31. ročník MO, úloha A-I-6

Nech $ABCD$ je štvorsten. Dokážte, že objem štvorstena, ktorého vrcholy sú ťažiská štvorstenov $KBCD$, $AKCD$, $ABKD$, $ABCK$, kde K je ľubovoľný bod vnútri $ABCD$, nezávisí od polohy bodu K.

Riešenie 1

Nech S_{XYZ} znamená ťažisko trojuholníka XYZ a T_{XYZW} ťažisko štvorstena $XYZW$.

Ťažisko štvorstena delí jeho ťažnicu v pomere $1:3$, pričom dlhšia časť je pri vrchole.

Preto platí $|KT_{KBCD}| = \frac{3}{4}|KS_{BCD}|$, takže bod T_{KBCD} je obrazom bodu S_{BCD} v rovnoľahlosti so stredom K a koeficientom $\frac{3}{4}$.

Analogicky sú body T_{AKCD}, T_{ABKD}, T_{ABCK} v tejto rovnoľahlosti obrazmi bodov S_{ACD}, S_{ABD}, S_{ABC}, takže štvorsten $T_{KBCD}T_{AKCD}T_{ABKD}T_{ABCK}$ je v tejto rovnoľahlosti obrazom štvorstena $S_{BCD}S_{ACD}S_{ABD}S_{ABC}$. Preto

$$\frac{\text{objem} T_{KBCD}T_{AKCD}T_{ABKD}T_{ABCK}}{\text{objem}(S_{BCD}S_{ACD}S_{ABD}S_{ABC})} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64},$$

pričom štvorsten $S_{BCD}S_{ACD}S_{ABD}S_{ABC}$, a teda ani jeho objem, nezávisí od polohy bodu K. To znamená, že od nej nezávisí ani objem štvorstena $T_{KBCD}T_{AKCD}T_{ABKD}T_{ABCK}$.

Poznámka

Rovnakú myšlienku môžeme aplikovať aj na štvorsten $S_{BCD}S_{ACD}S_{ABD}S_{ABC}$, a určiť tak pomer objemov štvorstenov $T_{KBCD}T_{AKCD}T_{ABKD}T_{ABCK}$ a $ABCD$:

Nech R je ťažisko štvorstena $ABCD$. Preto platí $|RS_{BCD}| = \frac{1}{3}|RA|$, takže bod S_{BCD} je obrazom bodu A v rovnoľahlosti so stredom R a koeficientom $-\frac{1}{3}$. Analogicky sú body S_{ACD}, S_{ABD}, S_{ABC} v tejto rovnoľahlosti obrazmi bodov B, C, D, takže štvorsten $S_{BCD}S_{ACD}S_{ABD}S_{ABC}$ je v tejto rovnoľahlosti obrazom štvorstena $ABCD$. Preto

$$\frac{\text{objem} S_{BCD}S_{ACD}S_{ABD}S_{ABC}}{\text{objem}(ABCD)} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27},$$

z čoho

$$\frac{\text{objem} T_{KBCD}T_{AKCD}T_{ABKD}T_{ABCK}}{\text{objem}(ABCD)} = \frac{\text{objem} T_{KBCD}T_{AKCD}T_{ABKD}T_{ABCK}}{\text{objem}(S_{BCD}S_{ACD}S_{ABD}S_{ABC})} \cdot \frac{\text{objem}(S_{BCD}S_{ACD}S_{ABD}S_{ABC})}{\text{objem}(ABCD)} = \frac{27}{64} \cdot \frac{1}{27} = \frac{1}{64}.$$

Riešenie 2

Nech S_{XYZ} znamená ťažisko trojuholníka XYZ a T_{XYZW} ťažisko štvorstena $XYZW$. Potom platí

$$\overrightarrow{T_{AKCD}T_{KBCD}} = T_{KBCD} - T_{AKCD} = \frac{K+B+C+D}{4} - \frac{A+K+C+D}{4} = \frac{B-A}{4} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB},$$

a analogicky

$$\overrightarrow{T_{KBCD}T_{ABKD}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC},$$

$$\overrightarrow{T_{KBKD}T_{ABCK}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD},$$

$$\overrightarrow{T_{AKCD}T_{ABKD}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC},$$

$$\overrightarrow{T_{AKCD}T_{ABCK}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BD},$$

$$\overrightarrow{T_{ABKD}T_{ABCK}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CD}.$$

Všetky hrany štvorstena $T_{KBCD}T_{AKCD}T_{ABKD}T_{ABCK}$ sú teda rovnobežné s príslušnými stenami štvorstena $ABCD$ a sú 4-krát kratšie.

Pre všetky polohy bodu K sú teda uvažované štvorsteny zhodné, majú teda aj rovnaké objemy.

Poznámka

Keďže štvorsten $T_{KBCD}T_{AKCD}T_{ABKD}T_{ABCK}$ je obrazom štvorstena $ABCD$ v istej rovnoľahlosti s koeficientom $\frac{1}{4}$, jeho objem je $\left(\frac{1}{4}\right)^3$ čiže $\frac{1}{64}$ objemu $ABCD$.

31. ročník MO, úloha A-II-3a

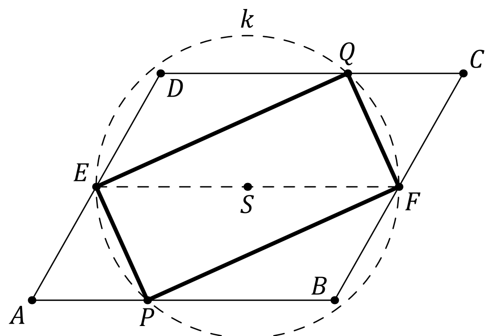
Dokažte, že pre každý rovnobežník existuje obdĺžnik v ňom obsiahnutý, ktorého obsah je aspoň polovica jeho obsahu.

Riešenie

Nech $ABCD$ je rovnobežník, pričom bez ujmy na všeobecnosti $|AB| \geq |BC|$ a $|\sphericalangle DAB| \leq 90°$. Nech E a F sú stredy strán AD, resp. BC a k je kružnica nad priemerom EF so stredom S. Pritom

$$|EF, AB| = \frac{1}{2}\,|AB, CD| \leq \frac{1}{2}\,|BC| \leq \frac{1}{2}\,|AB| = \frac{1}{2}\,|EF|\,,$$

čo je polomer k, takže má s priamkou AB aspoň jeden spoločný bod. Keďže $|\sphericalangle DAB| \leq 90°$, všetky takéto priesečníky ležia na polpriamke AB. Označme P ten, ktorý je najbližšie k A. Potom $|\sphericalangle FSQ| \geq 90°$, takže $|FP| > |FB|$, takže P leží na úsečke AB. Nech Q je bod súmerný s P podľa stredu S.



Potom $EPFQ$ je tetivový a súmerný podľa S, takže je to obdĺžnik, a potom platí

$$\text{obsah}(EPFQ) = \text{obsah}(EFP) + \text{obsah}(FEQ) = 2 \cdot \text{obsah}(EFP) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |P, EF|\right)$$

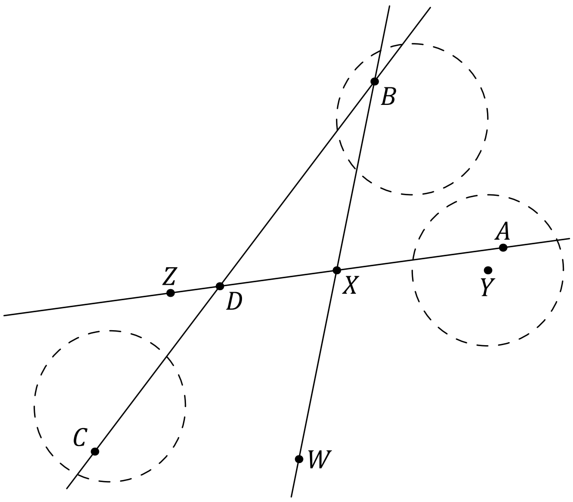
$$= \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot (2 \cdot |P, EF|) = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot (2 \cdot |AB, EF|) = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AB, CD| = \frac{1}{2} \cdot \text{obsah}(ABCD).$$

31. ročník MO, úloha B-I-1

Na priamke ležia rôzne body A_1, A_2, A_3, A_4 a na inej priamke s ňou rovnobežnej rôzne body B_1, B_2, B_3, B_4, B_5. Každú úsečku A_iB_k ofarbite buď červenou, alebo modrou farbou tak, aby nevznikla žiadna jednofarebná uzavretá lomená čiara zložená zo 4 úsečiek.

Riešenie

Vyhovuje napríklad takéto farbenie:



Poznámka

Každému ofarbeniu môžeme priradiť tabuľku, ktorej riadky zodpovedajú bodom A_i, kde $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, a stĺpce bodom B_j, kde $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Hodnota v políčku v i. riadku a j. stĺpci zodpovedá farbe úsečky A_iB_j, pričom M znamená modrú farbu a Č červenú.

Napríklad tabuľka zodpovedajúca riešeniu vyzerá takto:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	Č	Č	Č	M	M
A_2	Č	M	M	Č	Č
A_3	M	Č	M	Č	M
A_4	M	M	Č	M	Č

Podmienka o lomenej čiare znamená, že v tabuľke nesmú byť v rohových poliach obdĺžnika rovnaké písmená. Dokážeme, že potom v žiadnom stĺpci nesmú byť tri rovnaké písmená:

Nech bez ujmy na všeobecnosti sú v prvých troch políčkach prvého stĺpca tri písmená Č. Potom sa v prvých troch políčkach zvyšných štyroch stĺpcov nesmú vyskytnúť dve písmená Ć, lebo by spolu s niektorými dvoma Č z prvého stĺpca boli v rohových poliach obdĺžnika. To teda znamená, že v prvých troch políčkach zvyšných štyroch stĺpcov sú aspoň dve písmená M, Aspoň v dvoch z nich sú tieto dvojice v rovnakých dvoch riadkoch, takže políčka s týmito štyrmi písmenami M sú v rohových poliach obdĺžnika. To je však spor.

V každom stĺpci tabuľky každého riešenia sú teda dve písmená C a dve písmená M, a to vždy inak, aby nevznikli rovnaké písmená v rohových poliach obdĺžnika. Takých rozmiestnení písmen je 6:

Č	Č	Č	M	M	M
Č	M	M	Č	Č	M
M	Č	M	Č	M	Č
M	M	Č	M	Č	Č

Každé riešenie teda dostaneme výberom 5 z týchto 6 stĺpcov, všetkých riešení je teda $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ čiže 720.