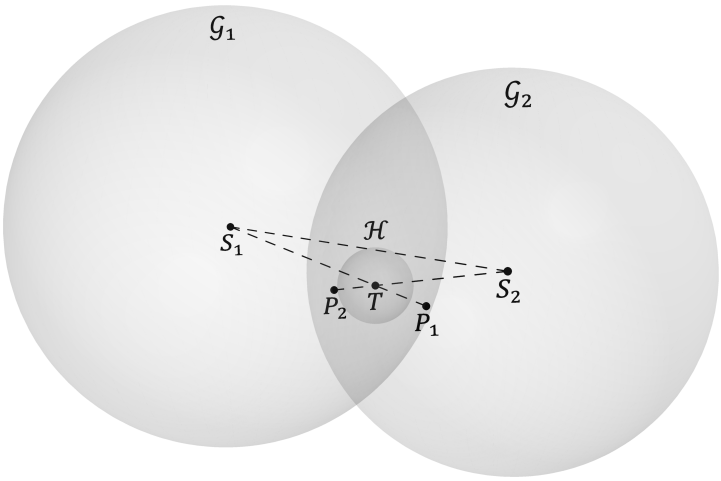
32. ročník MO, úloha A-II-3a (pomocná)

Priemer jedinej najväčšej gule, ktorá leží v prieniku dvoch gúľ so stredmi S_1, resp. S_2 a polomermi r_1, resp. r_2 a spoločným vnútorným bodom, je $r_1 + r_2 - |S_1S_2|$ a jej stred leží na úsečke S_1S_2.

Riešenie

Tieto dve gule označme $\mathcal{G}_1$, resp. $\mathcal{G}_2$ a $\mathcal{H}$ je ľubovoľná guľa, ktorá leží v ich prieniku. Nech T je stred a q priemer gule $\mathcal{H}$. Nech P_1 a P_2 sú priesečníky povrchov $\mathcal{G}_1$, resp. $\mathcal{G}_2$ s polpriamkami S_1T, resp. S_2T.



Potom P_1 a P_2 neležia vnútri gule $\mathcal{H}$, takže podľa trojuholníkovej nerovnosti platí

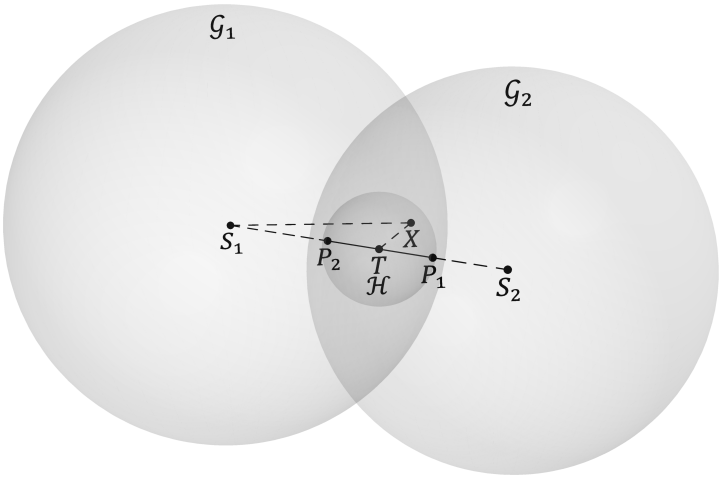
$$|S_1S_2| \leq |S_1T| + |S_2T| = (|S_1P_1| - |P_1T|) + (|S_2P_2| - |P_2T|) \leq \left(r_1 - \frac{q}{1}\right) + \left(r_2 - \frac{q}{1}\right) = r_1 + r_2 - q,$$

z čoho

$$q \geq r_1 + r_2 - |S_1S_2|,$$

pričom rovnosť sa nadobúda práve v prípade, keď T leží na úsečke S_1S_2 a platí $|P_1T| = |P_2T| = \frac{q}{2}$, t. j. P_1 a P_2 ležia na úsečke S_1S_2 a P_1P_2 je priemer gule $\mathcal{H}$. Vtedy aj jej stred leží na úsečke S_1S_2 a je to stred úsečky P_1P_2.

Ukážeme, že táto guľa $\mathcal{H}$ leží v prieniku gúľ $\mathcal{G}_1$ a $\mathcal{G}_2$: Nech X je jej ľubovoľný bod:



Potom podľa trojuholníkovej nerovnosti platí

$$|S_1X| \leq |S_1T| + |TX| \leq |S_1T| + |TP_1| = |S_1P_1| = r_1,$$

takže X leží v guli $\mathcal{G}_1$.

Analogicky je aj v guli $\mathcal{G}_2$, takže je aj v ich prieniku.

32. ročník MO, úloha A-I-5

Nech Q je štvorec so stranou dĺžky 1.

a) Určte v rovine množinu tretích vrcholov všetkých rovnostranných trojuholníkov, ktorých dva vrcholy ležia v štvorci Q.

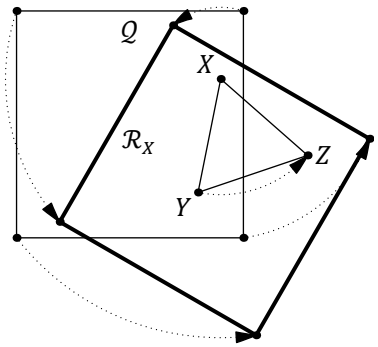
b) Vypočítajte obsah tejto množiny.

Riešenie

a) Nech X je ľubovoľný bod štvorca Q.

Nech XYZ je ľubovoľný rovnostranný trojuholník taký, že X a Y ležia v štvorci Q. Keďže Z je obrazom Y v otočení okolo X o $60°$, leží v štvorci, ktorý je obrazom štvorca Q v tomto otočení. Označme ho $\mathcal{R}_X$.

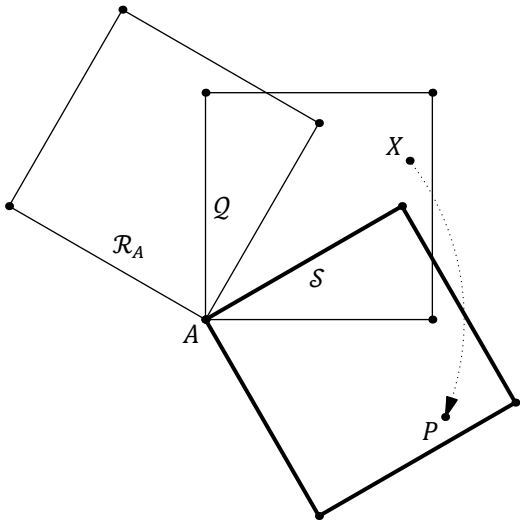
Naopak, každý bod štvorca $\mathcal{R}_X$ je v tomto otočení obrazom niektorého bodu štvorca Q, takže spolu s bodom X tvoria vrcholy rovnostranného trojuholníka.



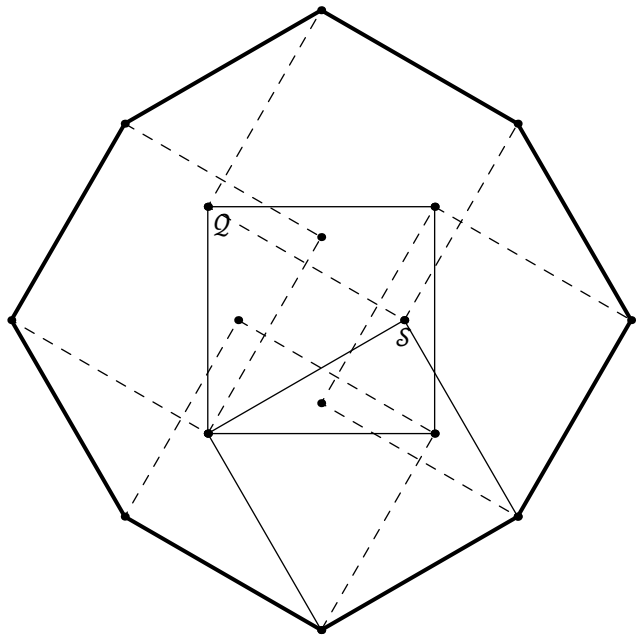
Hľadaná množina je teda zjednotením štvorcov $\mathcal{R}_X$, kde X prebieha všetky body štvorca Q.

Keďže všetky sú jeho obrazmi v otočeniach o $60°$, každý z nich je obrazom napríklad štvorca $\mathcal{R}_A$, kde A je niektorý z vrcholov Q. Jeho obraz v tomto posunutí označme P, existuje teda bod štvorca Q taký, že P je jeho obrazom v otočení okolo A o $-60°$. Bod P teda leží v štvorci, ktorý je obrazom štvorca Q v tomto otočení. Označme ho $\mathcal{S}$.

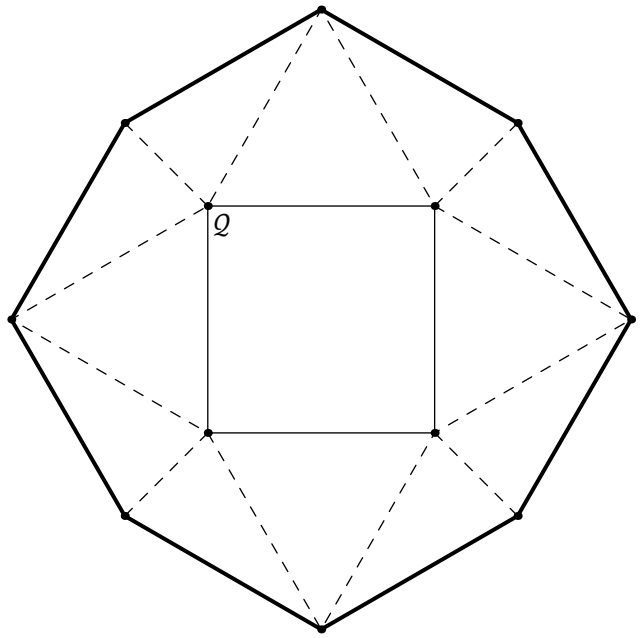
Naopak, každý bod štvorca $\mathcal{S}$ je v tomto otočení obrazom niektorého bodu štvorca Q.



Hľadaná množina je teda zjednotením všetkých štvorcov, ktoré sú posunutiami štvorca $\mathcal{R}_A$ o $\overrightarrow{AB}$, kde B prebieha štvorec $\mathcal{S}$.



b) Nájdená množina je tak tvorená pôvodným štvorcom Q, 4 rovnostrannými trojuholníkmi so stranou dĺžky 1, ktoré s ním majú spoločnú vždy jednu stranu, a 8 rovnoramennými trojuholníkmi s ramenami dĺžky 1 a hlavným uhlom 30°, ktoré s nimi majú spoločné vždy jedno rameno:



Obsah tejto množiny označme S, potom platí

$$S = 1 \cdot 1 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ\right) + 8 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 30^\circ\right)$$

$$= 1 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 8 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}\right) = 1 + \sqrt{3} + 2 = 3 + \sqrt{3}.$$

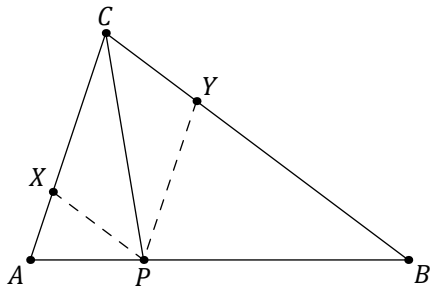
32. ročník MO, úloha A-III-2

Nech ABC je trojuholník a P je bod vnútri jeho strany AB. Dokážte, že

$$|PC| \cdot |AB| < |PA| \cdot |BC| + |PB| \cdot |AC|.$$

Riešenie 1

Nech X a Y sú body strán AC, resp. BC také, že $CXPY$ je rovnobežník.



Keďže strany trojuholníkov APX, PBY, ABC pri tomto poradí vrcholov sú rovnobežné, tieto trojuholníky sú podobné. Podľa trojuholníkovej nerovnosti v trojuholníku PCX potom dostávame

$$|PC| < |PX| + |XC| = |PX| + |PY| = \frac{|BC|}{|BA|} \cdot |PA| + \frac{|AC|}{|AB|} \cdot |PB| = \frac{|BC|}{|AB|} \cdot |PA| + \frac{|AC|}{|AB|} \cdot |PB|,$$

z čoho

$$|PC| \cdot |AB| < |PA| \cdot |BC| + |PB| \cdot |AC|.$$

Riešenie 2

Keďže P je vnútorný bod úsečky AB, existuje t z $(0, 1)$ také, že $P = A + t(B - A)$, t. j. $P = (1 - t)A + tB$, z čoho

$$t = \frac{P - A}{B - A} = \frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{|AP|}{|AB|} = \frac{|PA|}{|AB|}.$$

Vzhľadom na to, že vektory $\overrightarrow{AC}$ a $\overrightarrow{BC}$ sú lineárne nezávislé, platí

$$|PC| = \left|\overrightarrow{PC}\right| = |C - P| = \left|((1 - t)C + tC) - ((1 - t)A + tB)\right| = \left|(1 - t)(C - A) + t(C - B)\right|$$

$$= \left|(1 - t)\overrightarrow{AC} + t\overrightarrow{BC}\right| < \left|(1 - t) \cdot \overrightarrow{AC}\right| + \left|t \cdot \overrightarrow{BC}\right| = (1 - t)\left|\overrightarrow{AC}\right| + t\left|\overrightarrow{BC}\right| = (1 - t) \cdot |AC| + t \cdot |BC|$$

$$= \left(1 - \frac{|PA|}{|AB|}\right) \cdot |AC| + \frac{|PA|}{|AB|} \cdot |BC| = \frac{|PB|}{|AB|} \cdot |AC| + \frac{|PA|}{|AB|} \cdot |BC|,$$

z čoho

$$|PC| \cdot |AB| < |PB| \cdot |AC| + |PA| \cdot |BC| = |PA| \cdot |BC| + |PB| \cdot |AC|.$$