31. ročník MO, úloha A-S-3b

Nech p je priamka v súradnicovej sústave.

a) Dokážte, že nastáva jeden z prípadov:

   1. p obsahuje nekonečne veľa mrežových bodov.
   2. p neobsahuje žiadny mrežový bod.
   3. p obsahuje presne jeden mrežový bod.

b) Ukážte, že každý z týchto prípadov môže nastať.

Riešenie

a) Nech p obsahuje aspoň dva rôzne mrežové body, označme ich A a B. Nech $A = \langle p, q\rangle$ a $B = \langle r, s\rangle$, kde p, q, r, s sú celé čísla.

Nech k je prirodzené číslo. Potom bod $A + k \cdot \overrightarrow{AB}$ tiež leží na priamke p, platí

$$|AP_k| = |P_k - A| = \left|\left(A + k \cdot \overrightarrow{AB}\right) - A\right| = \left|k \cdot \overrightarrow{AB}\right| = k \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right|$$

a

$$\begin{aligned} A + k \cdot \overrightarrow{AB} &= A + k(B - A) = \langle p, q\rangle + k(\langle r, s\rangle - \langle p, q\rangle) = \langle p, q\rangle + k(\langle r - p, s - q\rangle) \\ &= \langle p, q\rangle + \langle k(r - p), k(s - q)\rangle = \langle p + k(r - p), q + k(s - q)\rangle, \end{aligned}$$

čo je mrežový bod.

Pritom pre rôzne celé čísla k_1 a k_2 platí $\left|AP_{k_1}\right| \neq \left|AP_{k_2}\right|$, takže body P_{k_1} a P_{k_2} sú rôzne.

b)
   1. Na priamke s rovnicou $y = 0$ leží nekonečne veľa mrežových bodov tvaru $\langle p, 0\rangle$ (t. j. p je celé číslo).
   2. Všetky body priamky s rovnicou $y = \frac{1}{2}$ majú druhú súradnicu $\frac{1}{2}$, takže žiaden z nich nie je celé číslo.
   3. Na priamke $y = \sqrt{2}x$ leží mrežový bod $\langle 0, 0\rangle$. Nech tam leží iný mrežový bod $\langle p, q\rangle$, platí teda $q = \sqrt{2}p$. Ak by platilo $p = 0$, tak aj platilo aj $q = 0$, čo by bol spor s rôznosťou s $\langle 0, 0\rangle$. Platí teda $\frac{q}{p} = \sqrt{2}$, čo je spor s iracionalitou čísla $\sqrt{2}$.

31. ročník MO, úloha A-III-3

Nájdite príklad konvexnej množiny, ktorá obsahuje nekonečne veľa mrežových bodov, ale na každej priamke leží len konečne veľa mrežových bodov z tejto množiny.

Riešenie

Nech $\mathcal{M}$ je pás určený rovnobežkami s rovnicami $y = \sqrt{2}x$ a $y = \sqrt{2}x + 1$. Je to prienik dvoch polrovín určených týmito priamkami, takže je to konvexná množina.

Pre každé prirodzené číslo k priamka s rovnicou $x = k$ pretína množinu $\mathcal{M}$ v úsečke dĺžky 1, leží teda na nej aspoň jeden mrežový bod. Množina $\mathcal{M}$ teda obsahuje nekonečne veľa bodov.

Nech p je ľubovoľná priamka, ukážeme, že na p leží len konečne veľa mrežových bodov z množiny $\mathcal{M}$. Rozoberme prípady:

- Nech p je priamka, ktorá je rôznobežná s týmito rovnobežkami.

  Potom p pretína množinu $\mathcal{M}$ v úsečke, a teda obsahuje len konečne mnoho jej mrežových bodov

- Nech p je priamka, ktorá je rovnobežná s týmito rovnobežkami.

  Potom jej rovnica je $y = \sqrt{2}x + q$, kde $q \in [0, 1]$. Ukážeme, že na p leží najviac jeden mrežový bod: Nech na p ležia aspoň dva rôzne body $\langle x_1, y_1\rangle$ a $\langle x_2, y_2\rangle$, kde x_1, x_2, y_1, y_2 sú celé čísla. Potom

  $$y_1 = \sqrt{2}x_1 + q,$$

  $$y_2 = \sqrt{2}x_2 + q,$$

  z čoho $x_1 \neq x_2$ (inak by platilo aj $y_1 = y_2$, takže tieto body by neboli rôzne) a

  $$y_1 - y_2 = \left(\sqrt{2}x_1 + q\right) - \left(\sqrt{2}x_2 + q\right),$$

  $$y_1 - y_2 = \sqrt{2}x_1 - \sqrt{2}x_2,$$
  $$y_1 - y_2 = \sqrt{2}(x_1 - x_2),$$
  $$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \sqrt{2},$$

  čo je spor s iracionalitou $\sqrt{2}$.

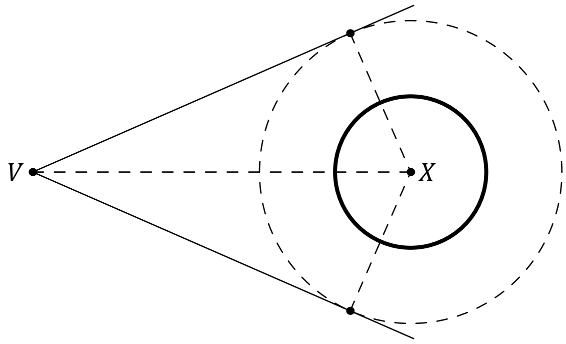
32. ročník MO, úloha A-I-3

Nech $\mathcal{M}$ je konvexná podmnožina roviny taká, že v každom kruhu s polomerom 1 leží aspoň jeden jej bod. Dokážte, že $\mathcal{M}$ je celá rovina.

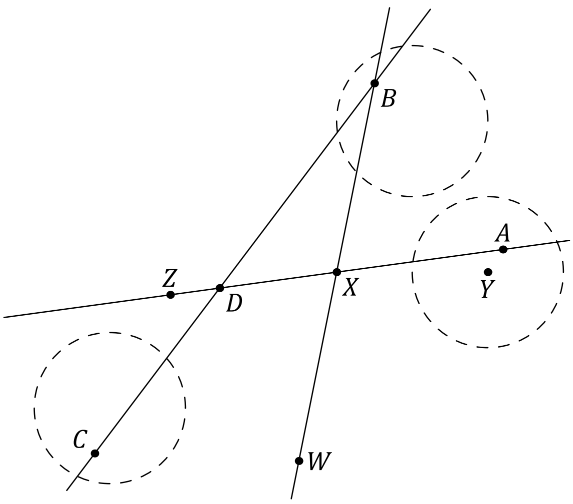
Riešenie

Najprv dokážeme pomocné tvrdenie:

- Vnútri každého konvexného uhla leží kruh s polomerom 1.
  - Nech V je vrchol tohto uhla a α jeho veľkosť. Nech X je bod ležiaci na jeho osi taký, že $|VX| = \frac{2}{\cos\frac{1}{2}\alpha}$. Potom kruh so stredom X a polomerom 2 leží v tomto uhle (a dotýka sa oboch jeho ramien), takže kruh so stredom X a polomerom 1 leží v jeho vnútri.



Nech X je ľubovoľný bod. Nech Y je ľubovoľný bod od neho vzdialený 2. Podľa zadania v kruhu so stredom Y a polomerom 1 leží bod z množiny $\mathcal{M}$, označme ho A. Keďže $|AY| \leq 1 < 2 = |XY|$, body A a X sú rôzne. Nech Z je bod súmerný s bodom A podľa bodu X. Podľa pomocného tvrdenia leží vnútri priamom uhle AZX kruh s polomerom 1 a v ňom podľa zadania bod z množiny $\mathcal{M}$, ktorý označíme B. Nech W je bod súmerný s bodom B podľa bodu X. Podľa pomocného tvrdenia leží v uhle ZXW kruh s polomerom 1 a v ňom podľa zadania bod z množiny $\mathcal{M}$, ktorý označíme C. Nech D je priesečník priamok BC a AX.



Keďže body B a C ležia vnútri rôznych polrovín určených priamkou AX, bod D leží na úsečke BC. Z konvexnosti $\mathcal{M}$ v nej preto leží aj D. Keďže bod C, a teda aj bod D, leží vnútri opačnej polroviny k polrovine určenej priamkou BX obsahujúcej A, bod X leží na úsečke AD. Z konvexnosti $\mathcal{M}$ v nej preto leží aj on.

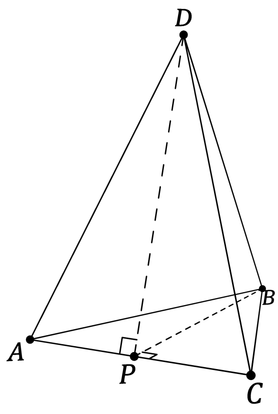
16. ročník MO, úloha A-I-4

Nech $ABCD$ je štvorsten taký, že $|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = 1$. Dokážte, že jeho objem je najviac $\frac{2\sqrt{3}}{27}$, a zistite, kedy sa táto hodnota nadobúda.

Riešenie 1

Nech P je stred hrany AC.

Keďže trojuholníky ACB a ADB sú zhodné a rovnoramenné so spoločnou základňou AC, P je spoločná päta ich výšok. Preto $|PB| = |PD|$ a priamky BP a DP sú kolmé na AC, a teda je na ňu kolmá aj ich rovina BPD.



Preto využitím Pytagorovej vety v trojuholníku APD

$$\text{objem}(ABCD) = \text{objem}(BPDA) + \text{objem}(BPDC) = \frac{1}{3} \cdot \text{obsah}(BPD) \cdot |A, BPD| + \frac{1}{3} \cdot \text{obsah}(BPD) \cdot |C, BPD|$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \text{obsah}(BPD) \cdot |AP| + \frac{1}{3} \cdot \text{obsah}(BPD) \cdot |CP| = \frac{1}{3} \cdot \text{obsah}(BPD) \cdot (|AP| + |CP|)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \text{obsah}(BPD) \cdot 2\,|AP| = \frac{2}{3} \cdot \text{obsah}(BPD) \cdot |AP| = \frac{2}{3}\,|AP| \left(\frac{1}{2} \cdot |PB| \cdot |PD| \cdot \sin|\sphericalangle BPD|\right)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot |AP| \cdot |PB| \cdot |PD| \cdot \sin|\sphericalangle BPD| = \frac{1}{3} \cdot |AP| \cdot |PD|^2 \cdot \sin|\sphericalangle BPD| \leq \frac{1}{3} \cdot |AP| \cdot |PD|^2,$$

pričom rovnosť nastáva práve v prípade $\sin|\sphericalangle BPD| = 1$, t. j. keď je uhol BPD pravý.

Nech $x = |AP|$. Keďže AP je odvesna trojuholníka APD, platí $0 < |AP| < |AD| = 1$, t. j. $x \in (0, 1)$. Potom

$$\text{objem}(ABCD) \leq \frac{1}{3} \cdot |AP| \cdot |PD|^2 = \frac{1}{3} \cdot |AP| \cdot (|AD|^2 - |AP|^2) = \frac{1}{3} \cdot x \cdot (1^2 - x^2) = \frac{1}{3}x(1 - x^2) = \frac{1}{3}(x - x^3).$$

Nech f je funkcia na $(0, 1)$ taká, že

$$f(x) = x - x^3.$$

Ukážeme, že jej maximum sa nadobúda v čísle $\frac{1}{\sqrt{3}}$: Nech $y = x - \frac{1}{\sqrt{3}}$, z čoho $x = \frac{1}{\sqrt{3}} + y$. Potom platí

$$f(x) = x - x^3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + y\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + y\right)^3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + y\right) - \left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + 3 \cdot y \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 3 \cdot y^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + y^3\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + y\right) - \left(\frac{1}{3\sqrt{3}} + y + \sqrt{3}y^2 + y^3 +\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}} - \sqrt{3}y^2 - y^3 = \frac{2}{3\sqrt{3}} - y^2(\sqrt{3} + y) \geq \frac{2}{3\sqrt{3}} - 0 = \frac{2}{3\sqrt{3}},$$

lebo $\sqrt{3} + y > \frac{1}{\sqrt{3}} + y = x > 0$, pričom rovnosť sa nadobúda v prípade $y = 0$, t. j. $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Vtedy

$$f(x) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{27}.$$

Zhrnutím teda dostávame

$$\text{objem}(ABCD) \le \frac{1}{3} \cdot f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{27},$$

pričom rovnosť sa nadobúda, práve keď je uhol BPD pravý a $|AP| = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Poznámka
Dá sa očakávať, že v optimálnom prípade vzhľadom na symetriu vrcholov platí $|BD| = |AC|$. A naozaj, podľa Pytagorovej vety v pravouhlom trojuholníku BPD platí

$$|BD| = \sqrt{|BP|^2 + |DP|^2} = \sqrt{|BP|^2 + |BP|^2} = \sqrt{2\,|BP|^2} = \sqrt{2} \cdot |BP| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{|AB|^2 - |AP|^2}$$

$$= \sqrt{2} \cdot \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = 2\frac{1}{\sqrt{3}} = 2\,|AP| = |AC|\,.$$

Poznámka
Keďže f je spojitá funkcia, k číslu $\frac{1}{\sqrt{3}}$, kde nadobúda svoje maximum, možno dospieť aj pomocou jej derivácií:

$$f'(x) = 0,$$
$$1 - 3x^2 = 0,$$
$$1 = 3x^2,$$
$$\frac{1}{3} = x^2,$$
$$\frac{1}{\sqrt{3}} = x$$

a

$$f''(x) = -6x,$$

takže

$$f''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -6 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} < 0,$$

takže v čísle $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ide o maximum.

Poznámka
Iný spôsob nájdenia maxima funkcie f využíva trik s funkciou sin: Platí totiž

$$\sin 3\alpha = \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin\alpha\cos 2\alpha + \cos\alpha\sin 2\alpha = \sin\alpha\left((\cos\alpha)^2 - (\sin\alpha)^2\right) + \cos\alpha(2\sin\alpha\cos\alpha)$$

$$= \sin\alpha(\cos\alpha)^2 - (\sin\alpha)^3 + 2\sin\alpha(\cos\alpha)^2 = 3\sin\alpha(\cos\alpha)^2 - (\sin\alpha)^3$$

$$= 3\sin\alpha\left(1 - (\sin\alpha)^2\right) - (\sin\alpha)^3 = \left(3\sin\alpha - 3(\sin\alpha)^3\right) - (\sin\alpha)^3 = 3\sin\alpha - 4(\sin\alpha)^3.$$

Ak $0 < x < 1$, tak $0 < \frac{\sqrt{3}}{2}x < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$. Nech $\varphi = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}x$, t. j. $x = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\varphi$. Potom platí

$$f(x) = x - x^3 = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\varphi - \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\varphi\right)^3 = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\varphi - \frac{8}{3\sqrt{3}}(\sin\varphi)^3$$

$$= \frac{2}{9\sqrt{3}}\left(3\sin\varphi - 4(\sin\varphi)^3\right) = \frac{2}{9\sqrt{3}}\sin 3\alpha \le \frac{2}{9\sqrt{3}},$$

pričom rovnosť sa nadobúda práve v prípade $3\alpha = 90°$, t. j. $\alpha = 30°$, t. j.

$$x = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin 30° = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 12 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Riešenie 2

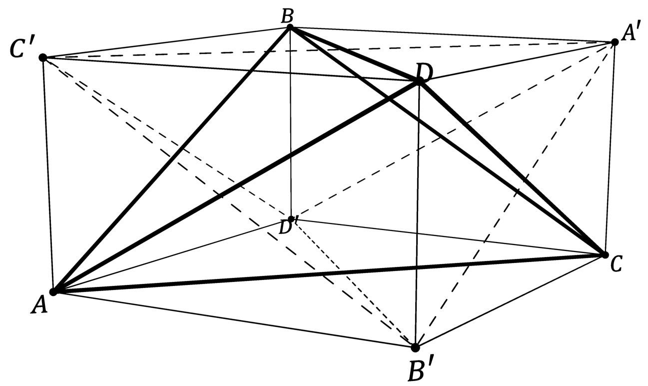
Nech A', B', C', D' sú postupne obrazy bodov A, B, C, D v súmernosti podľa stredu priečky hrán AC a BD, ktorej krajné body sú ich stredy. Potom štvoruholník $ACA'C'$ má rozpoľujúce sa uhlopriečky, je to teda rovnobežník, pričom jeho strany AC' a CA' sú rovnobežné a zhodné s touto priečkou. Rovnako sú s ňou rovnobežné a zhodné i úsečky $B'D$ a $D'B$.

To však znamená, že $AB'DC'$ je rovnobežník, a keďže $|B'C'| = |BC| = 1\,|AD|$, je to obdĺžnik.

Analogicky sú obdĺžniky aj $B'CAD'$, $CD'BA$ a $D'AC'B$, takže $AB'CD'C'DA'B$ je štvorboký hranol. Potom

$$|AB'| = \sqrt{|AD|^2 - |B'D|^2} = \sqrt{|CD|^2 - |B'D|^2} = |B'C|.$$

Analogicky $|B'C| = |CD'| = |DA'|$, jeho podstavy $AB'CD'$ a $C'DA'B$ sú teda kosoštvorce.



Nech v je jeho výška, Keďže $B'D$ je odvesna trojuholníka $AB'D$, platí $0 < |B'D| < |AD| = 1$, t. j. $v \in (0,1)$. Potom Potom platí

$$\begin{gathered}
\text{objem}(ABCD) \\
= \text{objem}(AB'CD'C'DA'B) - (\text{objem}(AB'CD) + \text{objem}(CD'AB) + \text{objem}(DA'BC) + \text{objem}(BC'DA)) \\
= \text{obsah}(AB'CD') \cdot v \\
- \left(\frac{1}{3} \cdot \text{obsah}(AB'C) \cdot |B'D| + \frac{1}{3} \cdot \text{obsah}(CD'A) \cdot |D'B| + \frac{1}{3} \cdot \text{obsah}(DA'B) \cdot |A'C| + \frac{1}{3} \cdot \text{obsah}(BC'D) \cdot |C'A|\right) \\
= \text{obsah}(AB'CD') \cdot v \\
- \left(\frac{1}{3} \cdot \text{obsah}(AB'C) \cdot v + \frac{1}{3} \cdot \text{obsah}(CD'A) \cdot v + \frac{1}{3} \cdot \text{obsah}(DA'B) \cdot v + \frac{1}{3} \cdot \text{obsah}(BC'D) \cdot v\right) \\
= \text{obsah}(AB'CD') \cdot v - \frac{1}{3} \cdot ((\text{obsah}(AB'C) + \text{obsah}(CD'A)) + (\text{obsah}(DA'B) + \text{obsah}(BC'D)))) \cdot v \\
= \text{obsah}(AB'CD') \cdot v - \frac{1}{3} \cdot (\text{obsah}(AB'CD') + \text{obsah}(DA'BC')) \cdot v \\
= \text{obsah}(AB'CD') \cdot v - \frac{1}{3} \cdot (\text{obsah}(AB'CD') + \text{obsah}(AB'CD')) \cdot v \\
= \text{obsah}(AB'CD') \cdot v - \frac{2}{3} \cdot \text{obsah}(AB'CD') \cdot v = \frac{1}{3} \cdot \text{obsah}(AB'CD') \cdot v.
\end{gathered}$$

Pritom

$$\begin{gathered}
\text{obsah}(AB'CD') = |AB'| \cdot |AD'| \cdot \sin|\sphericalangle B'AD'| = |AB'| \cdot |AB'| \cdot \sin|\sphericalangle B'AD'| = |AB'|^2 \cdot \sin|\sphericalangle B'AD'| \\
= \left(|AD|^2 - |DB'|^2\right) \cdot \sin|\sphericalangle B'AD'| = \left(1^2 - v^2\right) \cdot \sin|\sphericalangle B'AD'| = \left(1 - v^2\right) \cdot \sin|\sphericalangle B'AD'|,
\end{gathered}$$

takže

$$\text{objem}(ABCD) = \frac{1}{3} \cdot \left(\left(1 - v^2\right) \cdot \sin|\sphericalangle B'AD'|\right) \cdot v = \frac{1}{3} v\left(1 - v^2\right) \cdot \sin|\sphericalangle B'AD'| \leq \frac{1}{3} v\left(1 - v^2\right) = \frac{1}{3}\left(v - v^3\right),$$

pričom rovnosť sa nadobúda práve v prípade $\sin|\sphericalangle B'AD'| = 1$, t. j. keď je uhol $B'AD'$ pravý, čiže keď ide o kváder.

Nech f je funkcia na $(0,1)$ taká, že

$$f(x) = x - x^3.$$

Ukážeme, že jej maximum sa nadobúda v čísle $\frac{1}{\sqrt{3}}$: Nech $y = x - \frac{1}{\sqrt{3}}$, z čoho $x = \frac{1}{\sqrt{3}} + y$. Potom platí

$$f(x) = x - x^3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + y\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + y\right)^3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + y\right) - \left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + 3 \cdot y \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 3 \cdot y^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + y^3\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + y\right) - \left(\frac{1}{3\sqrt{3}} + y + \sqrt{3}y^2 + y^3 +\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}} - \sqrt{3}y^2 - y^3 = \frac{2}{3\sqrt{3}} - y^2(\sqrt{3} + y) \geq \frac{2}{3\sqrt{3}} - 0 = \frac{2}{3\sqrt{3}},$$

lebo $\sqrt{3} + y > \frac{1}{\sqrt{3}} + y = x > 0$, pričom rovnosť sa nadobúda v prípade $y = 0$, t. j. $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Vtedy

$$f(x) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{27}.$$

Zhrnutím teda dostávame

$$\text{objem}(ABCD) \geq \frac{1}{3} \cdot f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{27},$$

pričom rovnosť sa nadobúda, práve keď je uhol $B'AD'$ pravý, a $|B'D| = \frac{1}{\sqrt{3}}$, t. j. keď štvorstenu $ABCD$ možno opísať kváder s výškou $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Poznámka

Porovnaním oboch výsledkov si môžeme všimnúť, že výška tohto kvádra je rovná polovici dĺžky uhlopriečky jeho podstavy.