10. ročník MO, úloha C-I-5

Vnútri daného ostrého uhla leží bod C. Vnútri oboch jeho ramien nájdite body A, resp. B tak, aby trojuholník ABC mal čo najmenší obvod.

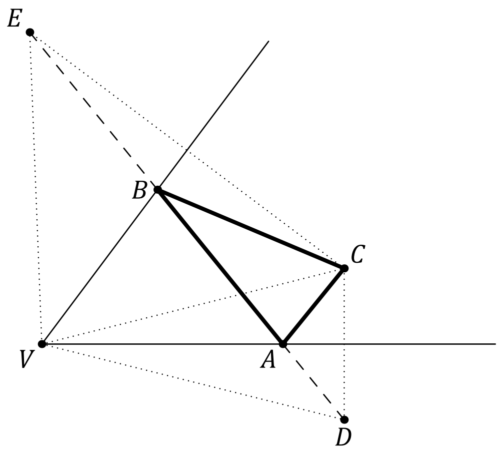
Riešenie

Nech A a B sú vyhovujúce body.

Vrchol uvažovaného uhla označme V. Nech D a E sú obrazy bodu C podľa priamok VA a VB. Potom

$$\text{obvod}(ABC) = |CA| + |AB| + |BC| = |DA| + |AB| + |BE| \geq |DE|\,,$$

pričom rovnosť sa dosahuje práve vtedy, keď A a B ležia na úsečke DE.



Keďže uhol AVB je ostrý, platí

$$|\sphericalangle DVE| = |\sphericalangle CVD| + |\sphericalangle CVE| = 2\,|\sphericalangle CVA| + 2\,|\sphericalangle CVB| = 2(|\sphericalangle CVA| + |\sphericalangle CVB|) = 2\,|\sphericalangle AVB| < 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ,$$

t. j. uhol DVE je konvexný, takže body A a B naozaj ležia na ramenách daného uhla.

Úloha má teda práve jedno riešenie.

12. ročník MO, úloha B-I-4

Sú dané tri kružnice s polomermi dĺžok 1, 2, 3, pričom každé dve z nich majú vonkajší dotyk. Určte, koľko kružníc sa zároveň zvonka dotýka všetkých troch týchto kružníc, a vypočítajte ich polomery.

Riešenie

Stredy týchto troch kružníc označme postupne S_1, S_2, S_3. Keďže sa všetky navzájom dotýkajú, platí

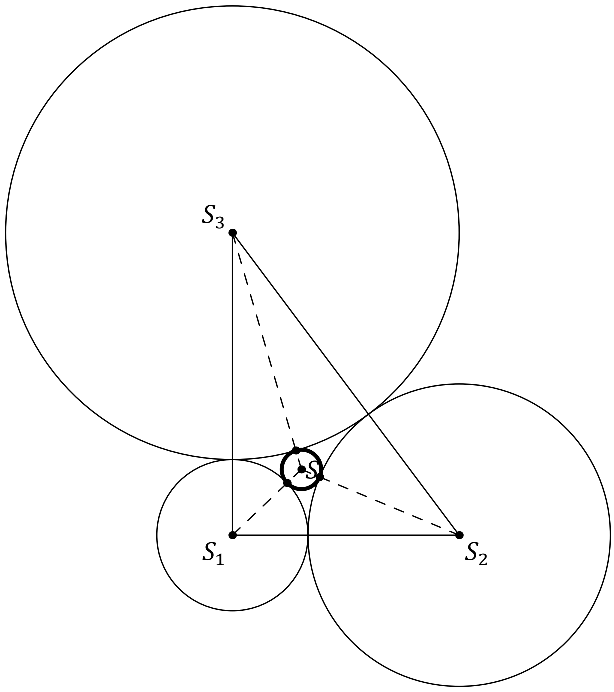
$$|S_1S_2| = 1 + 2 = 3,$$

$$|S_2S_3| = 2 + 3 = 5,$$

$$|S_3S_1| = 3 + 1 = 4.$$

Trojuholník $S_1S_2S_3$ je teda pravouhlý s pravým uhlom $S_2S_1S_3$.

Zaveďme teda pravouhlú súradnicovú sústavu, ktorej počiatok je S_1 a kladné polosi sú polpriamky S_1S_2 a S_1S_3. Platí teda $S_1 = \langle 0, 0\rangle$, $S_2 = \langle 4, 0\rangle$, $S_3 = \langle 0, 3\rangle$. Nech S je stred hľadanej kružnice a r jej polomer a nech $S = \langle x, y\rangle$.



Keďže sa hľadaná kružnica dotýka všetkých troch zadaných kružníc, platí

$$r + 1 = |SS_1| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$r + 2 = |SS_2| = \sqrt{(3 - x)^2 + y^2},$$

$$r + 3 = |SS_3| = \sqrt{x^2 + (4 - y)^2}.$$

Z toho

$$r^2 + 2r + 1 = (r + 1)^2 = x^2 + y^2,$$

$$r^2 + 4r + 4 = (r + 2)^2 = (3 - x)^2 + y^2 = (9 - 6x + x^2) + y^2 = x^2 + y^2 - 6x + 9,$$

$$r^2 + 6r + 9 = (r + 3)^2 = x^2 + (4 - y)^2 = x^2 + (16 - 8y + y^2) = x^2 + y^2 - 8y + 16,$$

a teda

$$x^2 - y^2 - r^2 = 2r + 1,$$

$$x^2 - y^2 - r^2 = 4r + 6x - 5,$$

$$x^2 - y^2 - r^2 = 6r + 8y - 7,$$

Z druhého a prvého vzťahu

$$4r + 6x - 5 = 2r + 1,$$

$$6x = 6 - 2r,$$
$$x = 1 - \frac{r}{3},$$

a z tretieho a prvého

$$6r + 8y - 7 = 2r + 1 = ,$$
$$8y = 8 - 4r,$$
$$y = 1 - \frac{r}{2}.$$

Po dosadení do vzťahu $r^2 + 2r + 1 = x^2 + y^2$ dostávame

$$r^2 + 2r + 1 = \left(1 - \frac{r}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{r}{2}\right)^2 = \left(1 - \frac{2r}{3} + \frac{r^2}{9}\right) + \left(1 - r + \frac{r^2}{4}\right),$$
$$\left(1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{4}\right)r^2 + \left(2 + \frac{2}{3} + 1\right)r + (1 - 1 - 1) = 0,$$
$$\frac{36 - 4 - 9}{36} \cdot r^2 + \frac{6 + 2 + 3}{3} \cdot r - 1 = 0,$$
$$\frac{23}{36} \cdot r^2 + \frac{11}{3} \cdot r - 1 = 0,$$
$$23r^2 + 132 \cdot r - 36 = 0,$$
$$r \in \left\{\frac{-132 - \sqrt{132^2 - 4 \cdot 23 \cdot (-36)}}{2 \cdot 23}, \frac{-132 + \sqrt{132^2 - 4 \cdot 23 \cdot (-36)}}{2 \cdot 23}\right\}.$$

Keďže prvý napísaný prvok tejto množiny je zrejme záporný,

$$r = \frac{-132 + \sqrt{132^2 - 4 \cdot 23 \cdot (-36)}}{2 \cdot 23} = \frac{-132 + \sqrt{17424 + 3312}}{46}$$
$$= \frac{-132 + \sqrt{20736}}{46} = \frac{-132 + 144}{46} = \frac{12}{46} = \frac{6}{23}.$$

Potom

$$x = 1 - \frac{\frac{6}{23}}{3} = 1 - \frac{2}{23} = \frac{23 - 2}{23} = \frac{21}{23},$$
$$y = 1 - \frac{\frac{6}{23}}{2} = 1 - \frac{3}{23} = \frac{23 - 3}{23} = \frac{20}{23},$$

platí teda $S = \left\langle \frac{20}{23}, \frac{21}{23} \right\rangle$. Vtedy

$$|SS_1| = \sqrt{\left(\frac{21}{23}\right)^2 + \left(\frac{20}{23}\right)^2} = \sqrt{\frac{21^2}{23^2} + \frac{20^2}{23^2}} = \sqrt{\frac{21^2 + 20^2}{23^2}}$$
$$= \frac{\sqrt{441 + 400}}{23} = \frac{\sqrt{841 + 400}}{23} = \frac{29}{23} = \frac{6 + 23}{23} = \frac{6}{23} + 1 = r + 1,$$
$$|SS_2| = \sqrt{(3 - x)^2 + y^2} = \sqrt{\left(3 - \frac{21}{23}\right)^2 + \left(\frac{20}{23}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{69 - 21}{23}\right)^2 + \left(\frac{20}{23}\right)^2} = \sqrt{\frac{48^2}{23^2} + \frac{20^2}{23^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{48^2 + 20^2}{23^2}} = \sqrt{\frac{2304 + 400}{23^2}} = \frac{\sqrt{2704}}{23} = \frac{\sqrt{841 + 400}}{23} = \frac{52}{23} = \frac{6 + 46}{23} = \frac{6}{23} + 2 = r + 2,$$
$$|SS_3| = \sqrt{x^2 + (4 - y)^2} = \sqrt{\left(\frac{21}{23}\right)^2 + \left(4 - \frac{20}{23}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{21}{23}\right)^2 + \left(\frac{92 - 20}{23}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{21^2}{23^2} + \frac{72^2}{23^2}} = \sqrt{\frac{21^2 + 72^2}{23^2}} = \frac{\sqrt{441 + 5184}}{23} = \frac{\sqrt{5625}}{23} = \frac{75}{23} = \frac{6 + 69}{23} = \frac{6}{23} + 3 = r + 3,$$

takže kružnica so stredom S a polomerom r má naozaj vonkajší dotyk s troma zadanými kružnicami.

Existuje teda len jedna vyhovujúca kružnica, jej stred je $\left\langle \frac{21}{23}, \frac{20}{23} \right\rangle$ a polomer $\frac{6}{23}$.

Poznámka

Úlohu možno upraviť takto:

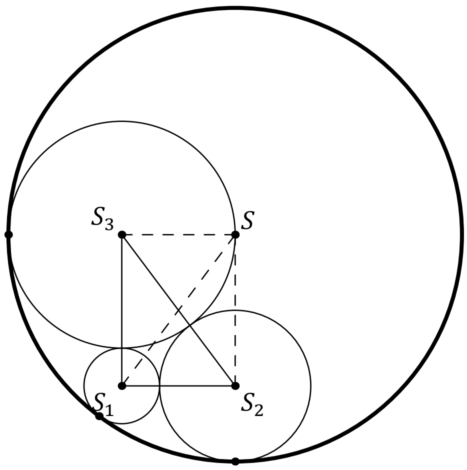
- Sú dané tri kružnice s polomermi dĺžok 1, 2, 3, pričom každé dve z nich majú vonkajší dotyk. Určte, koľko kružníc sa zároveň zvnútra dotýka všetkých troch týchto kružníc, a vypočítajte ich polomery.
  - Stredy týchto troch kružníc označme postupne S_1, S_2, S_3. Keďže sa všetky navzájom dotýkajú, platí

$$|S_1S_2| = 1 + 2 = 3,$$

$$|S_2S_3| = 2 + 3 = 5,$$

$$|S_3S_1| = 3 + 1 = 4.$$

Trojuholník $S_1S_2S_3$ je teda pravouhlý s pravým uhlom $S_2S_1S_3$.
Zaveďme teda pravouhlú súradnicovú sústavu, ktorej počiatok je S_1 a kladné polosi sú polpriamky S_1S_2 a S_1S_3. Platí teda $S_1 = \langle 0, 0 \rangle$, $S_2 = \langle 4, 0 \rangle$, $S_3 = \langle 0, 3 \rangle$. Nech S je stred hľadanej kružnice a r jej polomer a nech $S = \langle x, y \rangle$.



Keďže sa hľadaná kružnica dotýka všetkých troch zadaných kružníc, platí

$$r - 1 = |SS_1| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$r - 2 = |SS_2| = \sqrt{(3 - x)^2 + y^2},$$

$$r - 3 = |SS_3| = \sqrt{x^2 + (4 - y)^2}.$$

Z toho

$$r^2 - 2r + 1 = (r - 1)^2 = x^2 + y^2,$$

$$r^2 - 4r + 4 = (r - 2)^2 = (3 - x)^2 + y^2 = (9 - 6x + x^2) + y^2 = x^2 + y^2 - 6x + 9,$$

$$r^2 - 6r + 9 = (r - 3)^2 = x^2 + (4 - y)^2 = x^2 + (16 - 8y + y^2) = x^2 + y^2 - 8y + 16,$$

a teda

$$x^2 - y^2 - r^2 = -2r + 1,$$

$$x^2 - y^2 - r^2 = -4r + 6x - 5,$$

$$x^2 - y^2 - r^2 = -6r + 8y - 7,$$

Z druhého a prvého vzťahu

$$-4r + 6x - 5 = -2r + 1,$$

$$6x = 6 + 2r,$$

$$x = 1 + \frac{r}{3},$$

a z tretieho a prvého

$$-6r + 8y - 7 = -2r + 1 = ,$$

$$8y = 8 + 4r,$$

$$y = 1 + \frac{r}{2}.$$

Po dosadení do vzťahu $r^2 - 2r + 1 = x^2 + y^2$ dostávame

$$r^2 - 2r + 1 = \left(1 + \frac{r}{3}\right)^2 + \left(1 + \frac{r}{2}\right)^2 = \left(1 + \frac{2r}{3} + \frac{r^2}{9}\right) + \left(1 + r + \frac{r^2}{4}\right),$$

$$\left(1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{4}\right)r^2 - \left(2 + \frac{2}{3} + 1\right)r + (1 - 1 - 1) = 0,$$

$$\frac{36 - 4 - 9}{36} \cdot r^2 - \frac{6 + 2 + 3}{3} \cdot r - 1 = 0,$$

$$\frac{23}{36} \cdot r^2 - \frac{11}{3} \cdot r - 1 = 0,$$

$$23r^2 - 132 \cdot r - 36 = 0,$$

$$r \in \left\{\frac{-(-132) - \sqrt{(-132)^2 - 4 \cdot 23 \cdot (-36)}}{2 \cdot 23}, \frac{-(-132) + \sqrt{(-132)^2 - 4 \cdot 23 \cdot (-36)}}{2 \cdot 23}\right\},$$

$$r \in \left\{\frac{132 - \sqrt{132^2 + 4 \cdot 23 \cdot 36}}{46}, \frac{132 + \sqrt{132^2 + 4 \cdot 23 \cdot 36}}{46}\right\}.$$

Keďže prvý napísaný prvok tejto množiny je zrejme záporný,

$$r = \frac{132 + \sqrt{132^2 + 4 \cdot 23 \cdot 36}}{46} = \frac{132 + \sqrt{17424 + 3312}}{46} = \frac{132 + \sqrt{20736}}{46} = \frac{132 + 144}{46} = \frac{276}{46} = 6.$$

Potom

$$x = 1 + \frac{6}{3} = 1 + 2 = 3,$$

$$y = 1 + \frac{6}{2} = 1 + 3 = 4,$$

platí teda $S = \langle 3, 4 \rangle$. Vtedy

$$|SS_1| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 = 6 - 1 = r - 1,$$

$$|SS_2| = \sqrt{(3 - x)^2 + y^2} = \sqrt{(3 - 3)^2 + 4^2} = \sqrt{0^2 + 4^2} = \sqrt{0 + 16} = \sqrt{16} = 4 = 6 - 2 = r - 2,$$

$$|SS_3| = \sqrt{x^2 + (4 - y)^2} = \sqrt{3^2 + (4 - 4)^2} = \sqrt{3^2 + 0^2} = \sqrt{9 + 0} = \sqrt{9} = 3 = 6 - 3 = r - 3,$$

takže kružnica so stredom S a polomerom r má nazoaj vnútroný dotyk s troma zadanými kružnicami. Existuje teda len jedna vyhovujúca kružnica, jej stred je $\langle 3, 4 \rangle$ a polomer 6.

Ako vidieť, stredy tejto kružnice a troch zadaných kružníc sú vrcholmi obdĺžnika.

12. ročník MO, úloha C-I-4

Nájdite všetky trojice prirodzených čísel, ktorých súčet sa rovná ich súčinu.

Riešenie

Nech (x, y, z) je vyhovujúca trojica, pričom bez ujmy na všeobecnosti $x \leq y \leq z$. Platí teda

$$xyz = x + y + z \leq 3z,$$

$$0 \leq 3z - xyz = (3 - xy)z.$$

Rozoberme prípady:

- Nech $z = 0$.
  Potom podľa predpokladu $x \leq y \leq 0$, takže $x = y = z = 0$.
  V takom prípade
  $$x + y + z = 0 + 0 + 0 = 0 = 0 \cdot 0 \cdot 0 = xyz,$$
  takže trojica $(0, 0, 0)$ vyhovuje.
- Nech $z > 0$.
  Potom
  $$0 < 3 - xy,$$
  $$xy < 3,$$
  $$xy \leq 2.$$
  Potom
  $$x^2 \leq xy \leq 2,$$
  takže
  $$x \leq 1.$$
  Rozoberme prípady:
  - Nech $x = 0$.
    Potom však
    $$0 = 0yz = xyz = x + y + z \geq z > 0,$$
    čo je spor.
    Tento prípad teda nevyhovuje.
  - Nech $x = 1$.
    Potom
    $$1 \leq y = 1y = xy \leq 2.$$
    Rozoberme prípady:
    - Nech $y = 1$.
      Potom však
      $$z = 1 \cdot 1 \cdot z = xyz = x + y + z = 1 + 1 + z = 2 + z,$$
      čo je spor.
      Tento prípad teda nevyhovuje.
    - Nech $y = 2$.
      Potom
      $$1 + 2 + z = 1 \cdot 2 \cdot z,$$
      $$3 + z = 2z,$$
      $$3 = z.$$
      V takom prípade
      $$x + y + z = 1 + 2 + 3 = 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = xyz,$$
      takže trojica $(1, 2, 3)$ vyhovuje.

Zhrnutím dostávame, že vyhovujúce trojice sú $(0, 0, 0)$ a $(1, 2, 3)$ so všetkými permutáciami.

12. ročník MO, úloha C-II-3

Žiak mal vypočítať aritmetický priemer daných čísel a, b, c, d. Počítal ho takto: Najprv našel aritmetický priemer p čísel a, b, potom aritmetický priemer q čísel p, c a nakoniec aritmetický priemer čísel q, d.

a) Ukážte, že tento postup nie je správny.

b) Nájdite všetky štvorice (a, b, c, d) také, že žiak napriek tomuto chybnému postupu dostane správny výsledok.

Riešenie

Označme žiakov výsledok r a správny výsledok s.

a) Nech $a = b = c = 0$ a $d = 4$. Potom

$$p = \frac{a+b}{2} = \frac{0+0}{2} = \frac{0}{2} = 0,$$

z toho

$$q = \frac{p+c}{2} = \frac{0+0}{2} = \frac{0}{2} = 0,$$

takže

$$r = \frac{q+d}{2} = \frac{0+4}{2} = \frac{4}{2} = 2,$$

avšak

$$s = \frac{a+b+c+d}{4} = \frac{0+0+0+4}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

b) Platí

$$r = \frac{q+d}{2} = \frac{\frac{p+c}{+}d}{2} = \frac{\frac{\frac{a+b}{2}+c}{2}+d}{2} = \frac{\frac{\frac{a+b+2c}{2}}{2}+d}{2} = \frac{\frac{a+b+2c}{4}+d}{2} = \frac{\frac{a+b+2c+4d}{4}}{2} = \frac{a+b+2c+4d}{8}.$$

Podľa predpokladu teda

$$r = s,$$

t. j. ekvivalentne

$$\frac{a+b+2c+4d}{8} = \frac{a+b+c+d}{4},$$

$$a + b + 2c + 4d = 2(a + b + c + d),$$

$$a + b + 2c + 4d = 2a + 2b + 2c + 2d,$$

$$2d = a + b.$$

$$d = \frac{a+b}{2}.$$

Hľadané štvorice sú teda práve $\left(a, b, c, \frac{a+b}{2}\right)$, kde a, b, c sú ľubovoľné reálne čísla.

12. ročník MO, úloha D-I-2

Určte trojciferné číslo také, že ak pred neho napíšeme rovnakú cifru, akú má na mieste jednotiek, dostaneme číslo, ktoré je o 18 menší než jeho 7-násobok.

Riešenie

Nech je hľadané číslo $\overline{xyz}$, kde $0 < x \leq 9$, $0 \leq y \leq 9$ a $0 \leq z \leq 9$. Potom platí

$$\overline{zxyz} = 7 \cdot \overline{xyz} - 18,$$

t. j.

$$1000z + 100x + 10y + z = 7(100x + 10y + z) - 18,$$

$$1000z + 100x + 10y + z = (700x + 70y + 7z) - 18,$$

$$18 + 994z = 600x + 60y,$$

$$9 + 497z = 300x + 30y,$$

$$9 - 3z = 300x + 30y - 500z,$$

$$3(3 - z) = 10(30x + 3y - 50z).$$

Z toho máme

$$10 \mid 3(3 - z),$$

$$10 \mid 3 - z,$$

a teda

$$z = 3.$$

Z toho máme

$$9 + 497 \cdot 3 = 300x + 30y,$$

$$3 + 497 = 100x + 10y,$$

$$500 = 100x + 10y,$$

$$50 = 10x + y.$$

$$50 = \overline{xy},$$

a teda

$$\overline{xyz} = 503.$$

A naozaj, platí

$$7 \cdot 503 - 18 = 3521 - 18 = 3503.$$