30. ročník MO, úloha Z-II-4

Nech $ABCDEF$ je pravidelný šesťuholník. Nech na jeho stranách AB, BC, CD, DE, EF, FA ležia postupne body G, H, I, J, K, L také, že

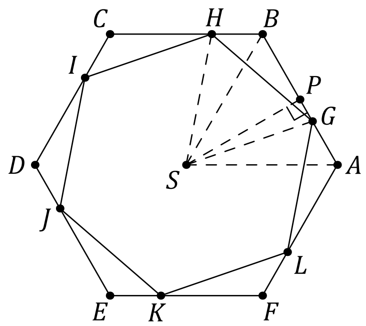
$$|AG| = |BH| = |CI| = |DJ| = |EK| = |FL| = \frac{1}{3}\,|AB|\,.$$

Vypočítajte pomer obsahov šesťuholníkov $GHIJKL$ a $ABCDEF$.

Riešenie 1

Nech S je stred $ABCDEF$. Keďže $ABCDEF$ je samodružný v otočení okolo S o 60°, aj $GHIJKL$ je samodružný v tomto otočení. Je to teda tiež pravidelný šesťuholník so stredom S.

Nech P je stred úsečky AB, potom SP je výška trojuholníka ABS.



Podľa Pytagorovej vety v trojuholníkoch SPG a SPA platí

$$|GH| = |GS| = \sqrt{|SP|^2 + |PG|^2} = \sqrt{\left(|SA|^2 - |AP|^2\right) + (|AP| - |AG|)^2}$$

$$= \sqrt{\left(|AB|^2 - \left(\frac{1}{2}\,|AB|\right)^2\right) + \left(\frac{1}{2}\,|AB| - \frac{1}{3}\,|AB|\right)^2} = \sqrt{|AB|^2 - \left(\frac{1}{2}\,|AB|\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\,|AB|\right)^2}$$

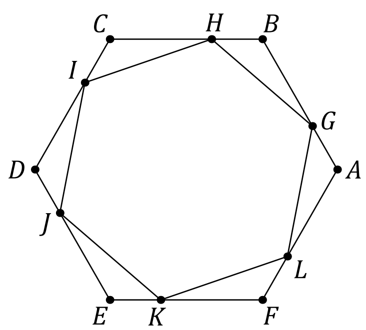
$$= \sqrt{|AB|^2 - \frac{1}{4}\,|AB|^2 + \frac{1}{36}\,|AB|^2} = \sqrt{|AB|^2\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{36}\right)}$$

$$= |AB|\,\sqrt{\frac{36 - 9 + 1}{36}} = |AB|\,\sqrt{\frac{28}{36}} = |AB|\,\sqrt{\frac{7}{9}} = |AB|\,\frac{\sqrt{7}}{3}.$$

Koeficient podobnosti šesťuholníkov $GHIJKL$ a $ABCDEFG$ je teda $\sqrt{\frac{7}{9}}$, takže pomer ich obsahov je $\frac{7}{9}$.

Riešenie 2

Keďže $ABCDEF$ je samodružný v otočení okolo svojho stredu o 60°, aj $GHIJKL$ je samodružný v tomto otočení. Je to teda tiež pravidelný šesťuholník s tým sitým stredom.



Podľa kosínusovej vety v trojuholníku GBH platí

$$|GH| = \sqrt{|BG|^2 + |BH|^2 - 2 \cdot |BG| \cdot |BH| \cdot \cos|\sphericalangle PBH|}$$

$$= \sqrt{(|AB| - |AG|)^2 + |AG|^2 - 2 \cdot (|AB| - |AG|) \cdot |AG| \cdot \cos|\sphericalangle ABC|}$$

$$= \sqrt{\left(|AB| - \frac{1}{3}|AB|\right)^2 + \left(\frac{1}{3}|AB|\right)^2 - 2 \cdot \left(|AB| - \frac{1}{3}|AB|\right) \cdot \left(\frac{1}{3}|AB|\right) \cdot \cos 120°}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2}{3}|AB|\right)^2 + \left(\frac{1}{3}|AB|\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}|AB|\right) \cdot \left(\frac{1}{3}|AB|\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{9}|AB|^2 + \frac{1}{9}|AB|^2 + \frac{2}{9}|AB|^2} = \sqrt{\frac{7}{9}|AB|^2} = |AB|\sqrt{\frac{7}{9}} = |AB|\frac{\sqrt{7}}{3}.$$

Koeficient podobnosti šesťuholníkov $GHIJKL$ a $ABCDEFG$ je teda $\sqrt{\frac{7}{9}}$, takže pomer ich obsahov je $\frac{7}{9}$.

30. ročník MO, úloha Z-III-4

Nech $ABCDEF$ je pravidelný šesťuholník. Nech na jeho stranách AB, BC, CD, DE, EF, FA ležia postupne body G, H, I, J, K, L také, že

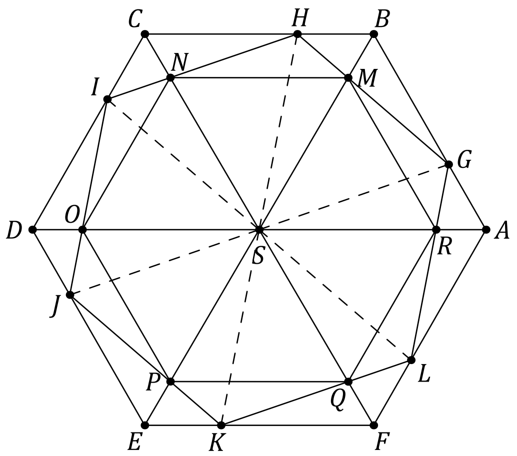
$$|AG| = |BH| = |CI| = |DJ| = |EK| = |FL|.$$

Nech M, N, O, P, Q, R sú postupne priesečníky GH s BE, HI s CF, IJ s DA, JK s EB, KL s FC, LG s AD. Dokážte, že

$$\text{obsah}(GHIJKL)^2 = \text{obsah}(ABCDEF) \cdot \text{obsah}(MNOPQR).$$

Riešenie 1

Nech S je stred $ABCDEF$. Keďže $ABCDEF$ je samodružný v otočení okolo S o 60°, aj $GHIJKL$ je samodružný v tomto otočení. Je to teda tiež pravidelný šesťuholník so stredom S. Keďže aj on aj uhlopriečky $ABCDEF$ sú súmerné podľa stredu S, aj $MNOPQR$ je pravidelný šesťuholník so stredom S.



Body R a M ležia na polpriamkach SA, resp. SB, takže úsečky RM a AB sú rovnoľahlé so stredom S, a teda aj rovnobežné. Preto sú uhly RMG a MGB čiže HGB striedavé, a teda zhodné. Oba uhly RGM čiže LGH a HBG čiže CBA majú 120°, preto sú zhodné. To podľa vety *uu* znamená, že trojuholníky RGM a HBG sú pri tomto poradí vrcholov podobné. Preto platí

$$\frac{|SA|}{|AG|} = \frac{|AB|}{|AG|} = \frac{|AG|+|GB|}{|AG|} = 1+\frac{|GB|}{|AG|} = 1+\frac{|GB|}{|BH|} = 1+\frac{|MG|}{|GR|} = \frac{|GR|+|MG|}{|GR|} = \frac{|HM|+|MG|}{|GR|} = \frac{|HG|}{|GR|} = \frac{|SG|}{|GR|},$$

a keďže

$$|\sphericalangle SAG| = |\sphericalangle SAB| = 60° = |\sphericalangle SGL| = |\sphericalangle SGR|,$$

trojuholníky SAG a SGR sú pri tomto poradí vrcholov podľa vety *sus* podobné. Z toho

$$\frac{\text{obsah}(GHIJKL)}{\text{obsah}(MNOPQR)} = \left(\frac{|GH|}{|RM|}\right)^2 = \left(\frac{|SG|}{|SR|}\right)^2 = \left(\frac{|SA|}{|SG|}\right)^2 = \left(\frac{|AB|}{|GH|}\right)^2 = \frac{\text{obsah}(ABCDEF)}{\text{obsah}(GHIJKL)},$$

takže

$$\text{obsah}(GHIJKL)^2 = \text{obsah}(ABCDEF) \cdot \text{obsah}(MNOPQR).$$

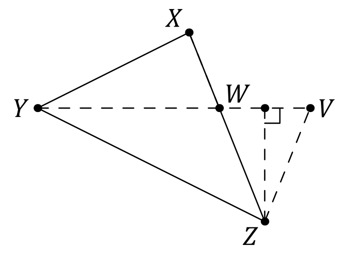
Riešenie 2

Najprv dokážeme pomocné tvrdenie:

- Nech veľnosť uhla XYZ je z $(0°, 180°)$ a W je priesečník jeho osi s úsečkou XZ. Potom

$$\frac{|XW|}{|ZW|} = \frac{|XY|}{|ZY|}.$$

  - Nech V je bod súmerný s bodom W podľa päty kolmice z bodu Z na os uhla XYZ.



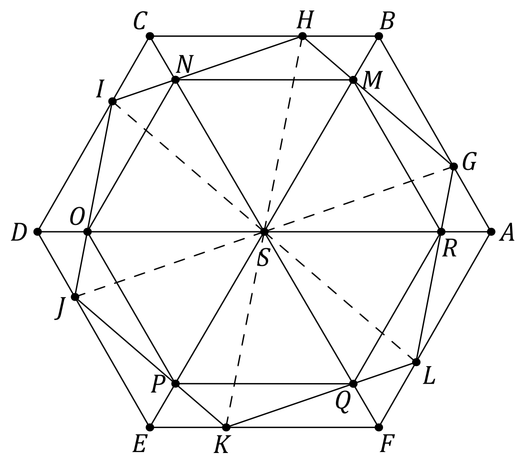
Potom platí $|\sphericalangle XYW| = |\sphericalangle ZYV|$ a

$$|\sphericalangle XWY| = |\sphericalangle ZWV| = |\sphericalangle ZVW| = |\sphericalangle ZVY|,$$

takže trojuholníky XYW a ZYV sú pri tomto poradí vrcholov podobné. Z toho

$$\frac{|XW|}{|ZW|} = \frac{|XW|}{|ZV|} = \frac{|XY|}{|ZY|}.$$

Nech S je stred $ABCDEF$. Keďže $ABCDEF$ je samodružný v otočení okolo S o 60°, aj $GHIJKL$ je samodružný v tomto otočení. Je to teda tiež pravidelný šesťuholník so stredom S. Keďže aj on aj uhlopriečky $ABCDEF$ sú súmerné podľa stredu S, aj $MNOPQR$ je pravidelný šesťuholník so stredom S.



Keďže BS je os uhla ABC čiže GBH, podľa pomocného tvrdenia platí

$$\frac{|GM|}{|HM|} = \frac{|GB|}{|HB|} = \frac{|GB|}{|GA|} = \frac{|GA|}{|GB|}.$$

V podobnosti, ktorá prevádza šesťuholník $ABCDEF$ do šesťuholníka $HGLKJI$ sa potom zobrazí bod G do bodu M, a teda šesťuholník $HGLKJI$ do šesťuholníka $MNOPPQ$. Platí preto

$$\frac{\text{obsah}(GHIJKL)}{\text{obsah}(MNOPQR)} = \left(\frac{|GH|}{|RM|}\right)^2 = \left(\frac{|AB|}{|GH|}\right)^2 = \frac{\text{obsah}(ABCDEF)}{\text{obsah}(GHIJKL)},$$

takže

$$\text{obsah}(GHIJKL)^2 = \text{obsah}(ABCDEF) \cdot \text{obsah}(MNOPQR).$$

30. ročník MO, úloha B-I-5

Nájdite obdĺžnik opísaný pravidelnému šesťuholníku so stranou dĺžky 1, ktorý má

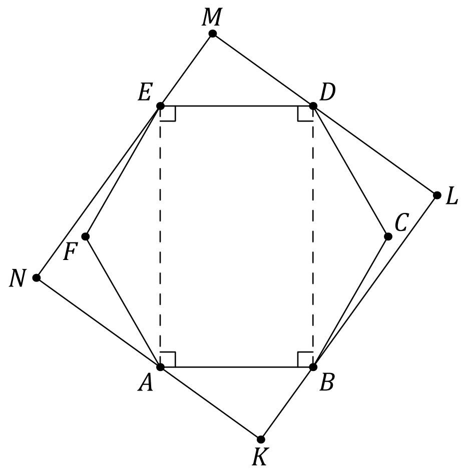
a) najväčší,

b) najmenší

obsah a určte pomer jeho obsahu a obsahu tohto šesťuholníka.

Riešenie 1

Z minimality opísaného obdĺžnika leží na každej jeho strane leží aspoň jeden vrchol šesťuholníka. Označme šesťuholník $ABCD$ a obdĺžnik $KLMN$ tak, že A a B ležia vnútri strán KN, resp. KL.



Z pravidelnosti $ABCDEF$ vyplýva, že $ABDE$ je obdĺžnik. Preto

$$|\sphericalangle KAB| = 180^\circ - |\sphericalangle BKA| - |\sphericalangle ABK| = 180^\circ - 90^\circ - |\sphericalangle ABK| = 180^\circ - |\sphericalangle DBA| - |\sphericalangle ABK| = |\sphericalangle LBD|,$$

analogicky

$$|\sphericalangle KAB| = |\sphericalangle LBD| = |\sphericalangle MDE| = |\sphericalangle NEA|.$$

Túto spoločnú hodnotu označme α. Pritom

$$\alpha = |\sphericalangle KAB| = 180^\circ - |\sphericalangle BAF| - |\sphericalangle FAN| = 180^\circ - 120^\circ - |\sphericalangle FAN| = 60^\circ - |\sphericalangle FAN| \leq 60^\circ$$

a analogicky $|\sphericalangle KBA| \leq 60^\circ$, takže

$$\alpha = |\sphericalangle KAB| = 180^\circ - |\sphericalangle AKB| - |\sphericalangle KBA| = 180^\circ - 90^\circ - |\sphericalangle KBA| = 90^\circ - |\sphericalangle KBA| \geq 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$

Zhrnutím $\alpha \in [30^\circ, 60^\circ]$.

Podľa kosínusovej vety v trojuholníku BCD

$$|BD|^2 = |BC|^2 + |CD|^2 - 2 \cdot |BC| \cdot |CD| \cdot \cos|\sphericalangle BCD|$$

$$= 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 120^\circ = 1 + 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 + 1 + 1 = 3,$$

takže

$$|EA| = |BD| = \sqrt{3}.$$

Potom platí

$$\text{obsah}(KLMN) = \text{obsah}(ABDE) + \text{obsah}(AKB) + \text{obsah}(BLD) + \text{obsah}(DME) + \text{obsah}(ENA)$$

$$= |AB| \cdot |AD|$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AK| \cdot \sin|\sphericalangle KAB| + \frac{1}{2} \cdot |BD| \cdot |LB| \cdot \sin|\sphericalangle LBD|$$

$$+\frac{1}{2}\cdot|DE|\cdot|MD|\cdot\sin|\sphericalangle MDE|+\frac{1}{2}\cdot|EA|\cdot|NE|\cdot\sin|\sphericalangle NEA|$$

$$=|AB|\cdot|AD|$$

$$+\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot(|AB|\cos|\sphericalangle KAB|)\cdot\sin|\sphericalangle KAB|+\frac{1}{2}\cdot|BD|\cdot(|BD|\cos|\sphericalangle LBD|)\cdot\sin|\sphericalangle LBD|$$

$$+\frac{1}{2}\cdot|DE|\cdot(|DE|\cos|\sphericalangle MDE|)\cdot\sin|\sphericalangle MDE|+\frac{1}{2}\cdot|EA|\cdot(|EA|\cos|\sphericalangle NEA|)\cdot\sin|\sphericalangle NEA|$$

$$=|AB|\cdot|AD|$$

$$+\frac{1}{4}\cdot|AB|^2\cdot(2\cos|\sphericalangle KAB|\sin|\sphericalangle KAB|)+\frac{1}{4}\cdot|BD|^2\cdot(2\cos|\sphericalangle LBD|\sin|\sphericalangle LBD|)$$

$$+\frac{1}{4}\cdot|DE|^2\cdot(2\cos|\sphericalangle MDE|\sin|\sphericalangle MDE|)+\frac{1}{4}\cdot|EA|^2\cdot(2\cos|\sphericalangle NEA|\sin|\sphericalangle NEA|)$$

$$=|AB|\cdot|AD|$$

$$+\frac{1}{4}\cdot|AB|^2\cdot\sin 2|\sphericalangle KAB|+\frac{1}{4}\cdot|BD|^2\cdot\sin 2|\sphericalangle LBD|$$

$$+\frac{1}{4}\cdot|DE|^2\cdot\sin 2|\sphericalangle MDE|+\frac{1}{4}\cdot|EA|^2\cdot\sin 2|\sphericalangle NEA|$$

$$=1\cdot\sqrt{3}+\frac{1}{4}\cdot1^2\cdot\sin 2\alpha+\frac{1}{4}\cdot\sqrt{3}^2\cdot\sin 2\alpha+\frac{1}{4}\cdot1^2\cdot\sin 2\alpha+\frac{1}{4}\cdot\sqrt{3}^2\cdot\sin 2\alpha$$

$$=\sqrt{3}+\frac{1}{4}\sin 2\alpha+\frac{3}{4}\sin 2\alpha+\frac{1}{4}\sin 2\alpha+\frac{3}{4}\sin 2\alpha$$

$$=\sqrt{3}+2\sin 2\alpha.$$

Keďže

$$\text{obsah}(ABCDFEF)=\text{obsah}(ABDE)+\text{obsah}(AEF)+\text{obsah}(DBC)=\text{obsah}(ABDE)+2\text{obsah}(AEF)$$

$$=|AB|\cdot|AD|+2\cdot\frac{1}{2}\cdot|EF|\cdot|FA|\cdot\sin|\sphericalangle EFA|=1\cdot\sqrt{3}+1\cdot1\cdot\sin 120°=\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

a) Keďže $\alpha\in[30°,60°]$, platí $2\alpha\in[60°,120°]$, takže $\sin 2\alpha\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$. Preto platí

$$\frac{\text{obsah}(ABCDFEF)}{\text{obsah}(KLMN)}=\frac{\frac{3}{2}\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2\sin 2\alpha}\leq\frac{\frac{3}{2}\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\frac{3}{2}\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}=\frac{\frac{3}{2}\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{\frac{3}{2}}{2}=\frac{3}{4},$$

pričom rovnosť sa nadobúda práve v prípade $\sin 2\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, t. j. $2\alpha\in\{60°,120°\}$, t. j. $\alpha\in\{30°,60°\}$.

b) Platí

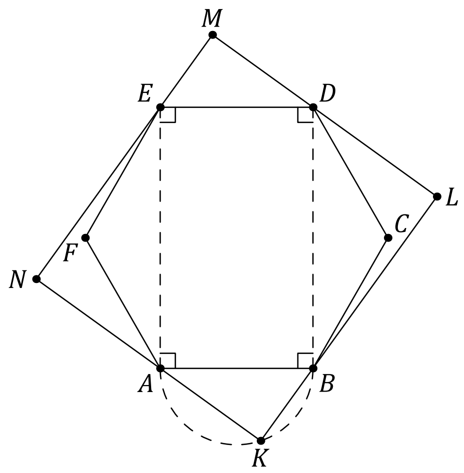
$$\frac{\text{obsah}(ABCDFEF)}{\text{obsah}(KLMN)}=\frac{\frac{3}{2}\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2\sin 2\alpha}\geq\frac{\frac{3}{2}\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2\cdot1}=\frac{\frac{3}{2}\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}=\frac{\frac{3}{2}\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}=\frac{\frac{3}{2}\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)}{4-3}=\frac{3\sqrt{3}-\frac{3}{2}\cdot3}{1}=3\sqrt{3}-\frac{9}{2},$$

pričom rovnosť sa nadobúda práve v prípade $\sin 2\alpha=1$, t. j. $2\alpha=90°$, t. j. $\alpha=45°$.

Riešenie 2

Z minimality opísaného obdĺžnika leží na každej jeho strane leží aspoň jeden vrchol šesťuholníka. Označme šesťuholník $ABCD$ a obdĺžnik $KLMN$ tak, že A a B ležia vnútri strán KN, resp. KL.



Zo súmernosti $ABCDEF$ i $KLMN$ podľa spoločného stredu vyplýva, že $ABDE$ je obdĺžnik, trojuholníky AKB a DME sú zhodné a trojuholníky BLD a EFA sú zhodné. Navyše platí

$$|\sphericalangle KAB| = 180° - |\sphericalangle BKA| - |\sphericalangle ABK| = 180° - 90° - |\sphericalangle ABK| = 180° - |\sphericalangle DBA| - |\sphericalangle ABK| = |\sphericalangle LBD|,$$

takže trojuholníky AKB a BLD sú pri tomto poradí vrcholov podobné s koeficientom $\frac{|BD|}{|AB|}$. Potom platí

$$\begin{aligned}
\text{obsah}(KLMN) &= \text{obsah}(ABDE) + \text{obsah}(AKB) + \text{obsah}(BLD) + \text{obsah}(DME) + \text{obsah}(ENA) \\
&= \text{obsah}(ABDE) + 2\text{obsah}(AKB) + 2\text{obsah}(BLD) \\
&= \text{obsah}(ABDE) + 2\text{obsah}(AKB) + 2\left(\frac{|BD|}{|AB|}\right)^2 \text{obsah}(AKB) \\
&= \text{obsah}(ABDE) + 2\left(1 + \left(\frac{|BD|}{|AB|}\right)^2\right)\text{obsah}(AKB) \\
&= |AB| \cdot |BD| + 2\left(1 + \left(\frac{|BD|}{|AB|}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |K, AB|\right),
\end{aligned}$$

Keďže hodnoty $|AB|$ a $|BD|$ nezávisia od polohy $KLMN$, hodnota obsah$(KLMN)$ je najväčšia, resp. najmenšia práve vtedy, keď je taká hodnota $|K, AB|$.

Bod K pritom leží na Tálesovej kružnici s priemerom AB v polrovine opačnej k polrovine ABD a platí

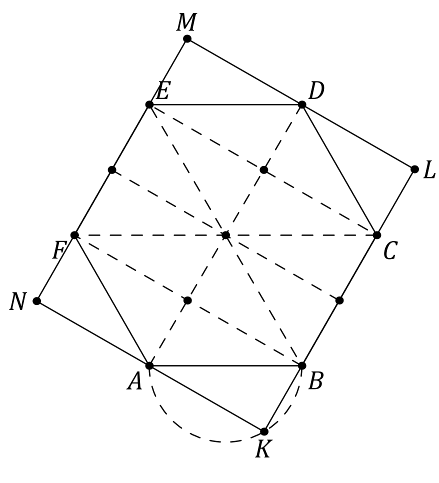
$$|\sphericalangle KAB| = 180° - |\sphericalangle BAF| - |\sphericalangle FAN| = 180° - 120° - |\sphericalangle FAN| = 60° - |\sphericalangle FAN| \leq 60°.$$

Analogicky $|\sphericalangle KBA| \leq 60°$, takže

$$|\sphericalangle KAB| = 180° - |\sphericalangle AKB| - |\sphericalangle KBA| = 180° - 90° - |\sphericalangle KBA| = 90° - |\sphericalangle KBA| \geq 90° - 60° = 30°.$$

Zhrnutím $|\sphericalangle KAB| \in [30°, 60°]$.

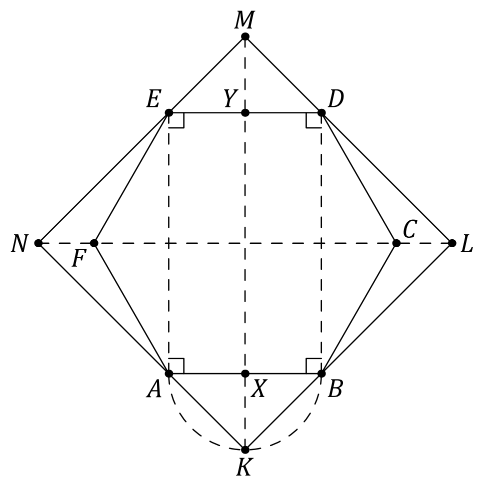
a) Bod K je najbližšie k AB práve vtedy, keď $|\sphericalangle KAB| = 30°$ alebo symetricky $|\sphericalangle KAB| = 60°$. Bez ujmy na všeobecnosti nech nastáva prvý prípad. Vtedy ležia úsečky BC a EF na stranách KL, resp. EF. Šesťuholník $ABCD$ potom môžeme rozdeliť na 12 trojuholníkov, ktoré sú zhodné s trojuholníkom AKB:



Potom

$$\frac{\text{obsah}(ABCDFEF)}{\text{obsah}(KLMN)} = \frac{12 \cdot \text{obsah}(AKB)}{16 \cdot \text{obsah}(AKB)} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}.$$

b) Bod K je najbližšie k AB práve vtedy, keď $|\sphericalangle KAB| = 45°$. Vtedy K leží na osi úsečky AB, takže táto os je KM a je podľa nej súmerné aj body L a N. Obdĺžnik $KLMN$ má teda kolmé uhlopriečky, takže je to štvorec. Nech X a Y sú priesečníky jeho uhlopriečky KM a úsečiek AB a DE, sú to teda ich stredy.



Potom

$$\text{obsah}(KLMN) = \frac{1}{2} \cdot |KM| \cdot |LN| = \frac{1}{2}|KM|^2 = \frac{1}{2}(|KX| + |XY| + |YM|)^2 = \frac{1}{2}(|KX| + |XY| + |KX|)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}|AB| + |BD| + \frac{1}{2}|AB|\right)^2 = \frac{1}{2}(|AB| + |BD|)^2 = \frac{1}{2}\left(|AB| + \sqrt{3}\,|AB|\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(1+\sqrt{3}\right)|AB|\right)^2 = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)^2|AB|^2.$$

Keďže

$$\text{obsah}(ABCDEF) = \text{obsah}(ABCF) + \text{obsah}(FCDE) = 2 \cdot \text{obsah}(ABCF)$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} \cdot (|AB| + |FB|) \cdot |AB, FC|\right) = \frac{1}{2} \cdot (|AB| + 2\,|AC|) \cdot 2\,|AB, FC|$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3\,|AB| \cdot |AB, DE| = \frac{3}{2} \cdot |AB| \cdot |BD| = \frac{3}{2} \cdot |AB| \cdot \sqrt{3}\,|AB| = \frac{3\sqrt{3}}{2}|AB|^2,$$

platí

$$\frac{\text{obsah}(ABCDFEF)}{\text{obsah}(KLMN)} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}|AB|^2}{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)^2|AB|^2} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)^2}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{\left(1+\sqrt{3}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{1+2\sqrt{3}+3} = \frac{3\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}} = \frac{9}{4\sqrt{3}+6} = \frac{9}{2\left(2\sqrt{3}+3\right)}$$

$$= \frac{9\left(2\sqrt{3}-3\right)}{2\left(2\sqrt{3}+3\right)\left(2\sqrt{3}-3\right)} = \frac{9\left(2\sqrt{3}-3\right)}{2(12-9)} = \frac{9\left(2\sqrt{3}-3\right)}{6} = 3\sqrt{3} - \frac{9}{2}.$$