29. ročník MO, úloha Z-I-4

Zistite, či môžu traja cestujúci stihnúť vlak, ktorý odchádza o 75 minút zo stanice vzdialenej 40 km, ak každý z nich dokáže bežať rýchlosťou 10 km/h a majú k dispozícii dvojmiestny motocykel, ktorý môže ísť rýchlosťou 80 km/h.

Riešenie

Keďže nemáme žiadne informácie, ktoré by cestujúcich rozlišovali, môžeme predpokladať, že motocykel riadi vždy ten istý.

Nech ľubovoľný ďalší cestujúci sa na motocykli povezie dráhu s, takže bude bežať dráhu $40\,\mathrm{km} - s$. Jeho celkový čas má byť najviac 75 min čiže $\frac{5}{4}$ h, preto (využijúc maximálne rýchlosti pri oboch spôsoboch dopravy)

$$\frac{s}{80\,\mathrm{km/h}} + \frac{40\,\mathrm{km} - s}{10\,\mathrm{km/h}} \le \frac{5}{4}\,\mathrm{h},$$

$$s + 8(40\,\mathrm{km} - s) \le \frac{5}{4}\,\mathrm{h} \cdot 80\,\mathrm{km/h},$$

$$s + (320\,\mathrm{km} - 8s) \le 100\,\mathrm{km},$$

$$220\,\mathrm{km} \le 7s,$$

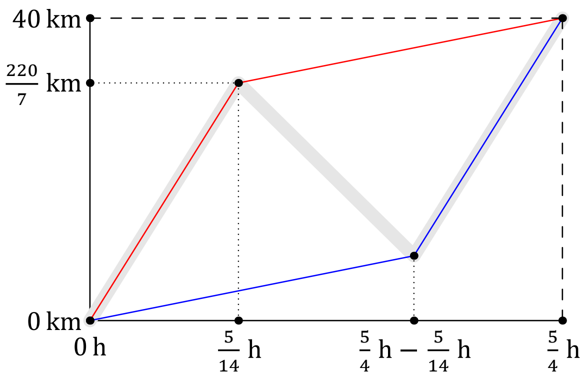
$$\frac{220}{7}\,\mathrm{km} \le s.$$

Ak $s = \frac{220}{7}$ km, na motocykli sa povezie čas $\frac{\frac{200}{7}\,\mathrm{km}}{80\,\mathrm{km/h}}$, čo je $\frac{5}{14}$ h, a to je menej než polovica z $\frac{5}{4}$ h.

Rozdeľme teda dobu $\frac{5}{4}$ h na tri po sebe idúce etapy:

1. V intervale $\left[0\,\mathrm{h}, \frac{5}{14}\,\mathrm{h}\right]$ sa prvý a druhý povezú na motocykli a tretí beží.
2. V intervale $\left[\frac{5}{14}\,\mathrm{h}, \frac{5}{4}\,\mathrm{h} - \frac{5}{14}\,\mathrm{h}\right]$ sa prvý na motocykli vracia po tretieho a druhý a tretí bežia.
3. V intervale $\left[\frac{5}{4}\,\mathrm{h} - \frac{5}{14}\,\mathrm{h}, \frac{5}{4}\,\mathrm{h}\right]$ sa prvý a tretí povezú na motocykli a druhý beží.

Tento plán je znázornený nasledujúcim diagramom. Prvému zodpovedá tučná sivá čiara, druhému červená a tretiemu modrá.



Uskutočniteľnosť tohto plánu závisí od toho, či sa prvý počas druhej etapy stihne premiestniť z miesta, kde z motocykla vysadol druhý, čo je $\frac{220}{7}$ km od štartu, na miesto, kde naň má nasadnúť tretí, čo je $\frac{220}{7}$ km od cieľa čiže $40\,\mathrm{km} - \frac{220}{7}$ km od štartu. Jeho potrebnú rýchlosť na tomto úseku označme r, potom platí

$$r = \frac{\frac{220}{7}\,\mathrm{km} - \left(40\,\mathrm{km} - \frac{220}{7}\,\mathrm{km}\right)}{\left(\frac{5}{4}\,\mathrm{h} - \frac{5}{14}\,\mathrm{h}\right) - \frac{5}{14}\,\mathrm{h}} = \frac{\frac{220}{7} - \left(40 - \frac{220}{7}\right)}{\left(\frac{5}{4} - \frac{5}{14}\right) - \frac{5}{14}}\,\mathrm{km/h} = \frac{\frac{220}{7} - 40 + \frac{220}{7}}{\frac{5}{4} - \frac{5}{14} - \frac{5}{14}}\,\mathrm{km/h} = \frac{\frac{220-280+220}{7}}{\frac{35-10-10}{28}}\,\mathrm{km/h}$$

$$= \frac{\frac{160}{7}}{\frac{15}{28}}\,\mathrm{km/h} = \frac{28 \cdot 160}{7 \cdot 15}\,\mathrm{km/h} = \frac{4 \cdot 32}{3}\,\mathrm{km/h} = \frac{128}{3}\,\mathrm{km/h} < 43\,\mathrm{km/h} \le 80\,\mathrm{km/h}.$$

Cestujúci teda vlak môžu stihnúť, a to napríklad pri dodržaní uvedeného plánu.

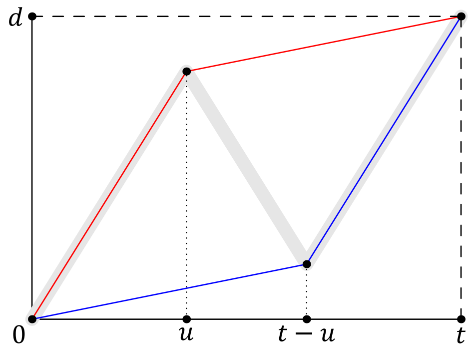
Poznámka

Keďže v druhej etape má motocyklista značnú v rýchlosti rezervu, čas presunu možnosť skrátiť tým, že druhý zosaadne z motocykla neskôr a tretí naň nasadne skôr.

Nájdime teda najmenší čas, za ktorý sa všetci traja dostanú na stanicu. Označme ho t. Rýchlosť bežcov označme v, rýchlosť motocykla w, a vzdialenosť od stanice d. Nech u je doba jazdy druhého i tretieho.

Rozdeľme čas t na tri po sebe idúce etapy:

1. V intervale $[0, u]$ sa prvý a druhý povezú na motocykli a tretí beží.
2. V intervale $[u, t-u]$ sa prvý na motocykli vracia po tretieho a druhý a tretí bežia.
3. V intervale $[t-u, u]$ sa prvý a tretí povezú na motocykli a druhý beží.



V prvej etape druhý prejde (na motocykli) dráhu wu a v druhej a tretej spolu (behom) $v(t-u)$, čiže platí

$$d = wu + v(t-u),$$
$$d = wu + vt - vu,$$
$$d - vt = wu - vu,$$
$$d - vt = (w-v)u,$$
$$\frac{d - vt}{w - v} = u.$$

Motocykel aj v druhej etape ide rýchlosťou w, t. j. platí

$$w = \frac{wu - (d - wu)}{(t-u) - u},$$
$$w = \frac{2wu - d}{t - 2u},$$
$$w(t - 2u) = 2wu - d,$$
$$wt - 2wu = 2wu - d,$$
$$wt = 4wu - d.$$

Po dosadení z predchádzajúceho vzťahu

$$wt = 4w \cdot \frac{d - vt}{w - v} - d,$$
$$w(w-v)t = 4w(d - vt) - (w-v)d,$$
$$w^2 t - wvt = (4wd - 4wvt) - (wd - vd),$$
$$w^2 t - wvt = 4wd - 4wvt - wd + vd,$$
$$w^2 t + 3wvt = 3wd + vd,$$
$$w(w + 3v)t = (3w + v)d,$$
$$t = \frac{(3w + v)d}{w(w + 3v)}.$$

Z toho dostávame

$$t = \frac{(3 \cdot 80\,\mathrm{km/h} + 10\,\mathrm{km/h}) \cdot 40\,\mathrm{km}}{80\,\mathrm{km/h} \cdot (80\,\mathrm{km/h} + 3 \cdot 10\,\mathrm{km/h})} = \frac{(240\,\mathrm{km/h} + 10\,\mathrm{km/h}) \cdot 40\,\mathrm{km}}{80\,\mathrm{km/h} \cdot (80\,\mathrm{km/h} + 30\,\mathrm{km/h})}$$
$$= \frac{250\,\mathrm{km/h} \cdot 40\,\mathrm{km}}{80\,\mathrm{km/h} \cdot 110\,\mathrm{km/h}} = \frac{250 \cdot 40}{80 \cdot 110}\,\mathrm{h} = \frac{25}{22}\,\mathrm{h} = 68{,}\overline{18}\ \mathrm{min}.$$

29. ročník MO, úloha Z-III-2

Auto sa má dostať do miesta vzdialeného 1300 km. Benzín možno kupovať len v mieste štartu. V tomto mieste môže auto tankovať do nádrže s objemom 40 litrov a môže tiež kupovať benzín do 20-litrových kanistrov, z ktorých si po ceste môže nádrž doplniť. Auto však môže viezť so sebou najviac tri plné kanistre a môže si tiež zriaďovať zásoby kanistrov popri ceste. Jeho spotreba je 10 litrov na 100 km. Zistite, či na jeho cestu stačí 190 litrov benzínu.

Riešenie

Auto môže postupovať podľa nasledujúcej tabuľky. Zriadi si pritom zásobáreň na 300. kilometri. Pod kanistrami pritom rozumieme celkový objem kanistrov v aute, ten môže byť najviac 60 l.

krok	poloha (km)	nádrž (l)	kanistre (l)	zásobáreň (l)	poznámka
0.	0	0	0	0	
1.	0	30	60	0	natankovanie 90 l
2.	300	0	60	0	
3.	300	30	30	0	preliatie z kanistrov
4.	300	30	0	30	vyloženie kanistrov
5.	0	0	0	30	
6.	0	40	60	30	natankovanie 100 l
7.	300	10	60	30	
8.	300	40	60	0	preliatie z kanistrov
9.	700	0	60	0	
10.	700	40	20	0	preliatie z kanistrov
11.	1100	0	20	0	
12.	1100	20	0	0	preliatie z kanistrov
13.	1300	0	0	0	

Auto pritom tankovalo 90 l a 100 l, čo je spolu 190 l.

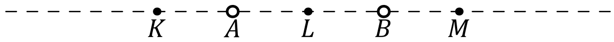
29. ročník MO, úloha A-III-3

Aký je najmenší počet konvexnych množín, ktorých zjednotením je rovina bez troch nekolineárnych bodov?

Riešenie

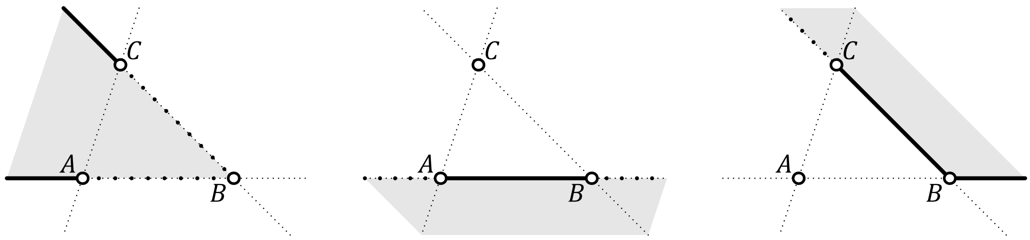
Predmetné body označme A, B, C a nech $\mathcal{P}$ je rovina bez nich.

Nech K, L, M sú rôzne body priamky AB také, že $|KA| = |AL| = |LB|\,|BM|$. Keďže body K, L, M sú rôzne od A a B a (vzhľadom na nekolinearitu A, B a C) aj od C, patria do množiny $\mathcal{P}$.



Body K a L nepatria do tej istej množiny, lebo vzhľadom na jej konvexnosť by do nej patril aj bod A, ktorý leží na úsečke KL. Analogicky ani body L a M nepatria do tej istej množiny (pre bod B) a to isté platí aj pre body K a M. To teda znamená, že každý z bodov K, L, M leží v inej množine, tieto množiny sú preto aspoň 3.

Tento počet možno dosiahnuť, a to napríklad takto:



Rozklad má tieto tri množiny:

- rozdiel uhla ABC a lomenej čiary ABC,
- zjednotenie vnútra polroviny opačnej k polrovine ABC a vnútra úsečky AB,
- rozdiel toho susedného uhla k uhlu ABC, ktorý obsahuje bod C, a zjednotenia polpriamky opačnej k polpriamke CB a jednoprvkovej množiny obsahujúcej bod B.

Každá z nich je zrejme konvexná a ich zjednotením je množina $\mathcal{P}$.

Poznámka

Uvedené množiny sú navyše disjunktné, takže tvoria rozklad množiny $\mathcal{P}$.