17. ročník MO, úloha C-I-3

Určte dĺžky strán všetkých pravouhlých trojuholníkov s celočíselnými dĺžkami strán, ktorých obvod je rovný jeho obsahu.

Riešenie 1

Označme dĺžky odvesien hľadaného pravouhlého trojuholníka a, b a dĺžku jeho prepony c. Bez ujmy na všeobecnosti $a \le b$. Podľa zadania platí

$$\frac{1}{2}ab = a + b + c,$$

t. j.

$$c = \frac{1}{2}ab - a - b.$$

Podľa Pytagorovej vety platí

$$a^2 + b^2 = c^2 = \left(\frac{1}{2}ab - a - b\right)^2 = \frac{1}{4}a^2b^2 + a^2 + b^2 - a^2b - ab^2 + 2ab,$$

z čoho

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{4}a^2b^2 - a^2b - ab^2 + 2ab, \\ 0 &= a^2b^2 - 4a^2b - 4ab^2 + 8ab, \\ 0 &= ab - 4a - 4b + 8, \\ 8 &= ab - 4a - 4b + 16, \\ 8 &= (a-4)(b-4). \end{aligned}$$

Číslo $a - 4$ je teda deliteľom čísla 8. Pritom z $a \le b$ máme $a - 4 \le b - 4$.

Zostavme tabuľku všetkých prípadov (v ktorej $b - 4 = \frac{8}{a-4}$ a $c = \frac{1}{2}ab - a - b$):

$a-4$	$b-4$	a	b	c
1	8	5	12	13
2	4	6	8	10
4	2	–	–	–
8	1	–	–	–
−1	−8	–	–	–
−2	−4	–	–	–
−4	−2	0	2	–
−8	−1	−4	3	–

Dostávame tak dva (pomerne známe) pytagorejské trojuholníky: prvý s odvesnami 5 a 12 a preponou 13 a druhý s odvesnami 6 a 8 a preponou 10 (čo je dvakrát zväčšený klasický trojuholník so stranami 3, 4 a 5).

Riešenie 2

Využijeme fakt, že dĺžky strán pytagorejského trojuholníka majú práve tvar $k(m^2 - n^2)$, $2kmn$, $k(m^2 + n^2)$, kde k, m, n sú kladné celé čísla, pričom $m > n$.

Nech $a = k(m^2 - n^2)$, $b = 2kmn$, $c = k(m^2 + n^2)$. Podľa zadania teda platí

$$\frac{1}{2}ab = a + b + c,$$

t. j.

$$\frac{1}{2}\left(k(m^2 - n^2)\right)(2kmn) = k(m^2 - n^2) + 2kmn + k(m^2 + n^2).$$

Upravujme:

$$\begin{aligned} (m^2 - n^2)kmn &= (m^2 - n^2) + 2mn + (m^2 + n^2), \\ (m^2 - n^2)kmn &= 2m^2 + 2mn, \\ (m-n)(m+n)kmn &= 2m(m+n), \\ kn(m-n) &= 2, \end{aligned}$$

Zostavíme tabuľku všetkých prípadov:

k	n	$m-n$	m	a	b	c
1	1	2	3	8	6	10
1	2	1	3	5	12	13
2	1	1	2	6	8	10

Vzhľadom na symetriu a a b tak dostávame dva (pomerne známe) pytagorejské trojuholníky: prvý s odvesnami 5 a 12 a preponou 13 a druhý s odvesnami 6 a 8 a preponou 10 (čo je dvakrát zväčšený klasický trojuholník so stranami 3, 4 a 5).

25. ročník MO, úloha C-II-1b

Nech $ABCDEF$ je konvexný šesťuholník, ktorý má zhodné vnútorné uhly pri vrcholoch A, B, C, jeho uhlopriečky vychádzajúce z vrcholu A delia uhol BAF na štyri zhodné diely a jeho uhlopriečky vychádzajúce z vrcholu C delia uhol BCD na štyri zhodné diely. Dokážte, že šesťuholník $ABCDEF$ je pravidelný.

Riešenie

Platí

$$180° = |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle BCA| + |\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle ABC| + \frac{1}{4}|\sphericalangle BCD| + \frac{1}{4}|\sphericalangle FAB|$$
$$= |\sphericalangle ABC| + \frac{1}{4}|\sphericalangle ABC| + \frac{1}{4}|\sphericalangle ABC| = \frac{3}{2}|\sphericalangle ABC|,$$

takže $|\sphericalangle ABC| = 120°$. Potom

$$|EAC| = |\sphericalangle EAD| + |\sphericalangle DAB| = \frac{1}{4}|\sphericalangle FAB| + \frac{1}{4}|\sphericalangle BCD| = \frac{1}{4}|\sphericalangle ABC| + \frac{1}{4}|\sphericalangle ABC| = \frac{1}{2}|\sphericalangle ABC| = \frac{1}{2}\cdot 120° = 60°.$$

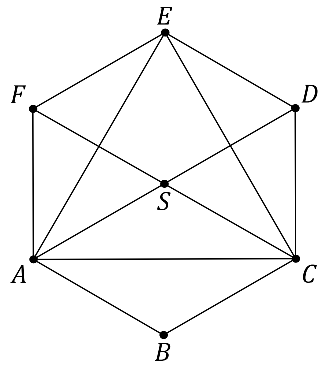
Analogicky $|\sphericalangle ACE| = 60°$, takže trojuholník ACE je rovnostranný.

Keďže

$$|\sphericalangle CAD| = \frac{1}{4}|\sphericalangle FAB| = |\sphericalangle EAD|,$$

AD je os uhla EAC, a teda body C a E sú podľa nej súmerné. Analogicky sú body A a E súmerné podľa CF.

Nech S je priesečník AD a CF. Potom S je priesečník osí uhlov ACE a CAE, je to teda stred trojuholníka ACE.



Keďže

$$|\sphericalangle SAC| = |\sphericalangle DAC| = \frac{1}{4}|\sphericalangle FAB| = \frac{1}{4}|\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle FCA| = |\sphericalangle SCA|,$$

trojuholník SAC je rovnoramenný, a teda $|SA| = |SC|$. Platí

$$|\sphericalangle ACD| = \frac{3}{4}|\sphericalangle BCD| = \frac{3}{4}\cdot 120° = 90°,$$

takže S je stred AD.

Analogicky je S stred CF.

Keďže

$$|\sphericalangle SAC| = |\sphericalangle DAC| = \frac{1}{4}|\sphericalangle FAB| = |\sphericalangle BAC|$$

a analogicky $|\sphericalangle SCA| = |\sphericalangle BCA|$, pričom AC oddeľuje body B a S, body S a B sú súmerné podľa osi AC.

Z toho už vyplýva, že šesťuholník $ABCDEF$ je pravidelný.

27. ročník MO, úloha C-I-6

Nech ABC je trojuholník. Určte všetky body M také, že kružnice opísané trojuholníkom ABM, BCM, CAM sú zhodné.

Riešenie

Trojuholníky ABM, BCM, CAM existujú práve vtedy, keď bod M je rôzny od A, B, C.
Rozoberme prípady:

- Nech M leží na kružnici opísanej trojuholníku ABC, avšak okrem bodov A, B, C.

  V takom prípade sú všetky kružnice opísané trojuholníkom ABM, BCM, CAM sú totožné, takže aj zhodné.

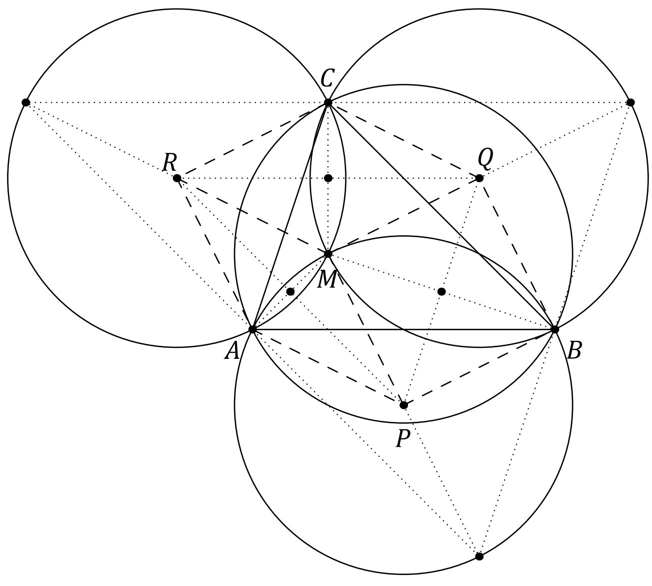
- Nech M neleží na kružnici opísanej trojuholníku ABC.

  Nech bod M vyhovuje. Označme stredy kružníc opísaných trojuholníkom ABM, BCM, CAM postupne P, Q, R.

  Potom platí: $|RC| = |RM| = |QM| = |QC|$, takže $MQCR$ je kosoštvorec. Jeho uhlopriečky CM a QR sú teda kolmé.

  Analogicky sú kosoštvorce $MRAP$ a $MPBQ$. Preto $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{BQ}$, takže $ABQR$ je rovnobežník, a teda úsečky AB a QR sú rovnobežné. To teda znamená, že CM je kolmá na AB, takže M leží na výške ABC z bodu C.

  Analogicky M leží na zvyšných dvoch výškach, je to teda ortocentrum trojuholníka ABC. Keďže je rôzny od A, B, C, trojuholník ABC nie je pravouhlý.



  Ukážeme, že v prípade nepravouhlého trojuholníka ABC jeho ortocentrum M naozaj vyhovuje.

  Vtedy $|QC| = |QM|$ a $|RC| = |RM|$, takže $MQRC$ je deltoid súmerný podľa priamky QR. Tá je teda kolmá na jeho uhlopriečku CM, je teda rovnobežná s priamkou AB. Analogicky $RP \parallel BC$ a $PQ \parallel CA$, takže trojuholníky ABC a QPR sú pri tomto poradí vrcholov podobné.

  Keďže priamka QR rozpoľuje úsečku CM a anlogicky rozpoľujú priamky RP a PQ úsečky AB, resp. BC, obrazom trojuholníka QRP v rovnoľahlosti so stredom M a koeficientom 2 je trojuholník, ktoré strany sú rovnobežné so stranami trojuholníka ABC a prechádzajú jeho protiľahlými vrcholmi. Jeho stredné priečky sú teda strany trojuholníka ABC, takže je jeho obrazom v rovnoľahlosti s koeficientom -2.

  To však znamená, že trojuholníky ABC a PQR sú rovnoľahlé s koeficientom -1 (okrem iného sú teda zhodné), Preto $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{BQ}$, takže polomery kružníc opísaných trojuholníkom CMA a AMB sú zhodné.

  Analogicky je s nimi zhodný aj polomer kružnice opísanej trojuholníku BMC.

Poznámka

S týmito troma kružnicami je zhodná aj kružnica opísaná trojuholníku ABC.