27. ročník MO, úloha C-II-1

Koľkými spôsoby je možné vyjadriť číslo 1978 ako súčet najmenej dvoch za sebou nasledujúcich prirodzených čísel? Nájdite všetky také rozklady.

Riešenie

Nech m a k sú prirodzené čísla také, že $k \geq 2$ a

$$1978 = m + (m+1) + \cdots + (m + (k-1))\,.$$

Potom ekvivalentne

$$1978 = km + (0 + 1 + \cdots + (k-1))\,,$$

$$1978 = km + \frac{1}{2}k(k-1),$$

$$3956 = 2km + k(k-1),$$

$$2^2 \cdot 989 = k(2m + k - 1).$$

Čísla k a $2m + k - 1$ sú teda deliteľmi čísla 3956 čiže $2^2 \cdot 23 \cdot 43$. Ich súčet je $2m + 2k - 1$, čo je nepárne číslo, preto majú rôznu paritu, takže 4 je deliteľom k alebo $2m + k - 1$. Ďalej teda ekvivalentne

$$(k, 2m+k-1) \in \{(4, 23\cdot 43), (4\cdot 23, 43), (4\cdot 43, 23), (4\cdot 23\cdot 43, 1), (1, 4\cdot 23\cdot 43), (23, 4\cdot 43), (43, 4\cdot 23), (23\cdot 43, 4)\},$$

$$(k, 2m + k - 1) \in \{(4, 989), (92, 43), (172, 23), (1978, 1), (1, 1978), (23, 172), (43, 92), (989, 4)\}.$$

Keďže $2 \leq k \leq 2m + k = (2m + k - 1) + 1$, ekvivalentne

$$(k, 2m + k - 1) \in \{(4, 989), (23, 172), (43, 92)\},$$

$$(k, 2m - 1) \in \{(4, 985), (23, 149), (43, 49)\},$$

$$(k, 2m) \in \{(4, 986), (23, 150), (43, 50)\},$$

$$(k, m) \in \{(4, 493), (23, 75), (43, 25)\}.$$

Existujú teda 3 hľadané vyjadrenia:

- $1978 = 493 + 494 + 495 + 496$,
- $1978 = 75 + \cdots + 97$,
- $1978 = 25 + \cdots + 67$.

25. ročník MO, úloha Z-II-2

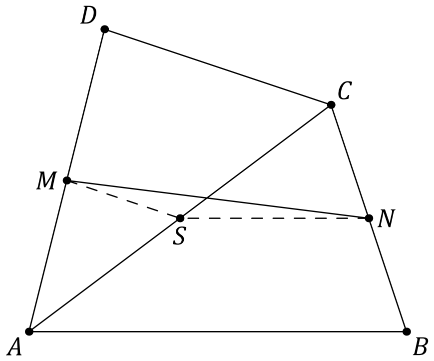
Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník a M a N stredy jeho strán AD a BC. Dokážte, že ak

$$|MN| = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|).$$

tak stred úsečky AC leží vnútri úsečky MN a $AB \parallel CD$.

Riešenie

Najprv ignorujme vzťah medzi MN a AB a CD.



Keďže NS je stredná priečka trojuholníka ABC rovnobežná s AB a MS je stredná priečka trojuholníka ACD rovnobežná s CD, podľa trojuholnákovej nerovnosti pre trojicu bodov M, N, S platí

$$|MN| \leq |NS| + |MS| = \frac{1}{2}|AB| + \frac{1}{2}|CD| = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|).$$

Podľa predpokladu tu však nastáva rovnosť, takže $|MN| = |NS| + |MS|$, a teda S leží na úsečke MN. Z toho tiež $AB \parallel NS = SM \parallel CD$.

27. ročník MO, úloha C-II-3a

Určte posledné dvojčíslie čísla $1^4 + \cdots + 1000^4$.

Riešenie

Nech n je prirodzené číslo a y je jeho posledné dvojčíslie, t. j. jeho zvyšok n po delení 100. Existuje teda prirodzené číslo x také, že $n = 100x + y$. Potom

$$n^4 = (100x + y)^4 = (100x)^4 + 4(100x)^3 y + 6(100x)^2 y^2 + 4(100x)y^3 + y^4$$

$$= 100^4 x^4 + 4 \cdot 100^3 x^3 y + 6 \cdot 100^2 x^2 y^2 + 4 \cdot 100 x y^3 + y^4 = 100\left(100^3 x^4 + 4 \cdot 100^2 x^3 y + 6 \cdot 100 x^2 y^2 + 4xy^3\right) + y^4,$$

takže posledné dvojčíslie čísla n^4 je rovnaké ako posledné dvojčíslie čísla y^4. Číslo

$$\left(1^4 + \cdots + 100^4\right) + \cdots + \left(901^4 + \cdots + 1000^4\right)$$

má teda rovnaké posledné dvojčíslie ako číslo

$$\underbrace{(1^4 + \cdots + 100^4) + \cdots + (1^4 + \cdots + 100^4)}_{10}$$

čiže $10\left(1^4 + \cdots + 100^4\right)$. Jeho posledná cifra je teda 0 a predposledná je posledná cifra $1^4 + \cdots + 100^4$.
Nech n je prirodzené číslo a z je jeho posledná cifra, t. j. jeho zvyšok n po delení 10. Existuje teda prirodzené číslo w také, že $n = 10w + z$. Potom

$$n^4 = (10w + z)^4 = (10w)^4 + 4(10w)^3 z + 6(10w)^2 z^2 + 4(10w)z^3 + z^4$$

$$= 10^4 w^4 + 4 \cdot 10^3 w^3 z + 6 \cdot 10^2 w^2 z^2 + 4 \cdot 10 w z^3 + z^4 = 10\left(10^3 w^4 + 4 \cdot 10^2 w^3 z + 6 \cdot 10 w^2 z^2 + 4wz^3\right) + z^4,$$

takže posledná cifra čísla n^4 je rovnaká ako posledné dvojčíslie čísla w^4. Číslo

$$\left(1^4 + \cdots + 10^4\right) + \cdots + \left(91^4 + \cdots + 100^4\right)$$

má teda rovnakú poslednú cifru ako číslo

$$\underbrace{(1^4 + \cdots + 10^4) + \cdots + (1^4 + \cdots + 10^4)}_{10}$$

čiže $10\left(1^4 + \cdots + 10^4\right)$. Jeho posledná cifra je teda 0.
Zhrnutím dostávame, že posledné dvojčíslie čísla $1^4 + \cdots + 1000^4$ je 00.

25. ročník MO, úloha B-II-2a

Nech $ABCDEF$ je konvexný šesťuholník. Nech jeho uhlopriečky vychádzajúce z vrcholu B delia uhol ABC na štyri rovnaké diely a analogickú vlastnosť majú uhlopriečky vychádzajúce z vrcholov D a F. Dokážte, že tento šesťuholník je pravidelný.

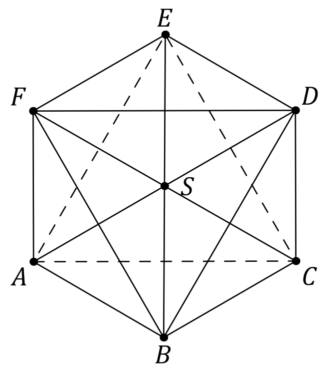
Riešenie

Keďže

$$|\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle ABF| + |\sphericalangle FBE| = |\sphericalangle CBD| + |\sphericalangle DBE| = |\sphericalangle CBE|,$$

BE je os uhla FBD.

Analogicky je DA os uhla BDF a FC os uhla DFB. Tieto tri osi uhlov trojuholníka BDF sa pretínajú v jednom bode, ktorý označme S.



Pretože $|\sphericalangle SFB| = |\sphericalangle BFA|$ a $|\sphericalangle SBF| = |\sphericalangle FBA|$, trojuholníky SFB a AFB sú pri tomto poradí vrcholov podľa vety *usu* zhodné, a keďže priamka FB oddeľuje body A a S sú podľa tejto priamky súmerné. Priamka SA čiže AD je teda kolmá na stranu AD, je to teda výška trojuholníka BDF z bodu D a prechádza bodom S.

Analogicky bodom S prechádzajú aj ostatné dve výšky trojuholníka BDF, takže S je jeho ortocentrom. Keďže je aj stredom jemu vpísanej kružnice, tento trojuholník je rovnostranný.

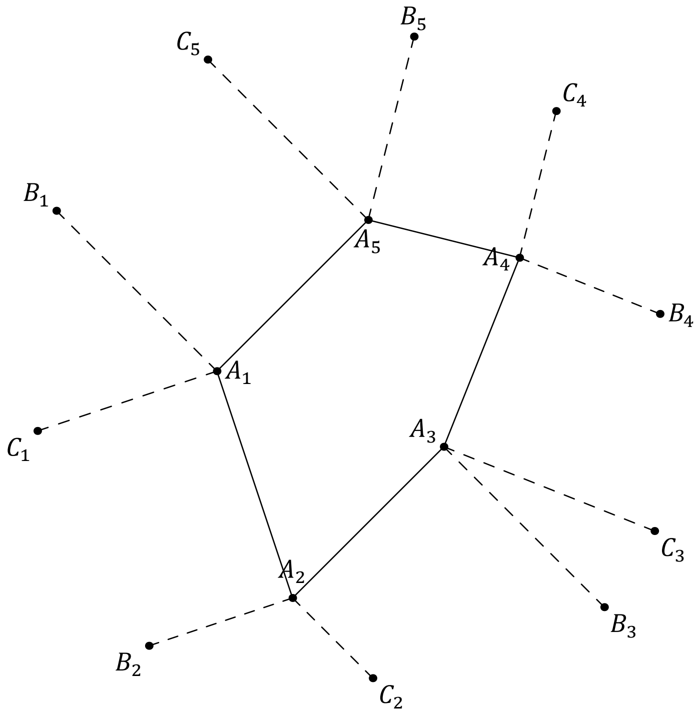
Pretože bod S je súmerný s bodom A podľa FB a analogicky s bodom C podľa BD a s bodom E podľa DF, šesťuholník $ABCD$ je pravidelný.

25. ročník MO, úloha A-III-5

Nech $\mathcal{M}$ je konvexný mnohouholník, ktorý je obsiahnutý v konvexnom mnohouholníku $\mathcal{N}$. Dokážte, že obvod$(\mathcal{M}) \leq$ obvod$(\mathcal{N})$.

Riešenie

Nech $\mathcal{M}$ je $A_1 \dots A_n$. Nech $A_0 = A_n$ a $A_{n+1} = A_1$. Ak $i \in \{1, \dots, n\}$, definujme C_i a B_{i+1} ako priesečníky obvodu mnohouholníka $\mathcal{N}$ a kolmíc na úsečku A_iA_{i+1} cez bod A_i, resp. A_{i+1}, pričom C_i a B_{i+1} ležia v polrovine danej A_iA_{i+1} opačnej k polrovine obsahujúcich $\mathcal{M}$. Nech $B_0 = B_n$, $B_{n+1} = B_1$ $C_0 = C_n$ a $C_{n+1} = C_1$. Ak $i \in \{1, \dots, n\}$, tak $B_{i+1}A_{i+1}A_iC_i$ je pravouhlý lichobežník s ramenami A_iA_{i+1} a C_iB_{i+1} a pravým uhlom pri A_1, takže platí $|C_iB_{i+!}| \geq |A_iA_{i+1}|$



Body B_1, C_1, B_2, C_2, ..., B_n, C_n ležia v tomto poradí na obvode konvexného mnohouholníka $\mathcal{U}$. Preto platí

$$\text{obvod}(\mathcal{N}) \geq |B_1C_1| + |C_1B_2| + |B_2C_2| + |C_2B_3| + \dots + |B_nC_n| + |C_nB_1|$$

$$\geq |C_1B_2| + |C_2B_3| + \dots + |C_nB_1| \geq |A_1A_2| + |A_2A_3| + \dots + |A_nA_1| = \text{obvod}(\mathcal{M}).$$