25. ročník MO, úloha B-I-6

Nájdite množinu ťažísk všetkých trojuholníkov, ktorých vrcholy delia obvod daného štvorca na tretiny.

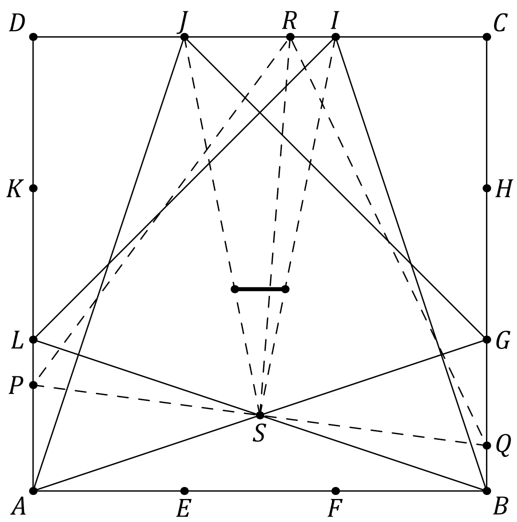
Riešenie

Uvedomme si, že pre každý bod obvodu štvorca existuje práve jedna dvojica bodov jeho obvodu taká, že spolu delia obvod na tri rovnaké časti.

Štvorec označme $ABCD$. Jeho strany AB, BC, CD, DA postupne rozdeľme v kladnom smere bodmi E a F, G a H, I a J, K a L na tretiny. Obvod štvorca je tak rozdelený na 12 rovnakých častí, takže medzi uvažované trojuholníky patria AGJ, BIL, CKF, DEH.

Označme S stred obdĺžnika $LABG$, je to teda spoločný stred úsečiek LB a AG. Úsečky LA a BG sú teda stredovo súmerné podľa stredu S.

Nech P, Q, R sú body úsečiek LA, BG, IR také, že $|LP| = |BQ| = |IR|$. Body P a Q sú teda tiež stredovo súmerné podľa stredu S.



Potom

$$|PA| + |AB| + |BQ| = |PA| + |AB| + |LP| = (|LP| + |PA|) + |AB| = |LA| + |AB|,$$

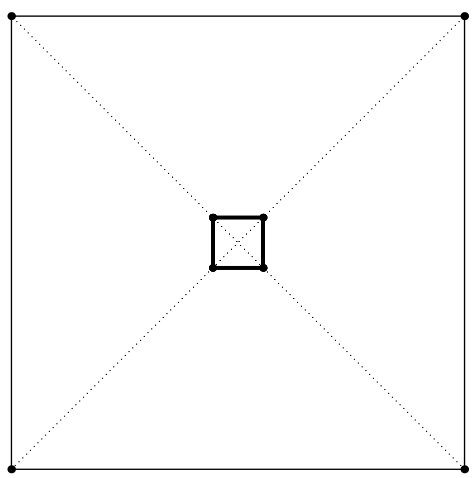
$$|QC| + |CR| = |QC| + (|CI| + |IR|) = |QC| + (|CI| + |BQ|) = (|BQ| + |QC|) + |CI| = |BC| + (|CI|,$$

$$|RD| + |DP| = |RD| + (|DL| + |LP|) = |RD| + (|DL| + |IR|) = (|IR| + |RD|) + |DL| = |CD| + (|DL|,$$

takže body P, Q, R tiež delia obvod na tretiny, PQR je teda tiež jeden z uvažovaných trojuholníkov.

Keďže všetky polohy bodu R sú na úsečke IJ, ťažiská všetkých trojuholníkov PQR vytvárajú úsečku, ktorá je rovnoľahlá s úsečkou IJ podľa stredu S s koeficientom $\frac{1}{3}$. Dĺžka tejto úsečky je teda $\frac{1}{3} \cdot |IJ|$ čiže $\frac{1}{9}\,|AB|$.

Analogicky sú súčasťou hľadanej množiny ďalšie tri úsečky, ktoré vzniknú jej otočeniami okolo stredu štvorca o 90°, 180° a 270°. Výsledná množina je teda obvod štvorca rovnoľahlého s daným štvorcom podľa jeho stredu a koeficentom $\frac{1}{9}$:



20. ročník MO, úloha B-II-2a

Nech n je kladné prirodzené číslo. Nájdite všetky sedmice za sebou nasledujúcich kladných prirodzených čísel, ktorých súčin je menší než n^7.

Riešenie

Rozoberme prípady:

- Nech $n \leq 3$.

  Keďže pre každé kladné prirodzené číslo k platí

  $$k \cdot (k+1) \cdot (k+2) \cdot (k+3) \cdot (k+4) \cdot (k+5) \cdot (k+6) 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040 > 2187 = 3^7 \geq n^7,$$

  žiadna vyhovujúca sedmica neexistuje.

- Nech $n \geq 4$.

  Rozoberme prípady:

  - Nech $1 \leq k \leq n-3$.

    Potom platí

    $$\begin{aligned} & k \cdot (k+1) \cdot (k+2) \cdot (k+3) \cdot (k+4) \cdot (k+5) \cdot (k+6) \\ \leq & (n-3) \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \\ = & (n-3)(n+3)) \cdot (n-2)(n+2)) \cdot (n-1)(n+1)) \cdot n \\ = & (n^2-9) \cdot (n^2-4) \cdot (n^2-1) \cdot n < n^2 \cdot n^2 \cdot n^2 \cdot n = n^7, \end{aligned}$$

    takže sedmica $(k, k+1, k+2, k+3, k+4, k+5, k+6)$ vyhovuje.

  - Nech $k \geq n-2$.

    Potom platí

    $$\begin{aligned} & k \cdot (k+1) \cdot (k+2) \cdot (k+3) \cdot (k+4) \cdot (k+5) \cdot (k+6) \\ \geq & (n-2) \cdot (n-1) \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4) \\ = & (n-2)(n+4)) \cdot (n-1)(n+3)) \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \\ = & (n^2+2n-8) \cdot (n^2+2n-3) \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \\ = & \big(n^2+2(n-4)\big) \cdot \big(n^2+2(n-4)+5\big) \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \\ \geq & n^2 \cdot n^2 \cdot n \cdot n \cdot n = n^7, \end{aligned}$$

    takže sedmica $(k, k+1, k+2, k+3, k+4, k+5, k+6)$ nevyhovuje.

19. ročník MO, úloha B-I-2

Nájdite všetky dvojice celých čísel (x, y) také, že obe čísla $\frac{x+1}{y}$ a $\frac{y+1}{x}$ sú celé.

Riešenie

Keďže čísla x a y sú v menovateľoch, sú nenulové. Vzhľadom na ich symetrické roly môžeme predpokladať, že $x \geq y$. Rozoberme prípady:

- Nech $0 < y \leq x$.
  Potom $y + 1 > 0$, takže
  $$\frac{y+1}{x} > 0,$$
  z celosti $\frac{y+1}{x}$
  $$\frac{y+1}{x} \geq 1,$$
  $$y + 1 \geq x,$$
  takže zhrnutím
  $$0 < y \leq x \leq y + 1,$$
  čiže
  $$x \in \{y, y+1\}.$$
  Rozoberme prípady:
  - Nech $x = y$.
    Potom
    $$\frac{y+1}{y} \in \mathbb{Z},$$
    $$1 + \frac{1}{y} \in \mathbb{Z},$$
    $$\frac{1}{y} \in \mathbb{Z}.$$
    Číslo y je kladný deliteľ 1, takže
    $$y = 1,$$
    $$(x, y) = (1, 1).$$
    Táto dvojica naozaj vyhovuje, lebo $\frac{1+1}{1} = 2 \in \mathbb{Z}$.
  - Nech $x = y + 1$.
    Potom
    $$\frac{(y+1)+1}{y} \in \mathbb{Z},$$
    $$\frac{y+2}{y} \in \mathbb{Z},$$
    $$1 + \frac{2}{y} \in \mathbb{Z},$$
    $$\frac{2}{y} \in \mathbb{Z}.$$
    Číslo y je kladný deliteľ 2, takže
    $$y \in \{1, 2\},$$
    $$(x, y) \in \{(2, 1), (3, 2)\}.$$
    Obe dvojice naozaj vyhovujú:
    - $\frac{2+1}{1} = 3 \in \mathbb{Z}$ a $\frac{1+1}{2} = 1 \in \mathbb{Z}$.

        - $\frac{3+1}{2} = 2 \in \mathbb{Z}$ a $\frac{2+1}{3} = 1 \in \mathbb{Z}$.

- Nech $y < 0 < x$.
  Rozoberme prípady:
    - Nech $y = -1$.
      Potom platí
      $$\frac{x+1}{y} = \frac{x+1}{-1} = -(x+1) \in \mathbb{Z},$$
      $$\frac{y+1}{x} = \frac{-1+1}{x} = \frac{0}{x} = 0 \in \mathbb{Z},$$
      takže vyhovuje ľubovoľná dvojica $(x, -1)$, kde $x > 0$.
    - Nech $y < -1$.
      Potom $y + 1 < 0$, takže
      $$\frac{y+1}{x} < 0,$$
      z celosti $\frac{y+1}{x}$
      $$\frac{y+1}{x} \leq -1,$$
      $$y + 1 \leq -x,$$
      $$y \leq -x - 1.$$
      Ďalej $x + 1 > 0$, takže
      $$\frac{x+1}{y} < 0,$$
      z celosti $\frac{x+1}{y}$
      $$\frac{x+1}{y} \leq -1,$$
      $$x + 1 \geq -y,$$
      $$y \geq -x - 1.$$
      Zhrnutím dostávame
      $$y = -x - 1.$$
      Dvojice $(x, -x-1)$, kde $x > 0$, naozaj vyhovujú, lebo
      $$\frac{x+1}{y} = \frac{x+1}{-x-1} = -1 \in \mathbb{Z},$$
      $$\frac{y+1}{x} = \frac{(-x-1)+1}{x} = \frac{-x}{x} = -1 \in \mathbb{Z}.$$
- Nech $y \leq x < 0$.
  Rozoberme prípady:
    - Nech $x = -1$.
      Potom platí
      $$\frac{x+1}{y} = \frac{-1+1}{y} = \frac{0}{y} = 0 \in \mathbb{Z},$$
      $$\frac{y+1}{x} = \frac{y+1}{-1} = -(y+1) \in \mathbb{Z},$$
      takže vyhovuje ľubovoľná dvojica $(-1, y)$, kde $y < 0$.

- Nech $x < -1$.
  Potom $x + 1 < 0$, takže
  $$\frac{x+1}{y} > 0,$$
  z celosti $\frac{x+1}{y}$
  $$\frac{x+1}{y} \geq 1,$$
  $$x + 1 \leq y.$$
  Zhrnutím dostávame
  $$x + 1 \leq y \leq x < x + 1,$$
  čo je spor.
  Tento prípad teda nenastáva.

Zhrnutím dostávame, že riešeniami sú práve dvojice $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(-1, y)$, kde $y \neq 0$, $(x, -1)$, kde $x \neq 0$, a (x, y), kde $x + y = -1$ a $x, y \neq 0$.