25. ročník MO, úloha C-I-5

Na danej kružnici sa pohybujú v tom istom smere stálymi rýchlosťami tri body A, B, C. Prvý má dobu obehu T, druhý $\frac{1}{2}T$, tretí $\frac{1}{3}T$. V čase 0 všetky tri body splývali. Koľkokrát v časovom intervalu $[0, T]$ tvorili body A, B, C vrcholy pravouhlého trojuholníka?

Riešenie

Za dobu $\frac{T}{6}$ bod A prejde $\frac{1}{6}$ kružnice, bod B prejde $\frac{1}{3}$ kružnice a bod C prejde $\frac{1}{2}$ kružnice. Bod A je teda najpomalší a bod C najrýchlejší. Za dobu $\frac{T}{6} \cdot x$, kde $0 \leq x \leq 6$, teda body A, B, C prejdú postupne $\frac{x}{6}$ kružníc, $\frac{x}{3}$ kružníc a $\frac{x}{2}$ kružníc.

Podľa Tálesovej vety body A, B, C tvoria vrcholy pravouhlého trojuholníka, práve keď sú dva z nich krajnými body toho istého priemeru danej kružnice, pričom tretí bod nesplynie so žiadnym z nich. Keďže na začiatku sú všetky tri body totožné, medzi dráhami prvých dvoch bodov je rozdiel nepárny počet polkružníc. Rozoberme prípady:

- Nech sú tieto dva body A a B.

  Keďže bod B prejde najviac 2 kružnice čiže 4 polkružníc, tento nepárny počet polokruhov je teda 1 alebo 3. Rozoberme prípady:

  - Nech
    $$\frac{x}{6} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{x}{3}.$$
    Ekvivalentne upravujme:
    $$x + 3 = 2x,$$
    $$3 = x.$$
    Za dobu $\frac{T}{6} \cdot 3$ prejdú body A, B, C postupne $\frac{1}{2}$ kružnice, 1 kružnicu a $\frac{3}{2}$ kružnice. To však znamená, že body A a C splývajú.

    Tento prípad teda nevyhovuje.
  - Nech
    $$\frac{x}{6} + 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{x}{3}.$$
    Ekvivalentne upravujme:
    $$x + 9 = 2x,$$
    $$9 = x,$$
    čo je však spor s predpokladom $x \leq 6$.

    Tento prípad teda nevyhovuje.

- Nech sú tieto dva body A a C.

  Keďže bod C prejde najviac 2 kružnice čiže 6 polkružníc, tento nepárny počet polokruhov je teda 1, 3 alebo 5. Rozoberme prípady:

  - Nech
    $$\frac{x}{6} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{x}{2}.$$
    Ekvivalentne upravujme:
    $$x + 3 = 3x,$$
    $$3 = 2x,$$
    $$\frac{3}{2} = x.$$
    Za dobu $\frac{T}{6} \cdot \frac{3}{2}$ prejdú body A, B, C postupne $\frac{1}{4}$ kružnice, $\frac{1}{2}$ kružnice a $\frac{3}{4}$ kružnice, takže bod B nesplýva ani s bodom A ani s bodom C.

    Tento prípad teda vyhovuje.

- Nech
  $$\frac{x}{6} + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{x}{2}.$$
  Ekvivalentne upravujme:
  $$x + 9 = 3x,$$
  $$9 = 2x,$$
  $$\frac{9}{2} = x.$$
  Za dobu $\frac{T}{6} \cdot \frac{9}{2}$ prejdú body A, B, C postupne $\frac{3}{4}$ kružnice, $\frac{3}{2}$ kružnicu a $\frac{9}{4}$ kružnice, takže bod B nesplýva ani s bodom A ani s bodom C.
  Tento prípad teda vyhovuje.
- Nech
  $$\frac{x}{6} + 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{x}{2}.$$
  Ekvivalentne upravujme:
  $$x + 15 = 3x,$$
  $$15 = 2x,$$
  $$\frac{15}{2} = x,$$
  čo je však spor s predpokladom $x \leq 6$.
  Tento prípad teda nevyhovuje.

- Nech sú tieto dva body B a C.

  Keďže bod C prejde najviac 2 kružnice čiže 6 polkružníc, tento nepárny počet polokruhov je teda 1, 3 alebo 5. Rozoberme prípady:

  - Nech
    $$\frac{x}{3} + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{x}{2}.$$
    Ekvivalentne upravujme:
    $$2x + 3 = 3x,$$
    $$3 = x.$$
    Za dobu $\frac{T}{6} \cdot 3$ prejdú body A, B, C postupne $\frac{1}{2}$ kružnice, 1 kružnicu a $\frac{3}{2}$ kružnice, takže bod A splýva s bodom C.
    Tento prípad teda nevyhovuje.
  - Nech
    $$\frac{x}{3} + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{x}{2}.$$
    Ekvivalentne upravujme:
    $$2x + 9 = 3x,$$
    $$9 = x,$$
    čo je však spor s predpokladom $x \leq 6$.
    Tento prípad teda nevyhovuje.
  - Nech
    $$\frac{x}{3} + 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{x}{2}.$$
    Ekvivalentne upravujme:
    $$2x + 15 = 3x,$$
    $$15 = x,$$
    čo je však spor s predpokladom $x \leq 6$.
    Tento prípad teda nevyhovuje.

Zhrnutím dostávame, že existujú 2 okamihy, keď je ABC pravouhlý trojuholník, a to v časoch $\frac{T}{6} \cdot \frac{3}{2}$ čiže $\frac{1}{4}T$ a $\frac{T}{6} \cdot \frac{9}{2}$ čiže $\frac{3}{4}T$.

23. ročník MO, úloha B-I-1

Nech M je množina

a) $\mathbb{R}$,

b) $\mathbb{Z}$.

Nájdite všetky dvojice neprázdnych podmnožín (A, B) množiny M také, že $A \cup B = M$, aspoň jedna z množín $M \setminus A$ a $M \setminus B$ je neprázdna a platí:

- Ak $x \in A$ a $y \in A$, tak $x + y \in A$.
- Ak $x \in A$ a $y \in B$, tak $x + y \in B$.
- Ak $x \in B$ a $y \in B$, tak $x + y \in A$.

Riešenie

a) Nech a je ľubovoľné reálne číslo. Rozoberme prípady:

   - Ak $\frac{a}{2} \in A$, tak podľa prvej vlastnosti $a = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \in A$.
   - Ak $\frac{a}{2} \in B$, tak podľa tretej vlastnosti $a = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \in A$.

   Množina A teda obsahuje všetky reálne čísla.

   Keďže B je neprázdna, existuje reálne číslo b také, že $b \in B$. Nech c je ľubovoľné reálne číslo. Keďže $c - b \in A$ a $b \in B$, platí $c = (c - b) + b \in B$. Množina B teda tiež obsahuje všetky reálne čísla.

   To však znamená, že obe množiny $\mathbb{R} \setminus A$ a $\mathbb{R} \setminus B$ sú prázdne, čo je spor s predpokladom.

   Neexistuje teda žiadna vyhovujúca dvojica.

b) Najprv ukážeme (sporom), že množiny A a B sú disjunktné. Nech $c \in A \cap B$. Nech x je ľubovoľné reálne číslo. Keďže $x - c$ je celé číslo, patrí do jednej z množín A a B. Rozoberme prípady:

   - Nech $x - c \in A$.
     Keďže $c \in A$, podľa prvej vlastnosti $x = (x - c) + c \in A$, a keďže $c \in B$, podľa druhej vlastnosti $x = (x - c) + c \in B$. Platí teda $x \in A \cap B$.
   - Nech $x - c \in B$.
     Keďže $c \in A$, podľa druhej vlastnosti $x = c + (x - c) + c \in B$, a keďže $c \in B$, podľa tretej vlastnosti $x = c + (x - c) \in A$. Platí teda $x \in A \cap B$.

   Ukázali sme teda, že $A \cap B = \mathbb{Z}$, takže $A = B = \mathbb{Z}$. To však znamená, že obe množiny $\mathbb{R} \setminus A$ a $\mathbb{R} \setminus B$ sú prázdne, čo je spor s predpokladom.

   Nech p je ľubovoľné párne celé číslo, existuje teda celé číslo k také, že $p = 2k$. Rozoberme prípady:

   - Ak $k \in A$, tak podľa prvej vlastnosti $p = 2k = k + k \in A$.
   - Ak $k \in B$, tak podľa tretej vlastnosti $p = 2k = k + k \in A$.

   Množina A teda obsahuje všetky párne celé čísla.

   Keďže B je neprázdna množina, existuje celé číslo n také, že $n \in B$. Podľa predchádzajúcich odsekov je n nepárne, čiže existuje celé číslo m také, že $n = 2m + 1$.

   Nech u je ľubovoľné nepárne číslo, čiže existuje celé číslo v také, že $u = 2v + 1$. Potom platí

   $$u - n = (2v + 1) - (2m + 1) = 2v - 2m = 2(v - m),$$

   čo je párne číslo. Platí teda $u - n \in A$ a $n \in B$, takže podľa druhej vlastnosti $u = (u - n) + n \in B$. Množina B teda obsahuje všetky nepárne celé čísla.

   Ukázali sme teda, že množina A obahuje práve párne a množina B práve nepárne celé čísla. Tieto množiny sú neprázdne, ich zjednotenie je množina $\mathbb{Z}$ a aspoň jeden z ich doplnkov je neprázny (dokonca oba). Súčet dvoch párnych čísel i súčet dvoch nepárnych čísel je párne číslo a súčet párneho a nepárneho čísla je nepárne číslo. Táto dvojica teda vyhovuje.

   Existuje teda jediná vyhovujúca dvojica.

26. ročník MO, úloha A-I-4

Nech a_0, a_1, a_2 sú celé čísla také, že rozdiel žiadnych dvoch z nich nie je deliteľný 3. Dokážte, že existuje podmnožina celých čísel M taká, že

$$\{\{a_0 + x, a_1 + x, a_2 + x\} : x \in M\}$$

je rozklad množiny $\mathbb{Z}$.

Riešenie

Čísla a_0, a_1, a_2 teda dávajú pri delení 3 rôzne zvyšky, bez ujmy na všeobecnosti nech sú to postupne 0, 1, 2. Existujú teda celé čísla b_0, b_1, b_2 také, že $a_0 = 3b_0 + 0$, $a_1 = 3b_1 + 1$, $a_2 = 3b_2 + 2$.

Nech M je množina všetkých celých čísel deliteľných 3. Ukážeme, že $\{a_0 + x, a_1 + x, a_2 + x : x \in M\}$ je rozklad množiny $\mathbb{Z}$:

- Dokážeme, že každé celé číslo sa nachádza v niektorej množine tohto systému:

  Nech c je celé číslo. Nech q je podiel a r zvyšok po delení čísla b a čísla 3, platí teda $c = 3q + r$.

  Potom

  $$c - a_r = (3q + r) - (3b_r + r) = 3q - 3b_r = 3(q - b_r),$$

  takže $c = 3(q - b_r) + a_r$. Nech $d = q - b_r$, potom $c = 3d + a_r$ a

  $$c = 3d + a_r = a_r + 3d \in \{a_0 + 3d, a_1 + 3d, a_2 + 3d\},$$

  pričom $3d \in M$.

- Dokážeme, že každé dve rôzne množiny systému sú disjunktné:

  Nech x a y sú rôzne čísla z množiny M také, že

  $$\{a_0 + x, a_1 + x, a_2 + x\} \cap \{a_0 + y, a_1 + y, a_2 + y\} \neq \emptyset.$$

  Existujú teda čísla r a s z $\{0, 1, 2\}$ také, že

  $$a_r + x = a_s + y,$$

  potom

  $$(3b_r + r) + x = (3b_s + s) + y,$$

  $$r - s = y - s + 3b_s - 3b_r,$$

  Keďže čísla y, x, $3b_s$, $3b_r$ sú deliteľné 3, pravá strana je deliteľná 3, a teda aj ľavá strana $r - s$ je deliteľná 3. Keďže $r, s \in \{0, 1, 2\}$, platí $r = s$. Z toho

  $$a_r + x = a_r + y,$$

  $$x = y,$$

  čo je spor.

To znamená, že $\{\{a_0 + x, a_1 + x, a_2 + x\} : x \in M\}$ je rozklad množiny $\mathbb{Z}$.

Poznámka

(Martin Vodička.)

Úlohu možno rozšíriť tak, že hľadáme všetky také množiny M.

Budeme hovoriť, že množina M je *kúzelná* pre trojicu (a_0, a_1, a_2), ak spĺňa podmienky zo zadania. Budeme hovoriť, že trojica celých čísel (a_0, a_1, a_2), pre ktorú existuje kúzelná množina M, je *dobrá*.

Na začiatok môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že $a_0 < a_1 < a_2$. Ukážeme niekoľko pomocných tvrdení:

- Trojica celých čísel (a_0, a_1, a_2) je dobrá práve vtedy, keď trojica $(0, a_1 - a_0, a_2 - a_1)$ je dobrá.

  - Ľahko overíme, že M je kúzelná množina pre trojicu (a_0, a_1, a_2) práve vtedy, keď $\{m + a_0 : m \in M\}$ je kúzelná množina pre trojicu $(0, a_1 - a_0, a_2 - a_1)$. V oboch prípadoch dostávame totiž ako rozklad rovnaký systém množín.

- Nech d je kladné celé číslo. Trojica kladných celých čísel $(0, da_1, da_2)$ je dobrá práve vtedy, keď trojica $(0, a_1, a_2)$ je dobrá.

- Nech trojica $(0, da_1, da_2)$ je dobrá a M je kúzelná množina pre túto trojicu. Označme M_d množinu čísel z M, ktoré sú deliteľné d. Množina $\{x, x + da_1, x + da_2\}$ obsahuje číslo deliteľné d iba vtedy, ak $d \mid x$. Navyše, ak $d \mid x$, tak obsahuje iba čísla deliteľné d. Z toho vyplýva, že $\{\{x, x + da_1, x + da_2\} : x \in M_d\}$ musí byť rozklad množiny všetkých d-násobkov celých čísel. Nech $M' = \{x - d : x \in M_d\}$. Potom $\{\{x, x + a_1, x + a_2\} : x \in M'\}$ je rozklad množiny $\mathbb{Z}$, z čoho vyplýva, že M' je kúzelná množina pre trojicu $(0, a_1, a_2)$.

  Naopak, nech $(0, a_1, a_2)$ je dobrá trojica s kúzelnou množinou M. Nech $M' = \{dx + i : x \in M \wedge i \in \{0, 1, \dots, d-1\}\}$. Ľahko overíme, že množina M' je kúzelná pre trojicu $(0, da_1, da_2)$.

Z tohto vyplýva, že nám stačí uvažovať trojice tvaru $(0, a_1, a_2)$, kde a_1 a a_2 sú nesúdeliteľné kladné celé čísla.

Predpokladajme, že M je kúzelná množina pre takúto trojicu, a nech $y \in M$. Potom nutne $y + a_1, y + a_2 \notin M$. Uvažujme číslo $y + a_1 + a_2$. To musí byť v nejakej množine tvaru $\{x, x + a_1, x + a_2\}$ pre x z množiny M. Avšak $y + a_1, y + a_2 \notin M$, z čoho vyplýva, že jediná možnosť je $y + a_1 + a_2 \in M$. Indukciou $y + k(a_1 + a_2) \in M$ pre všetky k z $\mathbb{N}^+$.

Označme $\overline{M}$ množinu zvyškov čísel z M po delení $a_1 + a_2$, t. j.

$$\overline{M} = \{z \in \mathbb{Z} : 0 \leq z \leq a_1 + a_2 - 1 \wedge (\exists x \in M) x \bmod (a_1 + a_2) = z \bmod (a_1 + a_2)\}.$$

Tvrdíme, že pre ľubovoľný zvyšok z platí, že v množinách $\{x, x + a_1, x + a_2\}$ pre x z $\overline{M}$ sa nachádza práve jedno číslo so zvyškom z po delení $a_1 + a_2$. Ak sa tam číslo s nejakým zvyškom nenachádza, tak sa číslo s takýmto zvyškom nevyskytuje v žiadnej množine $\{x, x + a_1, x + a_2\}$ pre x z M, čo je spor s kúzelnosťou množiny M.

Naopak, nech existuje zvyšok z taký, že sa tam nachádza dvakrát. To znamená, že existujú dve celé čísla $x, y \in M$ s rôznymi zvyškami po delení $a_1 + a_2$ také, že v množine $\{x, x + a_1, x + a_2\}$ sa nachádza číslo, ktoré je o $k(a_1 + a_2)$ väčšie ako nejaké číslo z množiny $\{y, y + a_1, y + a_2\}$ pre nejaké k z $\mathbb{N}^+$. Avšak aj $y + k(a_1 + a_2) \in M$. Z toho vyplýva, ž e množiny $\{x, x + a_1, x + a_2\}$ a $\{y + k(a_1 + a_2), y + k(a_1 + a_2) + a_1, y + k(a_1 + a_2) + a_2\}$ majú prienik, čo je spor.

Keďže počet všetkých možných zvyškov je $a_1 + a_2$, nutne $3 \mid a_1 + a_2$. Keďže a_1 a a_2 sú nesúdeliteľné, jedno z nich dáva zvyšok 1 a druhé zvyšok 2 po delení 3. Navyše takéto trojice sú dobré podľa konštrukcie z originálneho riešenia.

Zhrnutím dostávame, že vyhovujú trojice tvaru $(a_0, a_0 + da_1, a_0 + da_2)$, kde $a_0 \in \mathbb{Z}$, $d, a_1, a_2 \in \mathbb{N}^+$ a a_1 a a_2 sú nesúdeliteľné čísla, ktoré dávajú zvyšky 1 a 2 po delení 3. Okrem toho vyhovujú všetky permutácie takýchto trojíc.

(Môžeme si rozmyslieť, že niektoré predpoklady môžeme z množiny riešení vyhodiť, pretože nasledujúci popis stále dáva tú istú množinu riešení: Je to množina všetkých trojíc tvaru $(a_0, a_0 + da_1, a_0 + da_2)$, kde $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{N}^+$ a čísla a_1 a a_2 dávajú zvyšky 1 a 2 po delení 3.)

23. ročník MO, úloha A-II-3b

V rovine je daných $3n$ bodov, z ktorých žiadne tri neležia na tej istej priamke. Dokážte, že je možné zostrojiť n disjunktných trojuholníkov s vrcholmi v týchto bodoch.

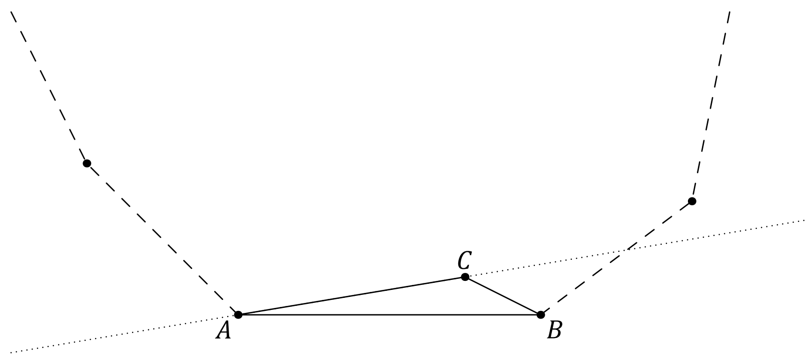
Riešenie

Tvrdenie dokážeme indukciou:

1 Pre prirodzené číslo 0 je tvrdenie triviálne pravdivé.

2 Nech je tvrdenie pravdivé pre prirodzené číslo k.

Majme $3(k+1)$ bodov. Nech AB je jedna zo strán jeho konvexného obalu. Nech C je ten zo zvyšných bodov, že uhol BAC je najmenší možný.



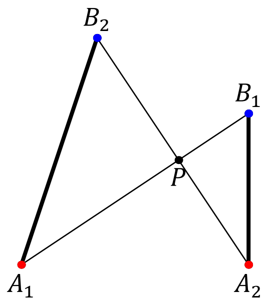
To znamená, všetkých ostatných $3k$ bodov leží v polrovine opačnej k polrovine ACB. Podľa indukčného predpokladu je možné zostrojiť k disjunktných trojuholníkov s vrcholmi v týchto bodoch. Všetky tieto trojuholníky ležia v polrovine opačnej k polrovine ACB, sú teda disjunktné s trojuholníkom ABC. Zostrojili sme tak $k+1$ disjunktných trojuholníkov s vrcholmi v týchto $3(k+1)$ bodoch. takže tvrdenie je pravdivé aj pre prirodzené číslo $k+1$.

V rovine je daných n červených a n modrých bodov tak, že žiadne tri neležia na priamke. Dokážte, že vieme zostrojiť n disjunktných úsečiek takých, že každá z nich má jeden koniec v modrom a druhý v červenom bode.

Riešenie

Pod konfiguráciou budeme rozumieť n úsečiek s rôznofarbenými koncami takých, že žiadne dve nemajú spoločný vrchol. V každej konfigurácii Každému červenému vrcholu je tak priradený iný modrý vrchol, takže celkový počet konfigurácií je $n!$, takže množina konfigurácií je konečná a neprázdna.

Zo všetkých konfigurácií vyberme tú, ktorá má najmenší súčet dĺžok jej úsečiek. Ukážeme sporom, že všetky jej úsečky sú disjunktné: Nech A_1B_1 a A_2B_2 sú úsečky so spoločným bodom také, že A_1 a A_2 sú červené body a B_1 a B_2 modré. Keďže žiadne tri z týchto bodov neležia na priamke, tieto úsečky sa pretínajú vo vnútornom bode, a teda $A_1A_2B_1B_2$ je konvexný štvoruholník. Nech P je ich priesečník.



Potom však podľa trojuholníkovej nerovnosti v (nedegenerovaných) trojuholníkoch A_1PB_2 a A_2PB_1 platí

$$|A_1B_1| + |A_2B_2| = (|A_1P| + |PB_1|) + (|A_2P| + |PB_2|) = (|A_1P| + |PB_2|) + (|A_2P| + |PB_1|) > |A_1B_2| + |A_2B_1|\,,$$

takže výmenou úsečiek A_1B_1 a A_2B_2 v pôvodnej konfigurácii za úsečky A_1B_2 a A_2B_1 dostávame konfiguráciu s menším súčtom dĺžok jej úsečiek. To je však spor.