z^2 - z^4$$
$$= -x^4 - y^4 - z^4 + 2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2z^2.$$



Podľa Pytagorovej vety v trojuholníkoch POQ, QOR, ROP

$$|PQ|^2 = |OP|^2 + |OQ|^2 = p^2 + q^2,$$
$$|QR|^2 = |OQ|^2 + |OR|^2 = q^2 + r^2,$$
$$|RP|^2 = |OR|^2 + |OP|^2 = r^2 + p^2.$$

Podľa pomocného tvrdenia

$$16 \cdot \text{obsah}(PQR)^2$$
$$= -|PQ|^4 - |QR|^4 - |RP|^4 + 2 \cdot |PQ|^2 \cdot |QR|^2 + 2 \cdot |QR|^2 \cdot |RP|^2 + 2 \cdot |RP|^2 \cdot |PQ|^2$$
$$= -\left(p^2 + q^2\right)^2 - \left(q^2 + r^2\right)^2 - \left(r^2 + p^2\right)^2$$
$$+ 2\left(p^2 + q^2\right)\left(q^2 + r^2\right) + 2\left(q^2 + r^2\right)\left(r^2 + p^2\right) + 2\left(r^2 + p^2\right)\left(p^2 + q^2\right)$$
$$= -\left(p^4 + 2p^2q^2 + q^4\right) - \left(q^4 + 2q^2r^2 + r^4\right) - \left(r^4 + 2r^2p^2 + p^4\right)$$
$$+ 2\left(p^2q^2 + r^2p^2 + q^4 + p^2q^2\right) + 2\left(q^2r^2 + p^2q^2 + r^4 + q^2r^2\right) + 2\left(r^2p^2 + q^2r^2 + p^4 + r^2p^2\right)$$
$$= -p^4 - 2p^2q^2 - q^4 - q^4 - 2q^2r^2 - r^4 - r^4 - 2r^2p^2 - p^4$$
$$+ 2p^2q^2 + 2r^2p^2 + 2q^4 + 2p^2q^2 + 2q^2r^2 + 2p^2q^2 + 2r^4 + 2q^2e^2 + 2r^2p^2 + 2q^2r^2 + 2p^4 + 2r^2p^2$$
$$= 4p^2q^2 + 4q^2r^2 + 4r^2p^2$$
$$= 4\left(p^2q^2 + 4q^2r^2 + 4r^2p^2\right),$$

z čoho

$$\text{obsah}(PQR)^2 = \frac{1}{4}\left(p^2q^2 + q^2r^2 + r^2p^2\right),$$
$$\text{obsah}(PQR) = \frac{1}{2}\sqrt{p^2q^2 + q^2r^2 + r^2p^2}.$$