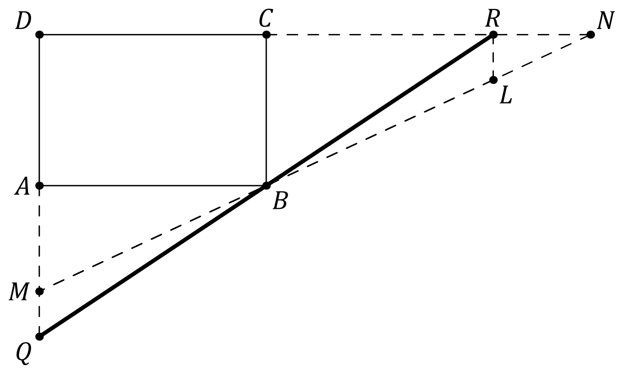
32. ročník MO, úloha A-S-3b

Nech $ABCD$ je obdĺžnik. Nájdite priamku p prechádzajúcu bodom B takú, že obsah trojuholníka ohraničeného polpriamkami DC a DA a priamkou p je minimálny.

Riešenie 1

Nech Q a R sú body polpriamok DA, resp. DC také, že A je stred DQ a C stred DR. Potom CB je stredná priečka trojuholníka DQR rovnobežná s DQ, takže B je stred QR.

Nech MN je iná priamka pretínajúca obe polpriamky DA a DC, v bodoch M, resp. N. Keďže B leží v uhle ADC čiže MDN, bod B leží vnútri úsečky MN. Potom rovnobežka AB s priamkou DC obsahujúcou bod N oddeľuje body M a N, takže bod M leží v polrovine ABQ, a teda vnútri polpriamky AQ. Analogicky N leží vnútri polpriamky CR. Keďže polpriamka QR oddeľuje body M a N, buď M leží vnútri úsečky AQ alebo N vnútri úsečky CR. Bez ujmy na všeobecnosti nech M leží vnútri AQ, takže R leží vnútri úsečky CN. Nech L je priesečník priamky MN a rovnobežky s priamkou AD cez bod R.



Potom je trojuholník QMB pri tomto poradí vrcholov rovnoľahlý s trojuholníkom RLB podľa stredu S, a keďže B je stred QR, tieto trojuholníky sú zhodné. Z toho dostávame

$$\text{obsah}(DMN) = \text{obsah}(DMBR) + \text{obsah}(NRB) = \text{obsah}(DMBR) + \text{obsah}(RLB) + \text{obsah}(RLN)$$

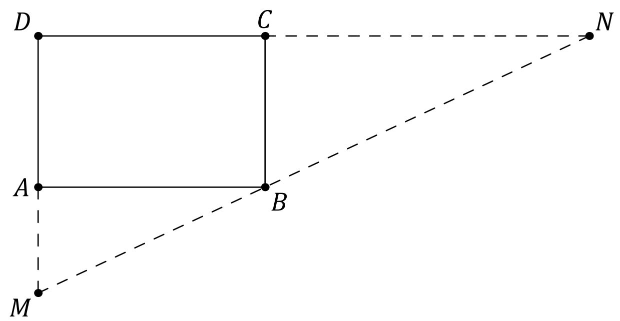
$$= \text{obsah}(DMBR) + \text{obsah}(QMB) + \text{obsah}(NRL) = \text{obsah}(DQR) + \text{obsah}(NRL) > \text{obsah}(DQR),$$

takže hľadaná priamka p je QR.

Riešenie 2

Nech Q a R sú body polpriamok DA, resp. DC také, že A je stred DQ a C stred DR. Potom CB je stredná priečka trojuholníka DQR rovnobežná s DQ, takže B je stred QR.

Nech MN je iná priamka pretínajúca obe polpriamky DA a DC, v bodoch M, resp. N. Keďže B leží v uhle ADC čiže MDN, bod B leží vnútri úsečky MN. Potom rovnobežka AB s priamkou DC obsahujúcou bod N oddeľuje body M a N, takže bod M leží v polrovine opačnej k polrovine ABD, a teda vnútri polpriamky opačnej k polpriamke AD. Analogicky N leží vnútri polpriamky opačnej k polpriamke CD.



Trojuholníky MAB a BCN sú pri tomto poradí vrcholov podobné, lebo ich prislúchajúce strany sú rovnobežné. Preto platí

$$\frac{|MA|}{|AB|} = \frac{|BC|}{|CN|}.$$

Z toho využitím nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom dostávame

$$\begin{aligned}
\text{obsah}(MDN) &= \text{obsah}(ABCD) + \text{obsah}(MAB) + \text{obsah}(BCN) \\
&= |BC| \cdot |AB| + \frac{1}{2} \cdot |MA| \cdot |AB| + \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |CN| \\
&= |BC| \cdot |AB| + \frac{1}{2} \cdot \frac{|BC| \cdot |AB|}{|CN|} \cdot |AB| + \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |CN| \\
&= |BC| \cdot |AB| + |BC| \cdot \frac{\frac{|AB|^2}{|CN|} + |CN|}{2} \\
&\geq |BC| \cdot |AB| + |BC| \cdot \sqrt{\frac{|AB|^2}{|CN|} \cdot |CN|} \\
&= |BC| \cdot |AB| + |BC| \cdot \sqrt{|AB|^2} \\
&= |BC| \cdot |AB| + |BC| \cdot |AB| \\
&= 2 \cdot |BC| \cdot |AB| \\
&= 2 \cdot \text{obsah}(ABCD),
\end{aligned}$$

pričom rovnosť sa nadobúda práve v prípade

$$\frac{|AB|^2}{|CN|} = |CN|\,,$$

t. j. ekvivalenentne

$$\begin{aligned}
|AB|^2 &= |CN|^2\,, \\
|AB| &= |CN|\,, \\
|CD| &= |CN|\,,
\end{aligned}$$

čo je práve vtedy, keď N je obraz D podľa stredu C (a analogicky M je obraz D podľa stredu A).
Hľadaná priamka je teda rovnobežka s AC prechádzajúca bodom M.

Nájdite najmenší súčin štyroch čísel z intervalu

a) $[1, 3]$,

b) $[2, 4]$,

ktorých súčet je 10.

Riešenie

Najprv dokážeme pomocné tvrdenie:

- Nech $x \leq y$ a $z \geq 0$. Potom $(x - z)(y + z) \leq xy$, pričom rovnosť nastáva práve v prípade $z = 0$.
  - Nech ? je $\leq$ alebo $=$. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:

$$(x - z)(y + z) \; ? \; xy,$$

$$xy + xz - yz - z^2 \; ? \; xy,$$

$$0 \; ? \; z^2 + yz - xz,$$

$$0 \; ? \; z^2 + z(y - x).$$

Ak ? je $\leq$, tak tvrdenia platia, lebo $z \geq 0$ a $y \geq x$.
Ak ? je $=$, ďalej ekvivalentne

$$0 = z^2 + z(y - x),$$

$$0 = z(z + y - x).$$

Ak by platilo $z > 0$, tak $z + y - x > 0$, a teda

$$0 < z(z + y - x),$$

čo by bol spor. Preto $z = 0$, a v takom prípade $(x - z)(y + z) = xy$.

a) Nech (a, b, c, d) sú čísla z intervalu $[1, 3]$ také, že $a + b + c + d = 10$ a $a \leq b \leq c \leq d$.
Potom podľa pomocného tvrdenia

$$\begin{aligned}
&abcd \\
&\geq (a - (3 - b)))\,(b + (3 - b)))\,cd \\
&= (a + b - 3)3cd \\
&= 3(a + b - 3)cd \\
&\geq 3\,((a + b - 3) - (3 - c)))\,(c - (3 - c)))\,d \\
&= 3(a + b + c - 6) \cdot 3d \\
&= 3^2(a + b + c - 6)d \\
&\geq 3^2\,((a + b + c - 6) - (3 - d)))\,(d - (3 - d))) \\
&= 3^2(a + b + c + d - 9) \cdot 3 \\
&= 3^3\,((a + b + c + d) - 9)) \\
&= 3^3(10 - 9) = 3^3 \cdot 1 = 27,
\end{aligned}$$

keďže

$$a + b - 3 = a - (3 - b) \leq a + 0 = a \leq c$$

a

$$a + b + c - 6 = a + (3 - b) + (3 - c) \leq a + 0 + 0 = a \leq d.$$

Pritom rovnosť nastáva práve v prípade $b = c = d = 3$, a teda $a = 1$.

b) Nech (a, b, c, d) sú čísla z intervalu $[2, 4]$ také, že $a + b + c + d = 10$ a $a \leq b \leq c \leq d$.
Potom podľa pomocného tvrdenia

$$
\begin{aligned}
&abcd \\
&\geq ab\,(c - (c-2)))\,(d + (c-2))) \\
&= ab \cdot 2(c + d - 2) \\
&= 2ab(c + d - 2) \\
&\geq 2a\,(b - (b-2))\,((c + d - 2) + (b - 2)) \\
&= 2a \cdot 2(b + c + d - 4) \\
&= 2^2 a(b + c + d - 4) \\
&\geq 2^2\,(a - (2 - a))\,((b + c + d - 4) + (2 - a)) \\
&= 2^2 \cdot 2(a + b + c + d - 6) \cdot 3 \\
&= 2^3\,((a + b + c + d) - 6)) \\
&= 2^3(10 - 6) = 2^3 \cdot 4 = 32,
\end{aligned}
$$

keďže

$$c + d - 2 = (c - 2) + d \geq 0 + d = d \geq b$$

a

$$b + c + d - 4 = (b - 2) + (c - 2) + d \geq 0 + 0 + d = d \leq a.$$

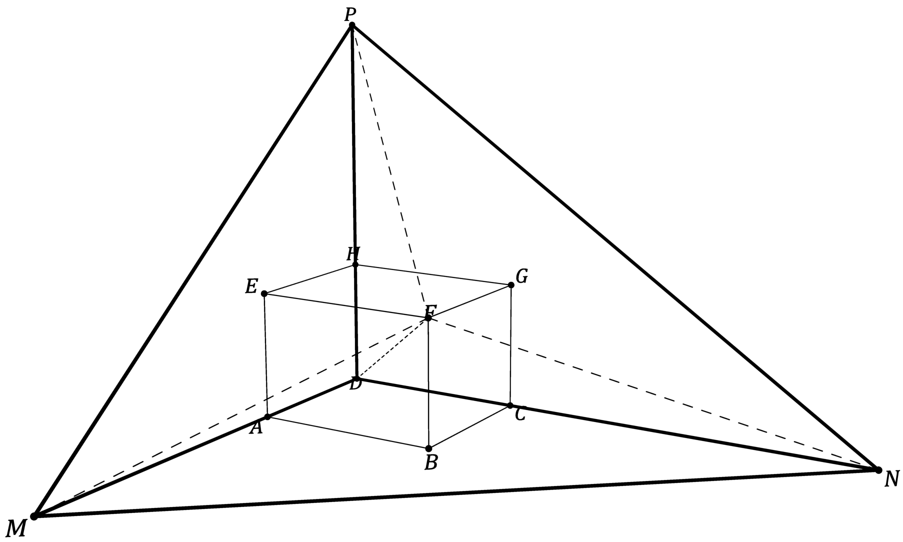
Pritom rovnosť nastáva práve v prípade $a = b = c = 2$, a teda $d = 4$.

32. ročník MO, úloha A-II-3a

Nech $ABCDEFGH$ je kváder. Na polpriamkach DA, DC, DH nájdite postupne body M, N, P také, že rovina MNP prechádza bodom F a obsah štvorstena $DMNP$ je minimálny.

Riešenie

Nech M, N, P sú hľadané body.



Potom platí

$$\text{objem}(DMNP) = \text{objem}(DNPF) + \text{objem}(DPMF) + \text{objem}(DMNF),$$

$$\frac{1}{3}\cdot\text{obsah}(DMN)\cdot|P,DMN| = \frac{1}{3}\cdot\text{obsah}(DNP)\cdot|F,DNP|+\frac{1}{3}\cdot\text{obsah}(DPM)\cdot|F,DPM|+\frac{1}{3}\cdot\text{obsah}(DMN)\cdot|F,DMN|,$$

$$\text{obsah}(DMN)\cdot|DP| = \text{obsah}(DNP)\cdot|GF| + \text{obsah}(DPM)\cdot|EF| + \text{obsah}(DMN)\cdot|BF|,$$

$$\left(\frac{1}{2}\cdot|DM|\cdot|DN|\right)\cdot|DP| = \left(\frac{1}{2}\cdot|DN|\cdot|DP|\right)\cdot|GF| + \left(\frac{1}{2}\cdot|DP|\cdot|DM|\right)\cdot|EF| + \left(\frac{1}{2}\cdot|DM|\cdot|DN|\right)\cdot|BF|,$$

$$|DM|\cdot|DN|\cdot|DP| = |DN|\cdot|DP|\cdot|DA| + |DP|\cdot|DM|\cdot|DC| + |DM|\cdot|DN|\cdot|DH|,$$

$$1 = \frac{|DA|}{|DM|} + \frac{|DC|}{|DN|} + \frac{|DH|}{|DP|}.$$

Podľa nerovnosti medzi aritemtickým a geometrickým priemerom platí

$$\frac{\frac{|DA|}{|DM|} + \frac{|DC|}{|DN|} + \frac{|DH|}{|DP|}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{|DA|}{|DM|}\cdot\frac{|DC|}{|DN|}\cdot\frac{|DH|}{|DP|}},$$

t. j. ekvivalentne

$$\frac{1}{3}\cdot 1 \geq \sqrt[3]{\frac{|DA|\cdot|DC|\cdot|DH|}{|DM|\cdot|DN|\cdot|DP|}},$$

$$\frac{1}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{|DC|\cdot|DH|\cdot|DA|}{6\cdot\frac{1}{6}|DM|\cdot|DN|\cdot|DP|}},$$

$$\frac{1}{27} \geq \frac{\text{objem}(ABCDEFGH)}{6\cdot\text{objem}(DMNP)},$$

$$\text{objem}(DMNP) \geq \frac{9}{2}\cdot\text{objem}(ABCDEFGH),$$

pričom sa rovnosť sa vzhľadom na vzťah

$$1 = \frac{|DA|}{|DM|} + \frac{|DC|}{|DN|} + \frac{|DH|}{|DP|},$$

nadobúda práve v prípade

$$\frac{|DA|}{|DM|} = \frac{|DC|}{|DN|} = \frac{|DH|}{|DP|} = \frac{1}{3},$$

t. j. práve vtedy, keď $|DM| = 3\,|DA|$, $|DN| = 3\,|DC|$, $|DP| = 3\,|DH|$.

Nech $ABCDE$ je konvexný päťuholník taký, že $|\sphericalangle EAB| = 60°$, $|\sphericalangle ABC| = 100°$, $|\sphericalangle BCD| = 140°$. Dokážte, že $ABCDE$ možno pokryť kruhom s polomerom $\frac{2}{3}|AD|$.

Riešenie

Nech F je priesečník priamok AB a CD a G priesečník priamok AE a CD. Potom

$$|\sphericalangle AFG| = |\sphericalangle BFC| = 180° - |\sphericalangle CBF| - |\sphericalangle FCB| = 180° - (180° - |\sphericalangle ABC|) - (180° - |\sphericalangle BCD|)$$

$$= |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle BCD| - 180° = 100° + 140° - 180° = 60°$$

a

$$|\sphericalangle GAF| = |\sphericalangle EAB| = 60°,$$

takže trojuholník AFG je rovnostranný. Možno ho teda pokryť kruhom so stredom v jeho ťažisku a polomerom $\frac{2}{3}|A, FG|$, a keďže $|AD| \geq |A, FG|$, aj sústredným kruhom s polomerom $\frac{2}{3}|AD|$. Tento kruh potom pokrýva aj päťuholník $ABCDE$.