27. ročník MO, úloha B-I-5

Vypočítajte obsah šesťuholníka, ktorý ohraničujú spojnice vrcholov rovnostranného trojuholníka s obsahom 1 s bodmi deliacimi jeho k nim protiľahlé strany na tretiny.

Riešenie

Rozvnostranný trojuholník označme ABC. Vzhľadom na symetrie podľa osí strán vznikne 5 typov útvarov, ich obsahy označme takto:

- 1 centrálny šesťuholník s obsahom a,
- 6 trojuholníkov, ktoré s ním majú spoločnú stranu, s obsahom b,
- 3 päťuholníky s obsahom c,
- 3 štvoruholníky s obsahom d,
- 6 trojuholníkov s obsahom e.

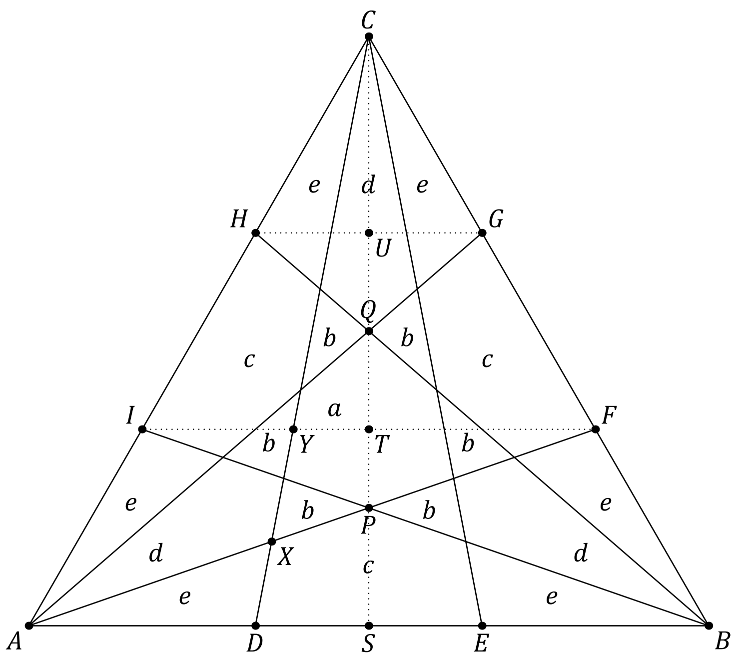
Zrejme teda

$$a + 6b + 3c + 3d + 6e = \text{obsah}(ABC) = 1.$$

Nech D a E sú body úsečky AB, F a G body úsečky BC a H a I body úsečky CA také, že $|AD| = |DE| = |EB| = |BF| = |FG| = |GC| = |CH| = |HI| = |IA|$.
Potom platí

$$b + c + d + 3e = \text{obsah}(ADC) = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |C, AD| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} |AB| \cdot |C, AB|$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |C, AB|\right) = \frac{1}{3}\text{obsah}(ABC) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}.$$

Nech T je ťažisko trojuholníka ABC a U je stred úsečky TC. Nech P priesečník AF a BI a Q priesečník AG a BH. Nech X a Y sú priesečníky CD s priamkami FA, resp. FI.



Úsečka HG je obrazom úsečky AB v rovnoľahlosti so stredom C a koeficientom $\frac{1}{3}$. Je teda aj jej obrazom v rovnoľahlosti so stredom Q a koeficientom $-\frac{1}{3}$. V oboch týchto rovnoľahostiach je stred U úsečky GH obrazom stredu S úsečky AB. Preto platí

$$|CQ| = |CU| + |UQ| = \frac{1}{3}|CS| + \frac{1}{3}|QS| = \frac{1}{3}|CS| + \frac{1}{3}(|CS| - |CQ|) = \frac{2}{3}|CS| - \frac{1}{3}|CQ|,$$

takže

$$\frac{4}{3}|CQ| = \frac{2}{3}|CS|,$$

$$|CQ| = \frac{1}{2}|CS|,$$

a teda Q je stred úsečky CS. Z toho

$$a + 4b + c + 2d + 2e = \text{obsah}(ABQ) = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |QS|$$

$$= \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot \frac{1}{2}|CS| = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CS|\right) = \frac{1}{2}\text{obsah}(ABC) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Podobne, úsečka IF je obrazom úsečky AB v rovnoľahlosti so stredom C a koeficientom $\frac{2}{3}$. Je teda aj jej obrazom v rovnoľahlosti so stredom P a koeficientom $-\frac{2}{3}$. V oboch týchto rovnoľahostiach je stred T úsečky FI obrazom stredu S úsečky AB. Preto platí

$$|CP| = |CT| + |TP| = \frac{2}{3}|CS| + \frac{2}{3}|PS| = \frac{2}{3}|CS| + \frac{2}{3}(|CS| - |CP|) = \frac{4}{3}|CS| - \frac{2}{3}|CP|,$$

takže

$$\frac{5}{3}|CP| = \frac{4}{3}|CS|,$$

$$|CP| = \frac{4}{5}|CS|,$$

a teda

$$|CS| - |PS| = \frac{4}{5}|CS|.$$

$$\frac{1}{5}|CS| = |PS|.$$

Z toho

$$c + 2e = \text{obsah}(ABP) = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |QS| = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot \frac{1}{5}|CS| = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CS|\right) = \frac{1}{5}\text{obsah}(ABC) = \frac{1}{5} \cdot 1 = \frac{1}{5}.$$

Úsečka IY je obrazom úsečky AD v rovnoľahlosti so stredom C a koeficientom $\frac{2}{3}$. Preto

$$|FY| = |FI| - |IY| = \frac{2}{3}|AB| - \frac{2}{3}|AD| = 2|AD| - \frac{2}{3}|AD| = \frac{4}{3}|AD|.$$

Keďže $FY = FI \parallel AB = AD$, trojuholník FYX je teda obrazom trojuholníka ADX v rovnoľahlosti so stredom X a koeficientom $-\frac{4}{3}$. Preto platí

$$|XD| = \frac{3}{4}|XY| = \frac{3}{4}(|YD| - |XD|) = \frac{3}{4}|YD| - \frac{4}{3}|XD| = \frac{3}{4}(|CD| - |CY|) - \frac{3}{4}|XD|$$

$$= \frac{3}{4}\left(|CD| - \frac{2}{3}|CD|\right) - \frac{3}{4}|XD| = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}|CD| - \frac{3}{4}|XD| = \frac{1}{4}|CD| - \frac{4}{3}|XD|,$$

takže

$$\frac{7}{4}|XD| = \frac{1}{4}|CD|,$$

$$|XD| = \frac{1}{7}|CD|.$$

Z toho

$$e = \text{obsah}(ADX) = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |XD| \cdot \sin|\sphericalangle ADX| = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot \frac{1}{7}|CD| \cdot \sin|\sphericalangle ADC|$$

$$= \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |CD| \cdot \sin|\sphericalangle ADC|\right) = \frac{1}{7}\text{obsah}(ADC) = \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |CS|\right)$$

$$= \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}|AB| \cdot |CS|\right) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CS|\right) = \frac{1}{21}\text{obsah}(ABC) = \frac{1}{21} \cdot 1 = \frac{1}{21}.$$

Zhrnutím dostávame sústavu týchto piatich rovníc s piatimi neznámymi:

$$a + 6b + 3c + 3d + 6e = 1,$$

$$b + c + d + 3e = \frac{1}{3},$$

$$a + 4b + c + 2d + 2e = \frac{1}{2},$$

$$c + 2e = \frac{1}{5},$$

$$e = \frac{1}{21}.$$

Z posledných dvoch rovníc máme

$$(c + 2e) - 2e = \frac{1}{5} - 2 \cdot \frac{1}{21},$$

$$c = \frac{21 - 2 \cdot 5}{105} = \frac{21 - 10}{105} = \frac{11}{105}.$$

Z prvej a tretej

$$(a + 6b + 3c + 3d + 6e) - (a + 4b + c + 2d + 2e) = 1 - \frac{1}{2},$$

$$2b + 2c + d + 4e = \frac{1}{2},$$

z druhej potom

$$(2b + 2c + d + 4e) - (b + c + d + 3e) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3},$$

$$b + c + e = \frac{3 - 2}{6} = \frac{1}{6},$$

a teda

$$b = \frac{1}{6} - c - e = \frac{1}{6} - \frac{11}{105} - \frac{1}{21} = \frac{35 - 22 - 10}{210} = \frac{3}{210} = \frac{1}{70}.$$

Z druhej rovnice potom

$$d = \frac{1}{3} - b - c - 3e = \frac{1}{3} - \frac{1}{70} - \frac{11}{105} - 3 \cdot \frac{1}{21} = \frac{70 - 3 - 22 - 3 \cdot 10}{210} = \frac{70 - 3 - 22 - 30}{210} = \frac{15}{210} = \frac{1}{14},$$

a napokon z tretej

$$a = \frac{1}{2} - 4b - c - 2d - 2e = \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{70} - \frac{11}{105} - 2 \cdot \frac{1}{14} - 2 \cdot \frac{1}{21}$$

$$= \frac{105 - 4 \cdot 3 - 22 - 2 \cdot 15 - 2 \cdot 10}{210} = \frac{105 - 12 - 22 - 30 - 20}{210} = \frac{21}{210} = \frac{1}{10}.$$

Obsah šesťuholníka je teda $\frac{1}{10}$.

19. ročník MO, úloha Z-I-2

Nájdite všetky obdĺžniky, ktorých strany majú celočíselné dĺžky a ich obvod sa rovná ich obsahu.

Riešenie

Dĺžky strán označme hľadaného obdĺžnika a a b, bez ujmy na všeobecnosti $a \leq b$.
Ak sú a, b veľkosti strán hľadaného obdĺžnika, tak podľa zadania platí

$$2a + 2b = ab.$$

Upravujme:

$$4 = ab - 2a - 2b + 4,$$

$$4 = (a - 2)(b - 2).$$

Číslo $a - 2$ je teda deliteľom čísla 4. Pritom z $a \leq b$ máme $a - 2 \leq b - 2$.
Zostavme tabuľku všetkých prípadov (v ktorej $b - 2 = \frac{4}{a-2}$):

$a-2$	$b-2$	a	b
1	4	3	6
2	2	4	4
4	1	–	–
−1	−4	–	–
−2	−2	–	–
−4	−1	–	–

Ľahko vidieť, že oba získané obdĺžniky 3×6 a 4×4 sú naozaj riešeniami úlohy.