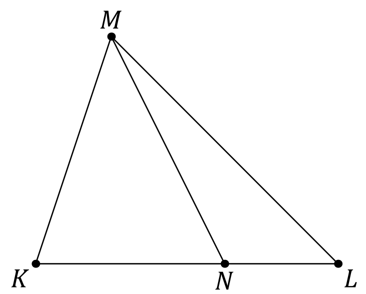
25. ročník MO, úloha A-II-2a

Dokážte, že ak trojuholník $\mathcal{T}$ je časťou trojuholníka $\mathcal{U}$, tak obvod$(\mathcal{T}) \leq$ obvod$(\mathcal{U})$.

Riešenie

Najprv dokážeme pomocné tvrdenie:

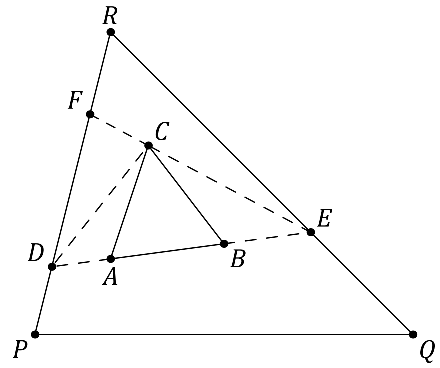
- Nech KLM je trojuholník a N je bod úsečky KL. Potom obvod$(KNM) \leq$ obvod(KLM).
  -



Podľa trojuholníkovej nerovnosti platí

$$\text{obvod}(KNM) = |KN| + |NM| + |MK| \leq |KN| + (|NL| + |LM|) + |MK|$$
$$= (|KN| + |NL|) + |LM| + |MK| = |KL| + |LM| + |MK| = \text{obvod}(KLM).$$

Ukážeme, že bez ujmy na všeobecnosti ležia vrcholy trojuholníka ABC na hranici trojuholníka $\mathcal{U}$. Nech $\mathcal{T}$ je ABC. Nech DE je úsečka, ktorá je prienikom trojuholníka $\mathcal{U}$ s priamkou AB, pričom D leží na polpriamke opačnej k polpriamke AB. Potom AB je časťou DE. Nech F je priesečník polpriamky opačnej k polpriamke EC a hranice trojuholníka $\mathcal{U}$.



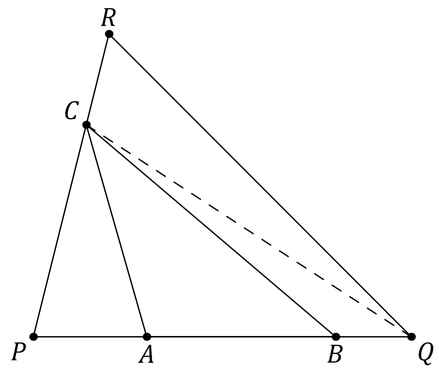
Potom trikrát podľa pomocného tvrdenia platí

$$\text{obvod}(\mathcal{T}) = \text{obvod}(ABC) \leq \text{obvod}(DBC) \leq \text{obvod}(DEC) = \text{obvod}(ECD) \leq \text{obvod}(EFD) = \text{obvod}(DEF).$$

Pritom všetky tri body D, E, F ležia na hranici trojuholníka $\mathcal{U}$.

Nech teda body A, B, C ležia na hranici trojuholníka $\mathcal{U}$. Rozoberme prípady:

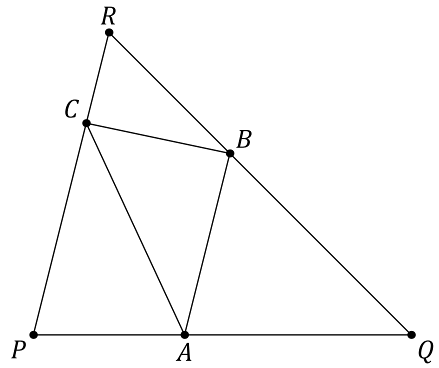
- Nech dva body, ležia na jednej strane a tretí na inej.



Označme P, Q, R vrcholy trojuholníka $\mathcal{U}$, pričom A a B ležia na PQ a C na RP. Potom trikrát podľa pomocného tvrdenia platí

$$\text{obvod}(\mathcal{T}) = \text{obvod}(ABC) \le \text{obvod}(PBC) \le \text{obvod}(PQC) = \text{obvod}(CPQ) \le \text{obvod}(RPQ)\text{obvod}(PQR).$$

- Nech všetky tri body A, B, C ležia na rôznych stranách trojuholníka $\mathcal{T}$.



Označme P, Q, R vrcholy trojuholníka $\mathcal{U}$, pričom A leží na PQ, B na QR a C na RP. Potom trikrát podľa trojuholníkovej nerovnosti dostávame

$$\text{obvod}(\mathcal{T}) = \text{obvod}(ABC) = |AB| + |BC| + |CA| \le (|AQ| + |QB|) + (|BR| + |RC|) + (|CP| + |PA|)$$

$$= (|PA| + |AQ|) + (|QB| + |BR|) + (|RC| + |CP|) = |PQ| + |QR| + |RP| = \text{obvod}(PQR) = \text{obvod}(\mathcal{U}).$$

25. ročník MO, úloha B-I-2

Koľkými spôsobmi možno ofarbiť v konvexnom 9-uholníku 5 vrcholov na červeno a zostávajúce 4 na modro tak, aby práve 13 jeho uhlopriečok spájalo vrcholy rovnakej farby?

Riešenie

Medzi červenými vrcholmi existuje $\binom{5}{2}$ čiže 10 spojníc, medzi modrými $\binom{4}{2}$ čiže 6 spojníc, čo je spolu 16. Znamená to, že $16 - 13$ čiže 3 z týchto spojníc sú strany tohto 9-uholníka. Existujú teda práve 3 dvojice susedných vrcholov rovnakej farby.

Rozoberme prípady vzájomnej polohy modrých vrcholov:

- Nech žiadne dva modré vrcholy nie sú susedné.

  Tieto modré vrcholy po obvode rozdelia červené na 4 neprázdne skupiny. V jednej z nich sú 2 červené vrcholy a vo zvyšných troch skupinách je 1. Celkovo teda existuje len 1 dvojica rovnakofarebných susedov.

  Tento prípad teda nenastane.

- Nech existuje práve 1 dvojica susedných modrých vrcholov.

  Modré vrcholy po obvode rozdelia červené vrcholy na 3 neprázdne skupiny. Počty červených vrcholov v nich môžu byť práve $(3, 1, 1)$, $(2, 2, 1)$, $(2, 1, 2)$, $(1, 3, 1)$, $(1, 2, 2)$, $(1, 1, 3)$, čo je 6 možností. Pre každú z týchto konfigurácií existuje 9 možností výberu, ktoré dva modré susedné vrcholy budú susediť. Keďže takáto dvojica je len jedna, žiadna možnosť sa nezopakuje.

  V tomto prípade teda existuje $6 \cdot 9$ čiže 54 spôsobov ofarbenia vrcholov.

- Nech existujú práve 2 dvojice susedných modrých vrcholov.

  Existuje teda práve 1 dvojica susedných červených vrcholov. Modré vrcholy po obvode rozdelia červené na 2 neprázdne skupiny. Dvojica susedných červených vrcholov je práve v jednej z nich, takže v jeden skupine sú 2 červené a v druhej 1. Spolu sú teda 3 červené vrcholy, čo je spor.

- Nech existujú práve 3 dvojice susedných modrých vrcholov.

  To znamená, že všetky 4 modré, a teda i 5 červených vrcholov tvorí súvislé skupiny. Existujú teda 4 dvojice susedných červených vrcholov, čo je spor.

  Tento prípad teda nenastane.

Zhrnutím dostávame, že existuje 54 vyhovujúcich spôsobov ofarbenia vrcholov.

25. ročník MO, úloha A-III-1

Určte všetky trojice celých čísel (x, y, z) také, že

$$x^2 + y^2 = 3z^2.$$

Riešenie

Ak $z = 0$, tak

$$0 \leq x^2 + y^2 = 3z^2 = 3 \cdot 0^2 = 0,$$

z čoho $x = y = 0$. Keďže

$$0^2 + 0^2 = 0 + 0 = 0 = 3 \cdot 0 = 3 \cdot 0^2,$$

trojica $(0, 0, 0)$ je riešením.

Nech (x, y, z) je vyhovujúca trojica taká, že $z \neq 0$ a z^2 je najmenšie možné. Nech $u = x \bmod 3$ a $v = \bmod 3$, takže existujú celé čísla a a b také, že $x = 3a + u$ a $y = 3b + v$. Potom

$$(3a + u)^2 + (3b + v)^2 = 3z^2,$$

$$(9a^2 + 6au + u^2) + (9b^2 + 6bv + v^2) = 3z^2,$$
$$(9a^2 + 6au + 9b^2 + 6bv) + (u^2 + v^2) = 3z^2,$$
$$3(3a^2 + 2au + 3b^2 + 2bv) + (u^2 + v^2) = 3z^2,$$
$$u^2 + v^2 = 3z^2 - 3(3a^2 + 2au + 3b^2 + 2bv),$$
$$u^2 + v^2 = 3\left(z^2 - (3a^2 + 2au + 3b^2 + 2bv)\right),$$

takže číslo $u^2 + v^2$ je deliteľné 3. Avšak $u, v \in \{0, 1, 2\}$, takže $u^2, v^2 \in \{0, 1, 4\}$, a teda $u^2 + v^2 \in \{0, 1, 2, 4, 5\}$. To teda znamená, že $u^2 + v^2 = 0$, a teda $u = v = 0$. Z toho $x = 3a$ a $y = 3b$. Potom

$$(3a)^2 + (3b)^2 = 3z^2,$$

$$9a^2 + 9b^2 = 3z^2,$$
$$3a^2 + 3b^2 = z^2,$$
$$3(a^2 + b^2) = z^2.$$

Číslo z^2 je teda deliteľné 3, takže aj číslo z je deliteľné 3. Existuje teda celé číslo c také, že $z = 3c$, a teda $c \neq 0$. Potom platí

$$3(a^2 + b^2) = (3c)^2,$$
$$3(a^2 + b^2) = 9c^2,$$
$$a^2 + b^2 = 3c^2.$$

To však znamená, že trojica (a, b, c) je tiež vyhovujúca trojica, avšak

$$z^2 = (3c)^2 = 9c^2 > c^2,$$

čo je spor s mininmalitou z^2. Neexistuje preto žiadne riešenie (x, y, z) také, že $z \neq 0$.

Jediným riešením je teda trojica $(0, 0, 0)$.

25. ročník MO, úloha C-II-3a

Vnútri jednotkovej kružnice sú štyri rôzne body. Dokážte, že sú medzi nimi dva, ktorých vzdialenosť je menšia než $\sqrt{2}$.

Riešenie

Stred kružnice označme S. Rozoberme prípady:

- Nech S je jeden z týchto štyroch bodov.

  Potom jeho vzdialenosť od ľubovoľného iného bodu je najviac 1, teda je menšia ako $\sqrt{2}$.

- Nech S nie je ani jeden z týchto štyroch bodov.

  Body označme A, B, C, D. Medzi polpriamkami SA, SB, SC, SD existujú dve, ktoré zvierajú uhol najviac 90°, bez ujmy na všeobecnosti nech sú to SA a SB. Podľa kosínusovej vety v trojuholníku ABS potom platí

  $$|AB|^2 = |AS|^2 + |BS|^2 - 2 \cdot |AS| \cdot |BS| \cdot \cos|\sphericalangle ASB| = |AS|^2 + |BS|^2 - 2 \cdot |AS| \cdot |BS| \cdot \cos 90°$$

  $$= |AS|^2 + |BS|^2 - 2 \cdot |AS| \cdot |BS| \cdot 0 = |AS|^2 + |BS|^2 - 0 = |AS|^2 + |BS|^2 < 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2,$$

  takže $|AB| < \sqrt{2}$.