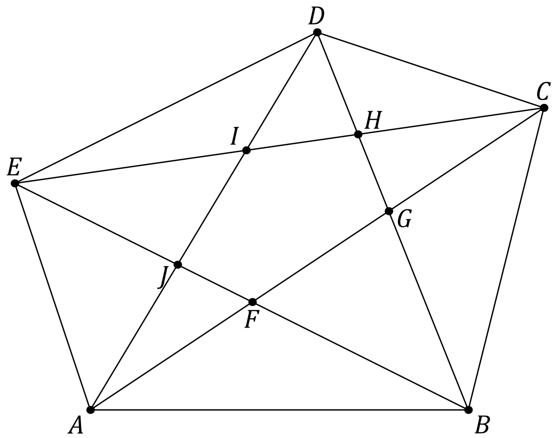
33. ročník MO, úloha Z-III-1

Dokážte, že súčet dĺžok uhlopriečok konvexného päťuholníka je väčší ako súčet dĺžok jeho strán.

Riešenie

Nech $ABCDE$ je konvexný päťuholník. Nech F, G, H, I, J sú postupne priesečníky dvojíc uhlopriečok EB a AC, AC a BD, BD a CE, CE a DA, DA a EB.



Keďže $ABDE$ je konvexný, polpriamka BE leží vnútri uhla ABD, a teda jej bod F leží vnútri úsečky BG. Analogicky bod G leží vnútri úsečky BH, bod H vnútri úsečky CI, bod I vnútri úsečky DJ a bod J vnútri úsečky EF. Z trojuholníkových nerovností v trojuholníkoch AFB, BGC, CHD, DIE, EJA potom dostávame

$$
\begin{aligned}
&|AC| + |BD| + |CE| + |DA| + |EB| \\
&= (|AF| + |FG| + |GC|) + (|BG| + |GH| + |HD|) + (|CH| + |HI| + |IE|) + (|DI| + |IJ| + |JA|) + (|EJ| + |JF| + |FB|) \\
&> (|AF| + |GC|) + (|BG| + |HD|) + (|CH| + |IE|) + (|DI| + |JA|) + (|EJ| + |FB|) \\
&= (|AF| + |FB|) + (|BG| + |GC|) + (|CH| + |HD|) + (|DI| + |IE|) + (|EJ| + |JAB|) \\
&> |AB| + |BC| + |CD| + |DE| + |EA|\,.
\end{aligned}
$$

34. ročník MO, úloha B-I-4

Nájdite všetky kladné prirodzené čísla n také, že existuje postupnosť $(z_1, \dots, z_n)$ čísel -1 a 1 taká, že

$$z_1 \cdot 1 + \dots + z_n \cdot n = 0.$$

Riešenie

Nech takáto postupnosť existuje. Potom

$$\begin{aligned} 0 = z_1 \cdot 1 + \dots + z_n \cdot n &= ((z_1+1) \cdot 1 + \dots + (z_n+1) \cdot n) - (1 + \dots + n) \\ &= 2\left(\frac{z_1+1}{2} \cdot 1 + \dots + \frac{z_n+1}{2} \cdot n\right) - \frac{n(n+1)}{2}, \end{aligned}$$

takže

$$\frac{n(n+1)}{2} = 2\left(\frac{z_1+1}{2} \cdot 1 + \dots + \frac{z_n+1}{2} \cdot n\right).$$

Pre každé i z $\{1, \dots, n\}$ platí $z_i \in \{-1, 1\}$, takže $\frac{z_i+1}{2} \in \{0, 1\}$. Číslo $\frac{z_1+1}{2} \cdot 1 + \dots + \frac{z_n+1}{2} \cdot n$ je teda prirodzené, takže pravá strana tejto rovnosti je párna. Jej ľavá strana je preto tiež párna, takže $n(n+1)$ je deliteľné 4. Keďže práve jedno z čísel n a $n+1$ je párne, je zároveň deliteľné 4. To teda znamená, že $n \bmod 4 \in \{0, 3\}$.

Rozoberme prípady:

- Nech existuje kladné prirodzené číslo k také, že $n = 4k$.

  Nech pre každé i z $\{1, \dots, k\}$ platí $z_{4i-3} = 1$, $z_{4i-2} = -1$, $z_{4i-1} = -1$, $z_{4i} = 1$. Potom

  $$\begin{aligned} &z_1 \cdot 1 + \dots + z_n \cdot n \\ &= \sum_{i=1}^{k} (z_{4i-3} \cdot (4i-3) + z_{4i-2} \cdot \cdot (4i-2) + z_{4i-1} \cdot (4i-1) + z_{4i} \cdot (4i)) \\ &= \sum_{i=1}^{k} (1 \cdot (4i-3) + (-1) \cdot (4i-2) + (-1) \cdot (4i-1) + 1 \cdot (4i)) \\ &= \sum_{i=1}^{k} ((4i-3) - (4i-2) - (4i-1) + (4i)) = \sum_{i=1}^{k} 0 = 0. \end{aligned}$$

- Nech existuje prirodzené číslo k také, že $n = 4k+3$.

  Nech $z_1 = 1$, $z_2 = 1$, $z_3 = -1$ a pre každé i z $\{1, \dots, k\}$ platí $z_{4i} = 1$, $z_{4i+1} = -1$, $z_{4i+2} = -1$, $z_{4i+3} = 1$. Potom

  $$\begin{aligned} &z_1 \cdot 1 + \dots + z_n \cdot n \\ &= (z_1 \cdot 1 + z_2 \cdot 2 + z_3 \cdot 3) + \sum_{i=1}^{k} (z_{4i} \cdot (4i) + z_{4i+1} \cdot \cdot (4i+1) + z_{4i+2} \cdot (4i+2) + z_{4i+3} \cdot (4i+3)) \\ &= (1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 3) + \sum_{i=1}^{k} (1 \cdot (4i) + (-1) \cdot (4i+1) + (-1) \cdot (4i+2) + 1 \cdot (4i+3)) \\ &= (1 + 2 - 3) + \sum_{i=1}^{k} ((4i) - (4i+1) - (4i+2) + (4i+3)) = 0 + \sum_{i=1}^{k} 0 = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Zhrnutím dostávame, že vyhovujú všetky kladné čísla n také, že $n \bmod 4 \in \{0, 3\}$.

34. ročník MO, úloha B-S-2

Nech n je prirodzené číslo také, že $n > 1$. Dokážte, že existuje postupnosť $(z_1, \dots, z_{2n-1})$ čísel -1 a 1 taká, že

$$z_1 \cdot 1 + z_2 \cdot 3 + \cdots + z_{2n-1} \cdot (4n - 1) = 0.$$

Riešenie

Rozoberme prípady:

- Nech existuje kladné prirodzené číslo k také, že $n = 2k$.

  Nech pre každé i z $\{1, \dots, k\}$ platí $z_{4i-3} = 1$, $z_{4i-2} = -1$, $z_{4i-1} = -1$, $z_{4i} = 1$. Potom

$$z_1 \cdot 1 + z_2 \cdot 3 + \cdots + z_{2n-1} \cdot (4n - 1)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (z_{4i-3} \cdot (8i - 7) + z_{4i-2} \cdot \cdot (8i - 5) + z_{4i-1} \cdot (8i - 3) + z_{4i} \cdot (8i - 1))$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (1 \cdot (8i - 7) + (-1) \cdot (8i - 5) + (-1) \cdot (8i - 3) + 1 \cdot (8i - 1))$$

$$= \sum_{i=1}^{k} ((8i - 7) - (8i - 5) - (8i - 3) + (8i - 1)) = \sum_{i=1}^{k} 0 = 0.$$

- Nech existuje kladné prirodzené číslo k také, že $n = 2k + 1$.

  Nech $z_1 = 1$, $z_2 = 1$, $z_3 = 1$, $z_4 = -1$, $z_5 = 1$, $z_6 = -1$ a pre každé i z $\{2, \dots, k\}$ platí $z_{4i-1} = 1$, $z_{4i} = -1$, $z_{4i+1} = -1$, $z_{4i+2} = 1$. Potom

$$z_1 \cdot 1 + z_2 \cdot 3 + \cdots + z_{2n-1} \cdot (4n - 1)$$

$$= (z_1 \cdot 1 + z_2 \cdot 3 + z_3 \cdot 5 + z_4 \cdot 7 + z_5 \cdot 9 + z_6 \cdot 11)$$

$$+ \sum_{i=2}^{k} (z_{4i-1} \cdot (8i - 1) + z_{4i} \cdot \cdot (8i + 1) + z_{4i+1} \cdot (8i + 3) + z_{4i+2} \cdot (8i + 5))$$

$$= (1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + (-1) \cdot 7 + 1 \cdot 9 + (-1) \cdot 11)$$

$$+ \sum_{i=2}^{k} (1 \cdot (8i - 1) + (-1) \cdot \cdot (8i + 1) + (-1) \cdot (8i + 3) + 1 \cdot (8i + 5))$$

$$= (1 + 3 + 5 - 7 + 9 - 11) + \sum_{i=2}^{k} ((8i - 1) - (8i + 1) - (8i + 3) + (8i + 5))$$

$$= 0 + \sum_{i=2}^{k} 0 = 0 + 0 = 0.$$

34. ročník MO, úloha C-I-1

Dokážte, že pre každý rozklad množiny $\{1, 2, \dots, 15\}$ na dve disjunktné podmnožiny také, že aspoň v jednej z nich existujú tri navzájom rôzne čísla x, y, z také, že x je najväčší spoločný deliteľ čísel y a z.

Riešenie

Nech existuje rozklad na dve disjunktné podmnožiny A a B také, že v žiadnej z nich neležia tri navzájom rôzne čísla x, y, z také, že x je najväčší spoločný deliteľ čísel y a z. Bez ujmy na všeobecnosti je číslo 1 v množine A. Keďže 2 je najväčší spoločný deliteľ 4 a 14, tieto tri čísla nie sú spolu v množine B, Podobne keďže 3 je najväčší spoločný deliteľ 9 a 15, ani tieto tri čísla nie sú spolu v množine B. To znamená, že aspoň jedno z čísel 2, 4, 14 čiže $2, 2^2, 2 \cdot 7$ je v množine A a aspoň jedno z čísel 3, 9, 15 čiže $3, 3^2, 3 \cdot 5$ je v množine A. Tieto dve čísla sú však nesúdeliteľné a sú spolu s 1 v množine A, čo je spor.

Poznámka

Rozklad množiny $\{1, 2, \dots, 14\}$ na dve disjunktné podmnožiny také, že v žiadnej z nich neexistujú tri navzájom rôzne čísla x, y, z také, že x je najväčší spoločný deliteľ čísel y a z, existuje, a to

$$\{\{1, 6, 8, 10, 12, 14\}, \{2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13\}.$$

34. ročník MO, úloha A-III-2

Nech A_1, A_2, A_3 sú neprázdne množiny celých čísel také, že ak $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ a $x \in A_i$ a $y \in A_j$, tak $x + y \in A_k$ a $x - y \in A_k$.

a) Dokážte, že aspoň dve z množín A_1, A_2, A_3 sa rovnajú.

b) Môžu byť niektoré z týchto množín disjunktné?

Riešenie

a) Rozoberme prípady:

- Nech niektorá z množín A_1, A_2, A_3 obsahuje 0.
  Bez ujmy na všeobecnosti $0 \in A_1$.
  Ukážeme, že potom $A_2 = A_3$. Vzhľadom na symetriu stačí ukázať, že $A_2 \subseteq A_3$:

  Ak $x \in A_2$, tak $x = 0 + x \in A_3$.

- Nech žiadna z množín A_1, A_2, A_3 neobsahuje 0.
  Ukážeme, že množiny A_1, A_2, A_3 sú disjunktné:

  Nech bez ujmy na všeobecnosti $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Existuje teda x také, že $x \in A_2$ a $x \in A_3$. Potom však $0 = x - x \in A_3$, čo je spor.

  Ukážeme, že ak $i \in \{1, 2, 3\}$ a $x \in A_i$, tak $-x \in A_i$:

  Nech bez ujmy na všeobecnosti $i = 1$. Keďže A_2 je neprázdna, existuje y také, že $y \in A_2$. Potom $x + y \in A_3$, takže $-x = y - (x + y) \in A_1$.

  Nech pre každé i z $\{1, 2, 3\}$ platí $m_i = \min\{x : x \in A_i \wedge x > 0\}$. Keďže A_1, A_2, A_3 sú disjunktné, čísla m_1, m_2, m_3 sú rôzne. Bez ujmy na všeobecnosti nech $m_1 > m_2 > m_3$. Potom však $m_2 - m_3 \in A_1$ a $m_1 > m_2 > m_2 - m_3 > 0$, čo je spor s definíciou m_1.
  Tento prípad teda nenastáva.

b) Nech A_1 je množina všetkých párnych celých čísel a A_2 a A_3 množina všetkých nepárnych celých čísel. Overíme, že všetky podmienky sú splnené:

- Ak x patrí do A_1 a y do A_2, resp. do A_3, t. j. x je párne a y je nepárne, tak $x + y$ a $x - y$ sú nepárne, t. j. patria do A_3, resp. A_2.
- Ak x patrí do A_2, resp. do A_3 a y do A_1, t. j. x je nepárne a y je párne, tak $x + y$ a $x - y$ sú nepárne, t. j. patria do A_3, resp. A_2.
- Ak x patrí do A_2, resp. do A_3 a y do A_3, resp. do A_2, t. j. obe x a y sú nepárne, tak $x + y$ a $x - y$ sú párne, t. j. patria do A_1.

34. ročník MO, úloha C-S-3a

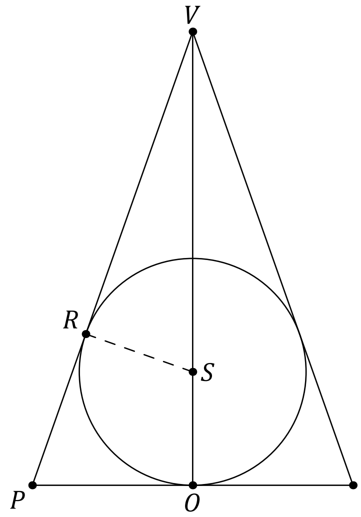
Vypočítajte pomer objemov rotačného kužeľa a do neho vpísanej gule, ak je výška kužeľa dvakrát väčšia než priemer gule.

Riešenie

Označme polomer gule r a polomer podstavy kužeľa x.

Nech V je vrchol kužeľa, O stred jeho podstavy, a S stred gule, Zo symetrie kužeľa vyplýva, že S leží na priamke OV a O je dotykový bod gule a základne kužeľa. Podľa predpokladu $|OV| = 2 \cdot 2r = 4r$.

Nech P je ľubovoľný bod hraničnej kružnice postavy kužeľa a R je bod dotyku gule a priamky AV.



Keďže trojuholníky VRS a VOP sú pravouhlé, platí

$$\frac{|OP|}{|PV|} = \sin|\sphericalangle PVO| = \sin|\sphericalangle SVR| = \frac{|SR|}{|SV|},$$

takže

$$|OP| \cdot |SV| = |SR| \cdot |PV|,$$

$$|OP| \cdot (|OV| - |SO|) = |SR| \cdot \sqrt{|OP|^2 + |OV|^2},$$

$$x \cdot (4r - r) = r\sqrt{x^2 + (4r)^2},$$

$$x \cdot 3r = r\sqrt{x^2 + 16r^2},$$

$$3x = \sqrt{x^2 + 16r^2},$$

$$9x^2 = x^2 + 16r^2,$$

$$8x^2 = 16r^2,$$

$$x^2 = 2r^2,$$

$$x = r\sqrt{2}.$$

Ak hľadaný pomer označíme q, tak

$$q = \frac{\frac{1}{3} \cdot \pi x^2 \cdot 4r}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{x^2}{2r^2} = 2.$$