33. ročník MO, úloha A-I-6

Nech $(A_i)_{i=0}^{\infty}$ a $(B_i)_{i=0}^{\infty}$ sú postupnosti rôznych bodov také, že pre každé i z $\mathbb{N}$ je $A_iA_{i+1}B_{i+1}B_i$ je štvorec, ktorý označíme Q_i. Pod *n-rebríkom* budeme rozumieť množinu úsečiek A_iB_i, kde $i \in \{0, \dots, n\}$, a A_iA_{i+1} a B_iB_{i+1}, kde $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Niektoré z úsečiek tohto n-rebríka sú ofarbené. Nech pre každé n z $\mathbb{N}$ je p_n počet všetkých takých ofarbení n-rebríka, že každý zo štvorcov Q_0, ..., Q_{n-1} má aspoň jednu stranu ofarbenú.

a) Určte najmenšie prirodzené číslo n také, že $p_n > 10^6$.

b) Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n je p_{n+1} nepárne číslo.

Riešenie

Rozoberme prípady:

- Nech $n = 0$.

  Potom p_n je počet vyhovujúcich ofarbení strán úsečky A_0B_0, takže $p_0 = 2$.

- Nech $n = 1$.

  Potom p_n čiže p_1 je počet vyhovujúcich ofarbení strán štvorca Q_0, čo zodpovedá počtu neprázdnych podmnožín 4-prvkovej množiny, takže $p_n = 2^4 - 1 = 15$.

- Nech $n \geq 2$.

  Vyhovujúce ofarbenia rozdeľme do dvoch disjunktných skupín:

  - Nech je ofarbená aspoň jedna zo strán $A_{n-1}A_n$, A_nB_n, B_nB_{n-1}.
    Existuje teda $2^3 - 1$ čiže 7 ich ofarbení. Každé z nich možno skombinovať s ľubovoľným vyhovujúcim ofarbením strán štvorcov Q_0, ..., Q_{n-1}, počet vyhovujúcich ofarbení tohto typu je teda $7p_{n-1}$.
  - Nech nie je ofarbená žiadna zo strán $A_{n-1}A_n$, A_nB_n, B_nB_{n-1}.
    Potom musí byť ofarbená strana $A_{n-1}B_{n-1}$. Strany $A_{n-2}A_{n-1}$ a $B_{n-2}B_{n-1}$ môžu byť potom ofarbené ľubovoľne, existujú teda $2 \cdot 2$ čiže 4 ich ofarbenia. Každé z nich možno skombinovať s ľubovoľným vyhovujúcim ofarbením strán štvorcov Q_0, ..., Q_{n-2}, počet vyhovujúcich ofarbení tohto typu je teda $4p_{n-2}$.

  Zhrnutím tak dostávame $p_n = 7p_{n-1} + 4p_{n-2}$.

Platí teda:

1
- $p_0 = 2$.
- $p_1 = 15$.

2 Ak $n \in \mathbb{N}$, tak $p_{n+2} = 7p_{n+1} + 4p_n$.

a) Postupne platí:

- $p_0 = 2 \leq 10^6$.
- $p_1 = 15 \leq 10^6$.
- $p_2 = 7p_1 + 4p_0 = 7 \cdot 15 + 4 \cdot 2 = 105 + 8 = 113 \leq 10^6$.
- $p_3 = 7p_2 + 4p_1 = 7 \cdot 113 + 4 \cdot 15 = 791 + 60 = 851 \leq 10^6$.
- $p_4 = 7p_3 + 4p_2 = 7 \cdot 851 + 4 \cdot 113 = 5\,957 + 452 = 6\,409 \leq 10^6$.
- $p_5 = 7p_4 + 4p_3 = 7 \cdot 6\,409 + 4 \cdot 851 = 44\,863 + 3\,404 = 48\,267 \leq 10^6$.
- $p_6 = 7p_5 + 4p_4 = 7 \cdot 48\,267 + 4 \cdot 6\,409 = 337\,869 + 25\,636 = 363\,505 \leq 10^6$.
- $p_7 = 7p_5 + 4p_4 = 7 \cdot 363\,505 + 4 \cdot 48\,267 = 2\,544\,535 + 193\,068 = 2\,737\,603 > 10^6$.

Hľadané najmenšie číslo je teda 7.

b) Indukciou dokážeme, že ak je n prirodzené číslo, tak p_{n+1} je nepárne číslo. Tvrdenie dokážeme indukciou:

1 $p_1 = 15$, čo je nepárne číslo.

2 Nech je n kladné prirodzené číslo také, že p_{n+1} je nepárne číslo. Potom aj $7p_{n+1}$ je nepárne číslo, a keďže $4p_n$ je párne číslo, číslo $7p_{n+1} + 4p_n$ čiže p_{n+2} je nepárne číslo.

Poznámka

Aj keď to úloha nevyžaduje, ukážeme explicitné vyjadenie členov tejto postupnosti. Začneme však trochu všeeobecnejšie:

Pod „našou“ postupnosťou bude rozumieť každú postupnosť $(a_n : n \in \mathbb{N})$ takú, že pre každé prirodzené číslo n platí $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

Zistime najprv, ako vyzerajú všetky „naše“ postupnosti, ktoré sú geometrické. Nech teda existujú nenulové čísla t a q také, že pre každé n z $\mathbb{N}$ platí $a_n = tq^n$. Potom

$$tq^2 = tq^1 + tq^0,$$

ekvivalentne

$$q^2 = q^1 + q^0,$$

$$q^2 = q + 1,$$

$$q^2 - q - 1,$$

$$q \in \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

V takom prípade naozaj platí

$$tq^2 = tq^1 + tq^0,$$

takže (po vynásobení q^n)

$$tq^{n+2} = tq^{n+1} + tq^n.$$

Navyše takáto postupnosť je „naša“ aj v prípade $t = 0$, lebo vtedy

$$0q^{n+2} = 0 = 0 + 0 = 0q^{n+1} + 0q^n.$$

Všimnime si, že sú postupnosti $(a_n : n \in \mathbb{N})$ a $(b_n : n \in \mathbb{N})$ naše, tak aj postupnosť $(a_n + b_n : n \in \mathbb{N})$ je „naša“: Platí totiž

$$a_{n+2} + b_{n+2} = (a_{n+1} + a_n) + (b_{n+1} + b_n) = (a_{n+1} + b_{n+1}) + (a_n + b_n).$$

Zhrnutím predchádzajúcich odsekov dostávame, že „naša“ je aj postupnosť

$$\left(c\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + d\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n : n \in \mathbb{N}\right),$$

kde c a d sú ľubovoľné čísla.

Ukážeme, že tento tvar majú všetky „naše“ postupnosti. Nech $(a_n : n \in \mathbb{N})$ je ľubovoľná „naša“ postupnosť. Nájdime c a d také, že

$$a_0 = c\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + d\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0,$$

$$a_1 = c\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + d\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1,$$

t. j.

$$a_0 = c + d,$$

$$a_1 = c\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + d\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

Ide o sústavu dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi, ktorá má jediné riešenie, lebo pravá strana žiadnej z nich nie je násobkom pravej strany druhej. Z prvej rovnice

$$a_0 - c = d,$$

takže po dosadení do druhej

$$a_1 = c\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + (a_0 - c)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right),$$

$$a_1 = c\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + (c - a_0)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right),$$

$$a_1 = c\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + c\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) - a_0\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right),$$

$$a_0\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + a_1 = c\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right),$$

$$a_0\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + a_1 = c \cdot \sqrt{5},$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(a_0\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + a_1\right) = c,$$

a potom

$$d = a_0 - c = a_0 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(a_0\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + a_1\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(a_0\sqrt{5} - a_0\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) - a_1\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(a_0\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) - a_1\right).$$

Keďže „naša“ postuposť je jednoznačne určená svojím 0. a 1. členom, pre každé n z $\mathbb{N}$ dostávame

$$a_n = c\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + d\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(a_0\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + a_1\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(a_0\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) - a_1\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(a_0\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + a_1\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(a_0\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) - a_1\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

V prípade „našej“ postupnosti $(p_n : n \in \mathbb{N})$ máme $p_0 = 2$ a $p_1 = 15$, takže

$$p_n$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + 15\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) - 15\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\left(\sqrt{5}-1\right) + 15\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\left(\sqrt{5}+1\right) - 15\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\sqrt{5}+14\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\sqrt{5}-14\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Poznámka

Aj Fibonacciho postupnosť Fib je „naša“. V jej prípade $\mathrm{Fib}_0 = 0$ a $\mathrm{Fib}_1 = 1$, takže

$$\mathrm{Fib}_n$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(0\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + 1\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(0\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) - 1\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left((0+1)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + (0-1)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + (-1)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

33. ročník MO, úloha A-I-4

Určte najväčšie prirodzené číslo n také, že existuje konvexný n-uholník, ktorý je zjednotením konečného počtu vzájomne sa neprekrývajúcich pravouhlých trojuholníkov s ostrými uhlami 30° a 60°.

Riešenie

Každý z uhlov ľubovoľného vyhovujúceho n-uholníka je zjednotením konečného počtu neprekrývajúcich sa uhlov veľkostí 30°, 60° alebo 90°. Jeho veľkosť je teda celočíselný násobok 30° menší než 180°, takže je to najviac 150°. Pretože súčet jeho uhlov je $(n-2)\cdot 180°$, platí

$$(n-2)\cdot 180° \leq n\cdot 150°,$$

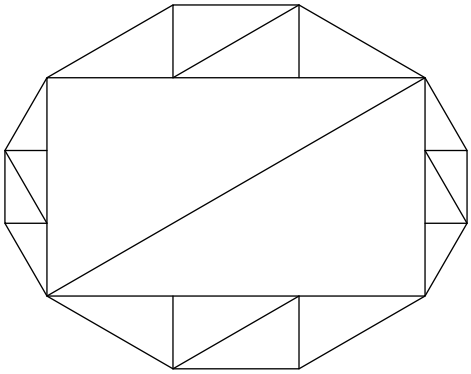
$$180(n-2) \leq 150n,$$

$$180n - 360 \leq 150n,$$

$$30n \leq 360,$$

$$n \leq 12.$$

Ako vidieť z nasledujúceho obrázku, vyhovujúci 12-uholník naozaj existuje:



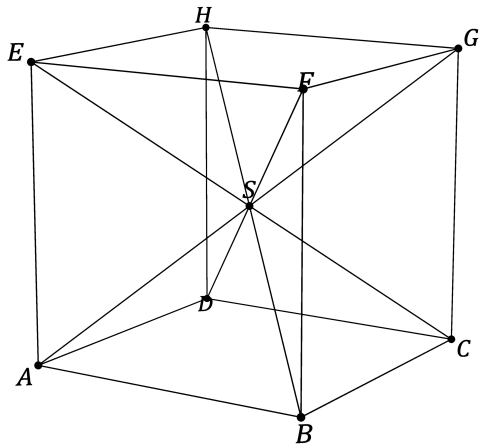
33. ročník MO, úloha A-III-1

Nech S je stred kocky $ABCDEFGH$. Nájdite všetky prirodzené čísla k, pre ktoré existuje rovina neobsahujúca bod S a pretínajúca práve k z polpriamok SA, SB, SC, SD, SE, SF, SG, SH.

Riešenie

Keďže štyri priamky AG, BH, CE, DF sa pretínajú v bode S a žiadne tri z nich neležia v jednej rovine, každá rovina neprechádzajúca bodom S je rovnobežná s najviac dvoma z nich, a teda so zvyšnými aspoň dvoma je rôznobežná. Platí teda $k \geq 2$.

Keďže polpriamky SA a SG sú navzájom opačné, žiadna rovina neprechádzajúca bodom S ich nemôže obe pretínať. To isté platí aj pre zvyšné tri dvojice polpriamok SB a SH, SC a SE, SD a SF, takže $k \leq 4$.



Platí teda $k \in \{2, 3, 4\}$, ukážeme, že všetky tieto čísla vyhovujú:

- Rovina rovnobežná s rovinou $ABGH$ prechádzajúca priamkou EF pretína práve 2 polpriamky SE a SF.
- Rovina rovnobežná s priamkou AG prechádzajúca priamkou FH pretína práve 3 polpriamky SE, SF a SH.
- Rovina steny $EFGH$ pretína práve 4 polpriamky SE, SF, SG, SH.

Vyhovujú teda práve čísla 2, 3, 4.

33. ročník MO, úloha A-I-5

V guli s polomerom 1 leží 73 rôznych bodov. Dokážte, že z nich je možné vybrať 13 takých, že ležia vnútri nejakej gule s polomerom $\frac{5}{6}$.

Riešenie

Nech $\mathcal{X}$ je pôvodná guľa, a $ABCDEFGH$ ľubovoľná do nej vpísaná kocka Roviny stien $ABCDEFGH$ rozdelia guľu $\mathcal{X}$ na túto kocku a na 6 guľových vrchlíkov, ktorých základne sú kružnice opísané strenám kocky. Nech S je spoločný stred gule a kocky. Potom zhodné ihlany $ABCDS, EFGHS, BCGFS, ADHES, ABFES, DCGHS$ pokrývajú kocku $ABCDEFGH$ a žiadne dva nemajú žiaden spoločný vnútorný bod.

Nech O je stred steny $AFGH$ a $\mathcal{Y}$ je guľa so stredom v O taká, že kružnica opísaná tejto stene je jej hlavná kružnica. Táto kružnica je prienikom guľových plôch ohraničujúce obe gule $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$. To znamená, že guľový vrchlík gule $\mathcal{X}$ leží vnútri gule $\mathcal{Y}$.

Nech a je dĺžka hrany kocky $ABCDEFGH$. Potom

$$1 = |SE| = \frac{1}{2}|CE| = \frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

takže

$$a = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

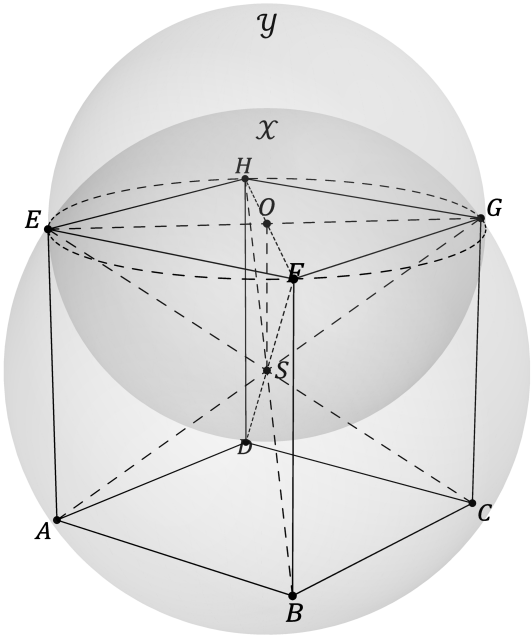
a potom

$$|SO| = \frac{a}{2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

a

$$|EO| = \frac{1}{2}|GE| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}a = \frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \leq \frac{5}{6}.$$

To znamená, že guľa $\mathcal{Y}$ má polomer najviac $\frac{5}{6}$ a obsahuje bod S, takže aj ihlan $EFGHS$.



To teda znamená, že guľa $\mathcal{X}$ je pokrytá 6 guľami s polomermi $\frac{5}{6}$ a stredmi v stredoch stien kocky $ABCDEFGH$. Ak by každá z nich obsahovala najviac 12 bodov zo zadania, spolu by obsahovali najviac $6 \cdot 12$ čiže 72 bodov, čo je však spor. Aspoň jedna z týchto gúľ teda obsahuje aspoň 13 týchto bodov.