25. ročník MO, úloha B-II-3b

a) Dokážte, že pre každé reálne kladné číslo a platí

$$a + \frac{1}{a} \geq 2,$$

a zistite, kedy nastane rovnosť.

b) Nájdite všetky kladné riešenia sústavy rovníc

$$x_1 + \frac{1}{x_2} = 2,$$

$$x_2 + \frac{1}{x_3} = 2,$$

$$x_3 + \frac{1}{x_1} = 2.$$

Riešenie

a) Nech ? je $=$ alebo $\geq$. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:

$$a + \frac{1}{a} \ ?\ 2,$$

$$a^2 + 1 \ ?\ 2a,$$

$$a^2 - 2a + 1 \ ?\ 0,$$

$$(a-1)^2 \ ?\ 0.$$

Ak ? je $\geq$, tieto tvrdenia platia.

Ak ? je $=$, ďalej ekvivalentne

$$a - 1 = 0,$$

$$a = 1.$$

Rovnosť teda nastáva práve v prípade $a = 1$.

b) Podľa časti a) dostávame

$$2+2+2 = \left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right) + \left(x_2 + \frac{1}{x_3}\right) + \left(x_3 + \frac{1}{x_1}\right) = \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) + \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) + \left(x_3 + \frac{1}{x_3}\right) \geq 2+2+2.$$

Platí teda rovnosť, takže $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. V takom prípade je každá rovnica sústavy

$$1 + \frac{1}{1} = 2,$$

čo naozaj platí.

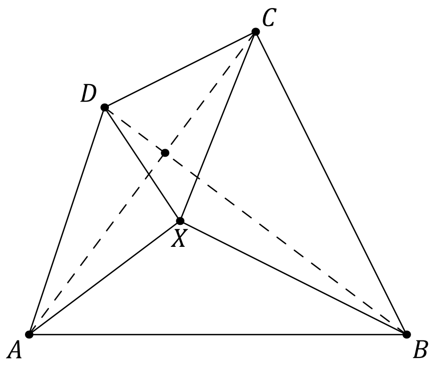
Jediným riešením sústavy je teda trojica $(1, 1, 1)$.

25. ročník MO, úloha Z-I-3

Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník- Nájdite všetky body, ktorých súčet vzdialeností od bodov A, B, C, D je najmenší.

Riešenie

Nech X je ľubovoľný bod.



Potom podľa trojuholníkových nerovností v trojuholníkoch ACX a BDX platí

$$|AX| + |BX| + |CX| + |DX| = (|AX| + |CX|) + (|BX| + |DX|) \geq |AC| + |BD|,$$

pričom rovnosť sa nadobúda práve v prípade, keď je bod X bodom oboch úsečiek AC a BD, teda keď je to priesečník uhlopriečok $ABCD$.

25. ročník MO, úloha C-II-2a

Dokážte, že z 50 ľubovoľných rôznych prvočísel je možné vybrať 13 takých, že rozdiel každých dvoch z nich je deliteľný 5.

Riešenie

Aspoň 49 z týchto prvočísel je rôznych od 5, takže ich zvyšok po delení 5 je rôzny od 0, a teda je to jeden zo 4 ostatnýchh zvyškov. Podľa Diricheltovho princípu existuje spomedzi týchto 49 prvočísel aspoň $\left\lceil \frac{49}{4} \right\rceil$ čiže 13 s rovnakým zvyškom. Rozdiel každých dvoch je potom deliteľný 5.

25. ročník MO, úloha B-II-1a

Nech p a q sú kladné reálne čísla také, že $pq \leq 1$. Dokážte, že

$$\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{q}\right) \geq 4.$$

Riešenie 1

Podľa nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom platí

$$\frac{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{q}} = \frac{1}{\sqrt{pq}} \geq \frac{1}{1} = 1,$$

z čoho

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q} \geq 2,$$

a teda

$$\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{q}\right) = 1+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{q} = 1+\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)+\frac{1}{pq} \geq 1+2+\frac{1}{1} = 1+2+1 = 4.$$

Riešenie 2

Ekvivalentne upravujme:

$$\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{q}\right) \geq 4,$$

$$(p+1)(q+1) \geq 4pq,$$

$$pq+p+q+1 \geq 4pq,$$

$$p+q+1 \geq 3pq.$$

Podľa nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom platí a podľa predpokladu $pq \leq 1$ platí

$$\frac{p+q+1}{3} \geq \sqrt[3]{p\cdot q\cdot 1} = \sqrt[3]{pq} \geq pq,$$

z čoho

$$p+q+1 \geq 3pq.$$

Riešenie 3

Podľa nerovnosti medzi geometrickým a harmonickým priemerom platí

$$\sqrt{\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{q}\right)} \geq \frac{2}{\frac{1}{1+\frac{1}{p}}+\frac{1}{1+\frac{1}{q}}}.$$

Ukážeme, že

$$\frac{2}{\frac{1}{1+\frac{1}{p}}+\frac{1}{1+\frac{1}{q}}} \geq 2.$$

Ekvivalentne

$$1 \geq \frac{1}{1+\frac{1}{p}}+\frac{1}{1+\frac{1}{q}},$$

$$1 \geq \frac{p}{p+1}+\frac{q}{q+1},$$

$$(p+1)(q+1) \geq p(q+1)+q(p+1),$$

$$pq+p+q+1 \geq (pq+p)+(pq+q),$$

$$1 \geq pq,$$

čo platí podľa predpokladu.